

# Capítulo 2

## Modelado Matemático de una Línea de Transmisión, con Comportamientos no Lineales

Felipe Benitez Domínguez<sup>1</sup>  
Edgar M. Cano Cruz<sup>2</sup>

---

**Abstract:** This paper lays out an analysis for a dispersive non-linear transmission line which contains a non-linear, terminal-voltage-dependent capacitor; modelling the behavior of which results in a system of non-linear partial differential equations which are difficult to resolve exactly. Applying the perturbation method successfully simplifies these to a single, non-linear equation similar to the Korteweg-de Vries equation, which in turn raises the initial-boundary value problem to be resolved. Since the problem is based in the half-line, the Laplace transform is used to resolve the linear problem. With the Laplace inverse transform the boundary conditions are resolved and the unified solution is justified with only one fixed boundary condition. Since the solution to the linear problem remains expressed in terms of the Green function this is finally resolved by using asymptotic methods to obtain the behavior of the current and the voltage in the model under consideration. This is an approximate analytic representation of the exact solution. This analysis allows the deduction of the basic properties of the solution: how it grows or falls in different intervals, where it oscillates and where it is monotonous, the velocity with which its physical characteristics decay, etc.; this is to say, qualitative information of the system.

**Keywords:** Transmission line, asymptotic, non-linear, KdV, perturbation method.

**Resumen:** En este escrito se lleva a cabo el análisis para una línea de transmisión dispersiva que tiene un comportamiento no lineal, ya

---

<sup>1</sup>fbenitez@bianni.unistmo.edu.mx. Departamento de Lic. en Informática, Universidad del Istmo.

<sup>2</sup>canacion@hotmail.com. Departamento de Lic. en Informática, Universidad del Istmo.

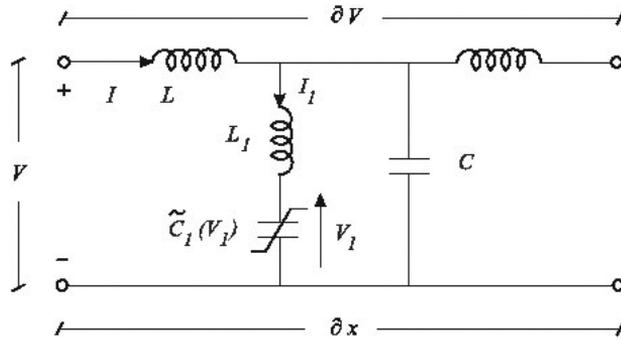
que ella contiene un capacitor no lineal que depende del voltaje en sus terminales; al modelar su comportamiento resulta un sistema de ecuaciones en derivadas parciales no lineales muy difícil de resolver en forma exacta. Aplicando el método de perturbaciones logra simplificarse a una sola ecuación no lineal parecida a la ecuación de Korteweg-de Vries, enseguida se plantea el problema de condiciones iniciales y de frontera a resolver. Como el problema se plantea en la semirrecta positiva, para resolver el problema lineal se usa la transformada de Laplace. Con la transformada inversa de Laplace se resuelven las condiciones de frontera y se justifica la unicidad de la solución con solo fijar una condición de frontera. Ya que la solución del problema lineal queda expresada en términos de la función de Green ésta finalmente es resuelta con métodos asintóticos que obtienen el comportamiento de la corriente y el voltaje en el modelo considerado. Ésta es una representación analítica aproximada de la solución exacta. Este análisis permite deducir las propiedades básicas de la solución: cómo crece o decrece en diferentes intervalos, dónde oscila y dónde es monótona, con qué velocidad decaen las características físicas, etc.; es decir, información cualitativa del sistema.

*Palabras clave:* Líneas de transmisión, asintótico, no lineal, KdV, método de perturbaciones.

## 2.1 Introducción

Se presenta un modelo no lineal con dispersión el cual implica que diferentes formas de onda viajan con diferentes velocidades. Este es un modelo ideal sin pérdidas, bajo la premisa de que las resistencias de los elementos son tan pequeñas que pueden ser despreciadas; éste es el caso de las líneas de transmisión de potencia, circuitos microelectrónicos, filtros, etc. La Figura 1 muestra el modelo generalizado donde se denota como  $V$  e  $I$  al voltaje en derivación y la corriente en serie respectivamente. El elemento diferencial del modelo consiste en representar el fenómeno inductivo a través de dos inductancias con valores  $L$  y  $L_1$  y el efecto capacitivo a través de dos capacitores, uno de estos es constante  $C$  y el otro es variable  $\tilde{C}_1(V_1)$ , lo que significa que es no lineal y cambia con la diferencia de potencial en sus terminales,  $V_1$  es el voltaje e  $I_1$  es la corriente que pasa en esta parte del circuito. Este modelo es similar a la configuración de un filtro para bajas que se utiliza para fenómenos de propagación de ondas en líneas de transmisión que tienen comportamientos no lineales [Prasanna1966]. Este modelo también describe la propagación de ondas en medios ópticos no lineales [Scott1970]. Otro fenómeno que puede describir este modelo es el efecto corona en líneas de transmisión de alto voltaje. La inductancia  $L_1$  desaparece en este caso [Carneiro1991].

Para este modelo se deriva un sistema no lineal de ecuaciones y utilizando el método de perturbaciones se reduce a una ecuación no lineal, similar a la ecuación conocida como Korteweg-de Vries (KdV). La ecuación de KdV es un modelo bas-



**Figura 2.1:** Diferencial de una línea de transmisión con un comportamiento no lineal.

tante general que en primera aproximación describe la propagación de ondas no lineales en diferentes medios. En el caso del problema de Cauchy (en toda la recta,  $-\infty < x < +\infty$ ) la ecuación de KdV fue resuelta analíticamente por el Método del Problema Inverso de Dispersión (MPID) [Ablowitz1981],[Calogero1982]. Sin embargo, no existe aún un resultado del comportamiento asintótico de las soluciones para tiempos grandes. En este trabajo se plantea el problema de condición de frontera para la ecuación modificada de KdV en la semirrecta positiva ( $x > 0$ ) y se obtiene la solución asintótica.

## 2.2 Análisis para el modelo no lineal

Como la caída de tensión en la inductancia  $L$  es igual a  $-L \frac{\partial I}{\partial t}$ , se pueden aplicar las leyes de Kirchoff para el circuito. Al utilizar la ley de conservación de la energía, el cambio del voltaje a cierta distancia está dado por:

$$L \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad (2.2.1)$$

esto significa que la caída de tensión en la inductancia  $L$  se tienen que compensar por la variación de tensión en todo el circuito por unidad de longitud.

Ya que la caída de tensión total en la malla interna de la Figura 2.1 tiene que ser igual cero, se tiene:

$$V_1 - V + L_1 \frac{\partial I_1}{\partial t} = 0. \quad (2.2.2)$$

La corriente en el capacitor  $C_1$  está dada por:

$$I_1 = C_1(V_1) \frac{\partial V_1}{\partial t}, \quad (2.2.3)$$

donde  $C_1(V_1) = \tilde{C}_1 + V_1 \frac{\partial \tilde{C}_1}{\partial V_1}$ .

Finalmente al usar el balance de corrientes en la malla, se tiene:

$$C \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial x} + I_1 = 0. \quad (2.2.4)$$

Al derivar (2.2.4) con respecto a  $t$  y sustituir en (2.2.2) resulta:

$$V_1 - V = L_1 C \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + L_1 \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial t}. \quad (2.2.5)$$

Al usar (2.2.3), (2.2.4) se puede escribir como:

$$C \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial x} + C_1(V_1) \frac{\partial V_1}{\partial t} = 0. \quad (2.2.6)$$

Entonces se obtiene un sistema de tres ecuaciones en derivadas parciales (EDP) no lineales que modelan el voltaje y la corriente a través del modelo no lineal,

$$\begin{cases} V_1 - V = L_1 C \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + L_1 \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial t}, \\ C \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial x} + C_1(V_1) \frac{\partial V_1}{\partial t} = 0, \\ L \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (2.2.7)$$

En general, la resolución analítica de este tipo de ecuaciones no es posible, por lo tanto, se necesitan algunas alternativas para encontrar una solución aproximada. La primera posibilidad para resolver el problema es realizar un análisis numérico, como por ejemplo usando el método numérico de las características [Scott1970],[Gutiérrez2002], el método de la transformada numérica de Laplace [Naredo2002],[Gómez2002], el método de elementos finitos [Knickerbocker1997], etc. Esta posibilidad permite obtener la solución del modelo para un tiempo deseado. La otra posibilidad, que se propone en este trabajo, es encontrar una solución asintótica para tiempos grandes donde los errores puedan ser disminuidos al agregar más términos en la serie de Taylor como se muestra en la sección 5. Esta metodología de investigación consiste en encontrar una solución analítica aproximada a la solución exacta, considerada después de un periodo de tiempo; esto es un periodo de tiempo finito después del desarrollo completo del fenómeno transitorio del sistema.

## 2.3 Método de perturbaciones

Antes de iniciar con este método, cabe mencionar que para escribir las derivadas parciales, se emplea la siguiente notación:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = I_t, \quad \frac{\partial I}{\partial x} = I_x, \quad \text{etc.}$$

Ahora se cambia la escala de longitud de las ecuaciones. Las variables de espacio y tiempo  $x, t$  cambian de escala a unas nuevas variables descritas por la teoría de perturbaciones [Dodd1988], que son apropiadas para describir fenómenos con longitudes de onda grandes. Las nuevas variables son:

$$\begin{aligned}\xi &= \varepsilon^p(x - vt), \\ \tau &= \varepsilon^{3p}t,\end{aligned}\tag{2.3.1}$$

donde los parámetros  $v$  y  $p$  se calculan posteriormente. Al derivar las nuevas variables se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \varepsilon^p \frac{\partial}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \varepsilon^{3p} \frac{\partial}{\partial \tau} - v\varepsilon^p \frac{\partial}{\partial \xi}.\end{aligned}\tag{2.3.2}$$

Se considera que el capacitor  $C_1(V_1)$  es:

$$C_1(V_1) = C_0(1 - aV_1^n),\tag{2.3.3}$$

donde  $n$ ,  $a$  y  $C_0$  son positivos. Esto significa que la capacitancia es no lineal y cambia con la diferencia de potencial en terminales.

Se busca la solución del sistema con  $I$ ,  $V$  y  $V_1$  en forma de la siguiente serie:

$$V = \varepsilon V^{(1)} + \varepsilon^2 V^{(2)} + \varepsilon^3 V^{(3)} + \dots\tag{2.3.4}$$

Por lo tanto al sustituir (9), (10) y (11) en (7), se obtiene un sistema de tres ecuaciones modificadas en las nuevas variables, del cual se clasifica en potencias de  $\varepsilon$  y se extraen las más relevantes.

Para la primera ecuación se tiene:

$$\begin{aligned}O(\varepsilon) &: V_1^{(1)} - V^{(1)} \\ O(\varepsilon^m) &: V_1^{(m)} - V^{(m)} \\ O(\varepsilon^{2p+1}) &: -[v^2 L_1 C V_{\xi\xi}^{(1)} - v L_1 I_{\xi\xi}^{(1)}],\end{aligned}\tag{2.3.5}$$

para la segunda resulta:

$$\begin{aligned}O(\varepsilon^{p+1}) &: -v C V_{\xi}^{(1)} + I_{\xi}^{(1)} - v C_0 V_{1\xi}^{(1)} \\ O(\varepsilon^{p+m}) &: -v C V_{\xi}^{(m)} + I_{\xi}^{(m)} - v C_0 V_{1\xi}^{(m)} \\ O(\varepsilon^{3p+1}) &: C V_{\tau}^{(1)} + C_0 V_{1\tau}^{(1)} \\ O(\varepsilon^{n+p+1}) &: v a C_0 [V_1^{(1)}]^n V_{1\xi}^{(1)},\end{aligned}\tag{2.3.6}$$

finalmente para la tercera:

$$\begin{aligned}O(\varepsilon^{p+1}) &: V_{\xi}^{(1)} - v L I_{\xi}^{(1)} \\ O(\varepsilon^{p+m}) &: V_{\xi}^{(m)} - v L I_{\xi}^{(m)} \\ O(\varepsilon^{3p+1}) &: L I_{\tau}^{(1)}.\end{aligned}\tag{2.3.7}$$

Igualando potencias en (12)-(14), tales que incluyan derivadas con respecto a  $\xi$  y  $\tau$ , se encuentran los parámetros  $p = \frac{n}{2}$  y  $m = n + 1$  por lo que se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^j) &: V_1^{(j)} - V^{(j)} = 0, \quad 1 \leq j < n + 1 & (2.3.8) \\ O(\varepsilon^{n+1}) &: V_1^{(n+1)} - V^{(n+1)} = v^2 L_1 C V_{\xi\xi}^{(1)} - v L_1 I_{\xi\xi}^{(1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^j) &: -v C V_{\xi}^{(j)} + I_{\xi}^{(j)} - v C_0 V_{1\xi}^{(j)} = 0, \quad 1 \leq j < n + 1 & (2.3.9) \\ O(\varepsilon^{\frac{3}{2}n+1}) &: -v C V_{\xi}^{(n+1)} + I_{\xi}^{(n+1)} - v C_0 V_{1\xi}^{(n+1)} + C V_{\tau}^{(1)} \\ &+ C_0 V_{1\tau}^{(1)} + v a C_0 \left[ V_1^{(1)} \right]^n V_{1\xi}^{(1)} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^j) &: V_{\xi}^{(j)} - v L I_{\xi}^{(j)} = 0, \quad 1 \leq j < n + 1 & (2.3.10) \\ O(\varepsilon^{\frac{3}{2}n+1}) &: V_{\xi}^{(n+1)} - v L I_{\xi}^{(n+1)} + L I_{\tau}^{(1)} = 0. \end{aligned}$$

Al resolver para las potencias de  $\varepsilon$ :  $O(\varepsilon^j)$  con  $1 \leq j < n + 1$ , se obtiene:

$$V_1^{(j)} = V^{(j)}, \quad (2.3.11)$$

$$I^{(j)} = v C V^{(j)} + v C_0 V_1^{(j)}, \quad (2.3.12)$$

$$V^{(j)} = v L I^{(j)}. \quad (2.3.13)$$

Por lo tanto se tiene que:

$$V^{(j)} = V_1^{(j)} = v L I^{(j)}. \quad (2.3.14)$$

Ahora, al despejar  $I$  de (2.3.13) y sustituir en (2.3.12), resulta:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L(C + C_0)}}, \quad (2.3.15)$$

que es la velocidad de propagación de las ondas que viajan en la dirección positiva.

Finalmente, se resuelve para las potencias de  $\varepsilon$ :  $O(\varepsilon^j)$  con  $j \geq n + 1$ . Al usar (2.3.14) y (2.3.15), se obtienen tres ecuaciones:

$$V_1^{(n+1)} - V^{(n+1)} = -v^3 L L_1 C_0 I_{\xi\xi}^{(1)}, \quad (2.3.16)$$

$$\begin{aligned} 0 &= I_{\xi}^{(n+1)} - v C V_{\xi}^{(n+1)} - v C_0 V_{1\xi}^{(n+1)} \\ &+ v^{-1} I_{\tau}^{(1)} + v a C_0 (v L)^{n+1} \left[ I^{(1)} \right]^n I_{\xi}^{(1)}, \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

$$0 = V_{\xi}^{(n+1)} - v L I_{\xi}^{(n+1)} + L I_{\tau}^{(1)}. \quad (2.3.18)$$

Multiplicando (2.3.17) por  $vL$  y sumar a (2.3.18), se llega:

$$v^5 L L_1 C_0^2 I_{\xi\xi\xi}^{(1)} + v^2 a C_0 (vL)^{n+1} \left[ I^{(1)} \right]^n I_{\xi}^{(1)} + 2I_{\tau}^{(1)} = 0. \quad (2.3.19)$$

Ahora, se observa que la ecuación que se obtiene después de haber aplicado el método de perturbaciones está en función de las variables  $\xi$  y  $\tau$ , por lo que, debe regresarse a las coordenadas normales  $x$  y  $t$ . Para realizar este cambio, se usa la ecuación (2.3.2), considerando la primera aproximación (se fija  $n = 1$ ) y se obtiene:

$$I_t + A I_x + B I I_x + I_{xxx} = 0, \quad (2.3.20)$$

donde  $A = \sqrt[3]{\frac{2(C+C_0)}{L_1 C_0^2}}$  y  $B = \varepsilon a \sqrt[3]{\frac{v^7 C_0 L^5}{4L_1}}$ .

Se puede observar que (2.3.20) es una ecuación en derivadas parciales no lineal más simple, aunque no más fácil, que el sistema de EDP (2.2.7). Esta ecuación tiene la forma de la ecuación modificada de KdV [Dodd1988]. La variable dependiente de la ecuación no lineal es la corriente  $I$  y las constantes  $A$  y  $B$  pueden hallarse mediante los parámetros de inductancia y capacitancia del modelo considerado. La ecuación (2.3.14) relaciona la corriente y el voltaje; por lo tanto, si se obtiene una solución analítica aproximada de la ecuación no lineal, se encuentra el comportamiento de la corriente y el voltaje en el modelo.

## 2.4 Solución del problema lineal

Al resolver una ecuación, puede suceder que ésta tenga más de una solución. Para que la ecuación determine unívocamente una solución, suelen imponerse condiciones adicionales, que se denominan iniciales o de frontera. Un aspecto importante que se refiere a las condiciones iniciales o de frontera que demanda naturalmente cada tipo de ecuación, es que el problema que se formule esté bien planteado y posea una correcta interpretación. Un problema se denomina bien planteado si satisface las siguientes condiciones: i) admite solución, ii) ésta es única y iii) la solución depende de las condiciones iniciales o de frontera [Castro1997]. El paso siguiente es, plantear correctamente el problema de la ecuación modificada de KdV y desarrollar el procedimiento para obtener la solución.

Cuando la variable dependiente presenta solamente una derivada de primer orden con respecto a  $t$ , se plantea una única condición inicial:  $I(x, 0) = I_0(x)$ , donde la función  $I_0(x)$  representa una corriente inicial en el modelo, una fuente, una excitación, un impulso, etc.

Ahora la pregunta natural es: ¿cuántos valores en frontera hay que fijar con respecto a  $x$ , para obtener la solución única del problema? Esta es una pregunta difícil ya que cada tipo de ecuación se trata de manera diferente. En esta sección se justifica que para que el problema esté planteado correctamente basta considerar sólo una condición de frontera. Como la longitud del modelo es siempre positiva ( $x > 0$ ), la condición de que en el extremo  $x = 0$  la corriente  $I$  varíe de alguna manera como una función del tiempo, se expresa como:  $I(0, t) = h(t)$ ,

pero si dicha variable permanece fija, entonces  $I(0, t) = k$ . Para simplicidad de las ecuaciones se fija una condición de frontera homogénea  $I(0, t) = 0$ , pero el método que se propone se puede usar para el caso general.

Se considera entonces el siguiente problema no lineal de condición de frontera:

$$\begin{cases} I_t + A I_x + B I I_x + I_{xxx} = 0, & x > 0, t > 0, \\ I(x, 0) = I_0(x), & x > 0, \\ I(0, t) = 0, & t > 0, \end{cases} \quad (2.4.1)$$

del cual se resuelve primero el problema lineal asociado a una función  $f$  que depende de los parámetros de espacio y tiempo:

$$\begin{cases} I_t + A I_x + I_{xxx} = f, & x > 0, t > 0, \\ I(x, 0) = I_0(x), & x > 0, \\ I(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (2.4.2)$$

Como el problema se plantea en la semirrecta positiva  $x > 0$ , éste se resuelve con el método de la transformada de Laplace. Al aplicar la transformada de Laplace con respecto a la variable  $x$  al problema lineal se obtiene:

$$\widehat{I}_t + A p \widehat{I} + p^3 \widehat{I} - p^2 I - p I_x - I_{xx} = \widehat{f}. \quad (2.4.3)$$

Agrupando:

$$\widehat{I}_t + (p^3 + A p) \widehat{I} = f_1, \quad (2.4.4)$$

donde:  $f_1 = \widehat{f} + p^2 I + p I_x + I_{xx}$ .

Se observa que (2.4.4) es una ecuación diferencial ordinaria en la variable  $t$ , cuya solución considerando  $I_0(x)$  es:

$$\widehat{I} = \widehat{I}_0 e^{-K(p)t} + \int_0^t e^{-K(p)(t-\tau)} f_1 d\tau, \quad (2.4.5)$$

donde  $K(p) = p^3 + A p$  es un polinomio de tercer grado.

Entonces, la solución del problema lineal se obtiene al evaluar la transformada inversa de Laplace de (2.4.5).

Después del análisis adecuado resulta:

$$I(x, t) = \int_0^\infty I_0(y) F(x, y, t) dy + \int_0^t d\tau \int_0^\infty f(y, \tau) F(x, y, t - \tau) dy, \quad (2.4.6)$$

donde  $F$  se conoce como la función de Green:

$$F(x, y, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{\xi(t) + \varphi_3 x} \sum_{j=1}^3 e^{-\varphi_j y} \varphi_j' d\xi \quad (2.4.7)$$

y las funciones  $\varphi_j$  son raíces de polinomio  $K(p)$ .

Finalmente la solución del problema lineal justifica que el problema fue planteado correctamente ya que se encontró la solución, es única y depende de la condición inicial.

## 2.5 Solución del problema no lineal

Para obtener la solución del problema no lineal, se necesita resolver la función de Green (2.4.7), ya que es una integral complicada; ésta se resuelve por métodos asintóticos. La función  $e^{-\varphi_j y}$  con  $Re\varphi_j > 0$ , se desarrolla en serie con la aplicación del Teorema de Taylor [Burden1985]:

$$e^{-\varphi_j y} = 1 - \varphi_j y + \frac{1}{2} \varphi_j^2 y^2 + O(|\varphi_j^3| y^3)$$

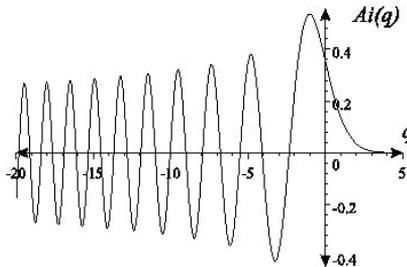
y se sustituye en (2.4.7) utilizando los tres primeros términos en la parte principal y los demás términos se consideran como errores. En esta parte del trabajo se justifica que los errores se pueden disminuir al usar más términos en la serie y obtener así una solución más aproximada. Finalmente la solución asintótica para la función de Green es:

$$F(x, y, t) = \frac{y^2}{4\pi} \frac{1}{t} \frac{x}{\sqrt[3]{t}} Ai\left(\frac{x - At}{\sqrt[3]{t}}\right) + y^3 O\left(\frac{x}{\sqrt[3]{t}} \frac{1}{t} \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\right), \quad (2.5.1)$$

donde la función Airy es una integral compleja definida por [Olver1974]:

$$Ai(q) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{-z^3 + zq} dz$$

y su gráfica se muestra en la Figura 2.2.



**Figura 2.2:** Comportamiento de la función Airy, donde  $q$  es de  $-15$  a  $5$  y  $Ai(q) \rightarrow 0$  cuando  $q \rightarrow \infty$ .

Para resolver el problema no lineal (2.4.1), se despeja el término no lineal:  $I_t + A I_x + I_{xxx} = B I I_x$  y se considera que  $f(x, t) = B I I_x$  es la función  $f$  del problema lineal. Entonces la solución se obtiene al sustituir  $f(x, t)$  y la solución asintótica de la función de Green en (2.4.6) y utilizar algunas estimaciones de los trabajos [Hayashi2002],[Kaikina1999]:

$$I(x, t) = D \frac{1}{t} \frac{x}{\sqrt[3]{t}} Ai\left(\frac{x - At}{\sqrt[3]{t}}\right) + O\left(\frac{x}{\sqrt[3]{t}} \frac{1}{t} \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\right), \quad (2.5.2)$$

donde:

$$D = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty y^2 I_0(y) dy + \frac{B}{4\pi} \int_0^\infty d\tau \int_0^\infty y^2 I I_y dy, \quad (2.5.3)$$

$D$  es una constante, ya que al definir la condición inicial  $I_0(y)$ , la primera integral se evalúa y en los trabajos [Hayashi2002],[Kaikina1999] se demuestra que la segunda integral también es convergente.

## 2.6 Resultados

La solución  $I(x, t)$  en forma asintótica es (2.5.2) y los parámetros de corriente y voltaje del modelo no lineal se pueden hallar con las ecuaciones (2.3.4) y (2.3.14).

Para comparar el caso lineal con el no lineal, se sustituye  $f(x, t) = 0$  en la solución en forma integral (2.4.6) y se obtiene la asintótica para el caso lineal:

$$I(x, t) \approx D \frac{1}{t} \frac{x}{\sqrt[3]{t}} Ai \left( \frac{x - At}{\sqrt[3]{t}} \right), \quad (2.6.1)$$

donde  $D = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty y^2 I_0(y) dy$ .

Estimando algunos parámetros de inductancia y capacitancia  $A = 100$ ,  $B = \sqrt[3]{10}$  y se considera la siguiente condición inicial:

$$I_0 = e^{-x} \text{sen}(0.1x).$$

Las Figuras 2.3 y 2.4 muestran las gráficas de  $I(x, t)$  contra  $x$ , fijando  $t = 10$  para obtener la grafica en dos dimensiones.

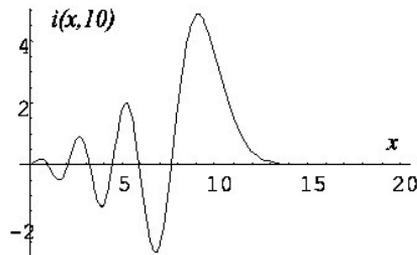


Figura 2.3: Solución asintótica no lineal.

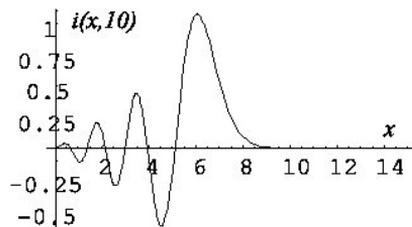


Figura 2.4: Solución asintótica lineal.

En las Figuras 2.5 y 2.6 se muestran gráficas de  $I(x, t)$  contra  $t$ , fijando ahora la coordenada de distancia  $x = 10$ .

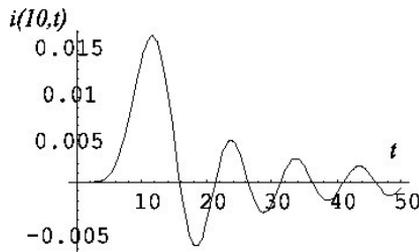


Figura 2.5: Solución asintótica no lineal.

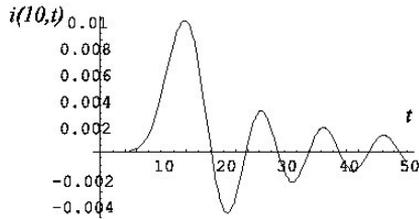


Figura 2.6: Solución asintótica no lineal.

## 2.7 Conclusiones

En este trabajo se realizó el estudio analítico y se obtuvo una fórmula cerrada que describe el comportamiento de la corriente en un modelo no lineal. En este caso, al considerar la condición de frontera igual a cero, se obtiene un comportamiento casi lineal de la solución; esto se puede observar en las figuras anteriores, ya que las características de la solución son similares, por lo que la solución asintótica no lineal se comporta como casi lineal. Además, el problema fue planteado correctamente, ya que se encontró la solución única para cualquier tiempo; realmente la solución asintótica encontrada funciona para cualquier tiempo  $t > 1$ , porque para  $t < 1$ , se observa que los errores serían más importantes que el término principal. Se justificó también que el problema tiene solución única al fijar sólo una condición de frontera. Otras propiedades básicas de la solución que se observan son: que no hubo destrucción de ésta, ya que existe para cualquier tiempo  $t > 0$ ; la no linealidad afecta sólo en una diferencia entre el valor de las amplitudes. En el caso del problema de Cauchy (en toda la recta) la solución del problema no lineal es completamente diferente del caso lineal. En el caso del problema en semirrecta es más complicado, ya que es necesario analizar cómo influyen las condiciones de frontera en el comportamiento de la solución; además, es de interés solucionar un problema o modelo generalizado del cual puedan obtenerse casos específicos.

# Bibliografía

- [Prasanna1966] B. N. Prasanna, **Wave propagation on lossless nonlinear transmission lines exhibiting dispersion**, Ph.D. dissertation, Dept. Elect. Eng., Univ. of Wisconsin, Madison, Jan. 1966.
- [Scott1970] A. C. Scott, **Active and nonlinear wave propagation in electronics**, Wiley-Interscience, New York, USA, 1970.
- [Carneiro1991] S. Carneiro, J. R. Martí, **Evaluation of corona and line models in electromagnetic transients simulations**, Power Delivery, IEEE Trans., Vol. 6, pp. 334-342, Jan. 1991.
- [Ablowitz1981] M. J. Ablowitz, H. Segur, **Solitons and inverse scattering transform**, SIAM, Philadelphia, 1981.
- [Calogero1982] F. Calogero, A. Degasperis, **Spectral transform and solitons: Tools to solve and investigate nonlinear evolution equations**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1982.
- [Gutiérrez2002] J. A. Gutiérrez, **Desarrollo de un método para el análisis de líneas de transmisión no uniformes y su aplicación al estudio del problema del flameo inverso**, Tesis de Maestría, CUCEI, Univ. de Guadalajara, Jun. 2002.
- [Naredo2002] J. L. Naredo, P. Moreno, J. L. Guardado, J. A. Gutierrez, **La transformada numérica de Laplace como una herramienta de investigación y desarrollo en Ingeniería Eléctrica**, IV Reunión de Otoño de Potencia, Electrónica y Computación, IEEE Sección México, Morelia, Mich., Nov. 2002.
- [Gómez2002] P. Gómez, P. Moreno, J. L. Naredo, **Modelado de condiciones no-lineales en redes de transmisión utilizando la transformada numérica de Laplace**, XV Reunión de Verano de Potencia y exposición industrial, IEEE Sección México, Sistemas de Potencia, Acapulco, Gro., Jul. 2002.
- [Knickerbocker1997] C. J. Knickerbocker, **Modelos de impulsos nerviosos**, Depto. de Matemáticas, St. Lawrence University, Ensayo que aparece en la obra: Ecuaciones diferenciales con aplicaciones Tercera Edición, por Dennis G. Zill, Grupo Editorial Iberoamerica, S.A. de C.V., México, 1997.

- [Dodd1988] R. K. Dodd, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, H. C. Morris, **Solitons and nonlinear wave equations**, Academic Press, Inc., New York, USA, 1988.
- [Castro1997] A. Castro Figueroa, **Ecuaciones en derivadas parciales**, Addison-Wesley Iberoamericana, S. A., Wilmington, Delaware, E.U.A., 1997.
- [Burden1985] R. L. Burden, J. D. Faires, **Análisis numérico**, 3a. edición, Grupo Editorial Iberoamerica, S.A. de C.V., México, 1985, pp. 14-38.
- [Olver1974] F. W. J. Olver, **Asymptotics and special functions**, Academic Press, New York, USA, 1974.
- [Hayashi2002] N. Hayashi, E. I. Kaikina, H. F. Ruiz, **Korteweg-de Vries-Burgers equation on half-line**. Nonlinear Differential Equations and Applications, to appear (2002) EE. UU.
- [Kaikina1999] E. I. Kaikina, P. I. Naumkin, I. A. Shishmarev, **Asymptotic behavior for large time of solutions to the nonlinear nonlocal Schrödinger equation on half-line**, SUT Journal of Mathematics, Japan, (35) (1) (1999), pp. 37-79.