

Ensayos

Matriz Vandermonde y ajuste polinómico, como herramienta para estimar la duración del área foliar en el maíz

Resumen

El área foliar es un índice fisiológico de gran importancia, ya que el rendimiento agronómico depende en gran medida de la duración de las hojas vegetativas (nomófilos) para realizar fotosíntesis. Con el objeto de idear una nueva estrategia para determinar la duración del área foliar (DAF), se utilizó el método de mínimos cuadrados para realizar un ajuste polinómico y generar un polinomio de grado "n" que pueda ser integrable. Mediante la matriz de Vandermonde, el polinomio obtenido se integró usando el programa LabView y el método del trapecio, los cuales fueron comparados con el método tradicional. El diseño experimental fue completamente al azar, donde los tratamientos fueron: testigo, determinado por el programa LabView; el método del trapecio y el método tradicional con tres repeticiones teniendo 9 unidades experimentales. Las plantas de maíz se sembraron en Teotitlán de Flores Magón, Oaxaca, durante el verano de 2011. Los resultados indican que la regla del trapecio es una herramienta importante para determinar la DAF, mientras que el método tradicional no estimó correctamente la DAF al lograr un 84.4 % de la DAF total verdadera. El programa LabView y el método del trapecio, quienes resultaron ser estadísticamente iguales, demostraron que junto a la matriz Vandermonde y el ajuste polinómico pueden ser herramientas que ayuden a la determinación de la DAF.

Abstract

The leaf area index is of great physiological importance, as agronomic yield depends largely on the duration of the vegetative leaf for photosynthesis. In order to devise a new strategy to determine the leaf area duration (LAD), the least squares method was used to generate a polynomial fit and a polynomial of degree "n" that can be integrable. By the Vandermonde matrix construction, the polynomial obtained was integrated using the LabView program and the trapezoidal method, which were compared with the traditional method. The experimental design was completely random, where treatments were: control, determined by the LabView program; the trapezoidal method and the traditional method with three replications having nine experimental units. Maize plants were seeded in Teotitlán de Flores Magón, Oaxaca, in the summer of 2011. Results indicate that the trapezoidal rule can be an important tool to determine the LAD, while the traditional method did not estimate correctly since it obtained 84.4% of the true full LAD. The LabView program and trapezoidal method, which were statistically equal, showed that the Vandermonde matrix and the polynomial fit can be tools to help determine the LAD.

Résumé

La surface foliaire est un indice physiologique d'une grande importance, vu que le rendement agronomique dépend en grande partie de la durée des feuilles végétatives (nomophylles) pour réaliser la photosynthèse. Dans le but de concevoir une nouvelle stratégie pour déterminer la durée de surface foliaire (DSF), on a utilisé une méthode de moindres carrés pour réaliser un ajustement de polynôme de degré "n" qui puisse être intégré. Au moyen de la matrice de Vandermonde, le polynôme obtenu a été intégré en utilisant le programme LabView et la méthode du trapèze, lesquels ont été comparés avec la méthode traditionnelle. Le dessin expérimental a été fait complètement au hasard et les traitements ont été les suivants: témoin déterminé par le programme LabView; méthode du trapèze et méthode traditionnelle avec 3 répétitions de 9 unités expérimentales. Les plants de maïs ont été semés à Teotitlán de Flores Magón, Oaxaca, pendant l'été 2011. Les résultats indiquent que la règle du trapèze est un outil important pour déterminer la DSF, alors que la méthode traditionnelle n'a pas estimé correctement la DSF, seulement 84,4% de la DSF réelle. Le programme LabView et la méthode du trapèze, qui ont des résultats statistiquement identiques, ont démontré qu'avec la matrice de Vandermonde et l'ajustement de polynôme ils peuvent être des outils qui aident à la détermination de la DSF.

Ernesto Díaz López¹, Alejandro Morales Ruíz¹ y Arturo Olivar Hernández¹ y Juan Manuel Loeza Corte²

Palabras clave: Regla del trapecio, mínimos cuadrados, área foliar, índice de área foliar.

Introducción

El maíz (*Zea mays* L.) es un cultivo básico cuyo centro de origen se localiza en el centro de México, particularmente en el valle de Tehuacán-Cui-

¹Universidad Tecnológica de Tehuacán.

²Universidad de la Cañada.

catlan. Esta planta se usa como alimento para el ser humano y como forraje, pero tiene importancia como fuente de almidón, celulosa, ácidos grasos y materia prima para la síntesis de biocombustibles, como el bioetanol E-5 y E-10 (González y Brugués, 2010; Vázquez *et al.*, 2010). Para obtener un buen rendimiento agronómico en este cultivo y usarlo en dichos aspectos se requiere un buen suministro de agua, nutrientes y anhídrido carbónico (Castillo *et al.*, 2007, citado por Díaz *et al.*, 2013), lo que repercutirá en un mayor despliegue del área foliar, provocando que el dosel intercepte una mayor radiación solar para sintetizar hidratos de carbono (Escalante, 1999). Otro aspecto relacionado con el rendimiento de los cultivos es el tiempo que tarda la lámina foliar verde realizando el proceso de autotrofia, mejor conocida como duración del área foliar (DAF), la cual se determina por el método tradicional con la fórmula $DAF = \sum_{i=1}^n \left(\frac{(IAF_i + IAF_{i+1})(T_i - T_{i-1})}{2} \right)$ donde: IAF_i y IAF_{i+1} , son los índices de área foliar (IAF) determinados en los tiempos respectivos T_i y T_{i+1} hasta n (Barrios, Escalante, González, 2013; Escalante y Kohashi, 1993), método cuya desventaja es que su uso es destructivo. Una alternativa a esta técnica es la obtención de modelos polinómicos, resultando en graficar el IAF respecto al tiempo, mediante la matriz de Vandermonde, y obtener un polinomio de grado “ n ” con el método de mínimos cuadrados, el cual al ser integrado por la regla del trapecio, resultará en la DAF, y cuyo modelo se ajusta con el tiempo para aumentar el coeficiente de determinación y así dicho modelo servirá para determinar de manera aproximada a la realidad la DAF, sin utilizar métodos destructivos en el cultivo del maíz.

Por lo tanto, el objetivo del presente estudio fue obtener un modelo polinomial de grado “ n ” mediante la matriz de Vandermonde y ajuste por mínimos cuadrados, para determinar la duración del área foliar en maíz.

Materiales y métodos

El presente estudio se realizó bajo condiciones de campo en Teotitlán de Flores Magón Oaxaca, durante el periodo comprendido de Junio a Octubre del 2011, ubicado a 18° 06' N, 98° 06' O y 880 m de altitud, bajo un clima Bs₀e'g que corresponde a un clima seco con temperatura media anual 26 °C, precipitación menor a 400 mm, la cual se distribuye de Junio a Septiembre, la

oscilación de la temperatura es mayor a 14 °C y el mes más cálido se presenta antes del solsticio de verano el cual ocurre en Abril (García, 2005). El material genético utilizado fue H-40, el cual es un híbrido trilineal de ciclo intermedio cuya genealogía es (CML246 x CML242) x (M-39) donado por el Instituto Nacional de Investigaciones Agrícolas y Pecuarias (INIFAP) Campo experimental Toluca (Aquino, Sánchez, González, Sánchez, 2011). Este genotipo fue sembrado en bolsas de polietileno de capacidad de 4 kg depositando dos semillas por golpe, realizando un aclareo a los 20 días después de la siembra dejando sólo una plántula por bolsa. El arreglo topológico fue 0.30 x 0.80 m, dando como resultado una densidad de población de 4.16 plantas m², las bolsas fueron llenadas con suelo de la zona que corresponde a un luvisol formado por restos coluviales en proceso de formación mezclado con hojarasca a una proporción de 2:1 v/v, con pH de 6.5 y conductividad eléctrica de 1.7 dS m⁻¹ y 2.5 % de materia orgánica. Los tratamientos consistieron en tres métodos para determinar la duración del área foliar: testigo (T_0) que se fundamentó en el cálculo del área bajo la curva generada por el polinomio mediante el programa LabVIEW, con un número de intervalos $n = 100$, que puede considerarse como el valor más aproximado a la realidad mediante la regla de Simpson 1/8. Tratamiento 1 (T_1), cálculo del área bajo la curva mediante la regla del trapecio, por medio de la ecuación:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2n} \left[f(a) + 2f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + 2f\left(a + 2\frac{b-a}{n}\right) + \dots + f(b) \right]$$

donde $n = 5$, este valor dentro del experimento corresponde a los tiempos en los cuales se realizaron los muestreos destructivos de 0-20, 20-40, 40-60, 60-80 y 80-100 dds (días después de la siembra), a y b es el intervalo de integración, que para este caso fue de 0 a 100 dds y $f(x)$, es el polinomio generado mediante la matriz Vandermonde (Kreyszig, 2000; Mathews y Kurtis, 2000).

El tratamiento 2 (T_2) fue el método tradicional, que consiste en aplicar la siguiente ecuación (Escalante y Kohashi, 1993):

$$DAF = \sum_{i=1}^n \left(\frac{(IAF_n + IAF_{n+1})(T_{n+1} - T_n)}{2} \right)$$

Donde: DAF, es la duración del área foliar; IAF_n y IAF_{n+1} , son los índices de área foliar 1 y 2, en los tiempos $T1$ y $T2$ respectivamente, de aquí en adelante éstas se abreviarán. El área foliar se determinó con la fórmula: $AF=(LA) (0.7)$, donde AF , es el área foliar; L , el es largo de la hoja y A , el ancho (Aguilar, Escalante, Fucikovsky, Tijerina, Engleman, 2005). El índice de área foliar, se obtuvo con los datos generados del área foliar y con ayuda de la ecuación:

$$IAF = \left(\frac{(AF)(DP)}{10,000} \right)$$

Dónde: IAF , es el índice de área foliar; AF , área foliar y DP , es la densidad de población (Díaz, Loeza, Campos, Morales, Domínguez, Franco, 2013; Morales, Franco, González, 2011 y Hopkins y Huner, 2004).

Con los datos del índice de área foliar y el tiempo en el cual se realizaron los muestreos destructivos, se obtuvo la gráfica para establecer el grado del polinomio a utilizar y poder establecer así la matriz Vandermonde, que dará como resultado el polinomio para determinar el área bajo la curva. La matriz, se generó mediante la interpolación y ajuste de la curva del polinomio por mínimos cuadrados, ajustando los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ al que $f(x_\beta) = y_\beta$ pertenecen a la función en el espacio vectorial de funciones generadas por la base $\{1, x, x_2, \dots, x^n\}$ y así generar el conjunto de polinomios de grado n , para este caso por el número de muestreos se propuso un polinomio de ajuste de cuarto grado, generado de la gráfica IAF vs dds , por lo tanto la matriz Vandermonde de acuerdo al algebra lineal será:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n &= y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n &= y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_2^n &= y_2 \\ &\vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n &= y_n \end{aligned}$$

sustituyendo los términos DAF y dds en la matriz a resolver, para encontrar los coeficientes de las variables dependiente e independiente correspondientes será:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1dds_0 + a_2dds_0^2 + \dots + a_ndds_0^n &= IAF_0 \\ a_0 + a_1dds_1 + a_2dds_1^2 + \dots + a_ndds_1^n &= IAF_1 \\ a_0 + a_1dds_2 + a_2dds_2^2 + \dots + a_ndds_2^n &= IAF_2 \\ &\vdots \\ a_0 + a_1dds_n + a_2dds_n^2 + \dots + a_ndds_n^n &= IAF_n \end{aligned}$$

Donde: DAF, es la duración del área foliar y dds, son los días después de la siembra.

El diseño experimental fue completamente aleatorizado, el cual fue evaluado mediante el modelo matemático: $Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$, donde Y_{ij} , es la variable respuesta del i -ésimo método de determinación de la duración del área foliar en la j -ésima repetición; μ , es la media general verdadera; τ_i , es el efecto del i -ésimo método de determinación del área foliar y ε_{ij} , es el error del i -ésimo método de determinación del área foliar en la j -ésima repetición (Infante y Zárate, 1990; Martínez, 1996).

La prueba de comparación de medias se realizó con la comparación DSH ($p \leq 0.05$) cuando ésta resultó significativa.

3. Resultados y discusión

En la Figura 1, se muestra la gráfica del índice de área foliar respecto al tiempo y en ella se puede apreciar que de 0 a 40 dds, presentó un comportamiento creciente para posteriormente cambiar a concavidad negativa de 40 a 80 dds, posteriormente la curva conservó esta tendencia hasta los 100 dds. El valor máximo que alcanzó el IAF fue 2.74 a los 80 dds.

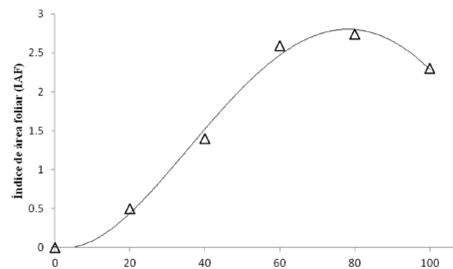


Figura 1. Índice de área foliar vs días después de la siembra en maíz cv. H-40 en la Universidad de la Cañada, Teotitlán de Flores Magón, Oaxaca México. Verano 2011.

La matriz Vandermonde a resolver y ajustada mediante el método de mínimos cuadrados:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1dds_0 + a_2dds_0^2 + \dots + a_ndds_0^n &= IAF_0 \\ a_0 + a_1dds_1 + a_2dds_1^2 + \dots + a_ndds_1^n &= IAF_1 \\ a_0 + a_1dds_2 + a_2dds_2^2 + \dots + a_ndds_2^n &= IAF_2 \\ &\vdots \\ a_0 + a_1dds_n + a_2dds_n^2 + \dots + a_ndds_n^n &= IAF_n \end{aligned}$$

De este modo los valores de los coeficientes a sustituir en la matriz para días después de la siembra serán: $dds = \{0, 20, 40, 60, 80 \text{ y } 100\}$ y para $IAF = \{0, 0.50, 1.40, 2.59, 2.74 \text{ y } 2.30\}$:

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1(0)_0 + a_2(0)_0^2 + a_3(0)_0^3 + a_4(0)_0^4 &= 0 \\
a_0 + a_1(20)_1 + a_2(20)_1^2 + a_3(20)_1^3 + a_4(20)_1^4 &= 0.50 \\
a_0 + a_1(40)_2 + a_2(40)_2^2 + a_3(40)_2^3 + a_4(40)_2^4 &= 1.40 \\
a_0 + a_1(60)_3 + a_2(60)_3^2 + a_3(60)_3^3 + a_4(60)_3^4 &= 2.59 \\
a_0 + a_1(80)_4 + a_2(80)_4^2 + a_3(80)_4^3 + a_4(80)_4^4 &= 2.74 \\
a_0 + a_1(100)_5 + a_2(100)_5^2 + a_3(100)_5^3 + a_4(100)_5^4 &= 2.30
\end{aligned}$$

Que es una matriz (6 x 5) y al resolver la misma, los coeficientes de las variables generaron el siguiente polinomio:

$$0.00000007dds^4 - 0.00002dds^3 + 0.0021dds^2 - 0.0113dds + 0.0119 = IAF$$

Este modelo se integró mediante LabView y la regla del trapecio T_0 (testigo) y T_1 respectivamente, llegando a los siguientes resultados.

Cuadro 1. Análisis de varianza y prueba de medias para tres métodos de determinación del área foliar en maíz, en la Universidad de la Cañada, Teotitlán de Flores Magón, Oaxaca, México. Verano 2011.

F.V	G.L	C.M	Tratamiento	DAF
Tratamientos	2	**	T_0 (testigo)	168.65 a [†]
Error	6	*	T_1	168.58 a
CV %		14.06	T_2	142.50 b
			DSH	0.56
			CV %	14.06

** Altamente significativo ($p \leq 0.01$), * significativo ($p \leq 0.05$). [†] Medias de tratamientos con letra diferente en una columna son estadísticamente diferentes ($p \leq 0.01$). F.V, Fuente de variación; G.L, Grados de libertad; C.M, Cuadrado medio; DAF, Duración del área foliar; T_0 (testigo), T_1 y T_2 , Tratamientos; CV, Coeficiente de variabilidad y DSH, Diferencia significativa honesta.

En el Cuadro 1 se presenta el análisis de varianza para los métodos en cuestión, y se puede apreciar que hubo diferencias altamente significativas para tratamientos y diferencias significativas para el error. El coeficiente de variación fue de 14.06 %, indicando que los datos fueron correctos. Respecto a la prueba de medias, los tratamientos T_0 y T_1 resultaron estadísticamente iguales con 168.65 y 168.58 días respectivamente a pesar de presentar diferencias numéricas entre sí, superando así a T_2 quien sólo presentó una duración de 142.50 días. Lo reportado en el presente estudio, no concuerda con los datos obtenidos por Rivera, Cabrales, Montoya, (2007), quienes reportan

una duración del área foliar para maíz en unicultivo de 59.6 días. Estas diferencias pueden deberse en gran medida al clima de los diferentes lugares de siembra de ambos experimentos, así como los genotipos utilizados, lo que provocó que la duración del área foliar en maíz ICA V- 109 fuera menor que en el maíz utilizado en esta investigación. Por su parte Escalante (1999), trabajó con girasol cv. SUNGRO y con la adición de 300 kg ha⁻¹ de N, reporta una duración del área foliar de 140 días, lo que coincide con los datos reportados en este estudio, hecho que puede deberse a que utilizó el método tradicional para determinar la DAF a pesar de tratarse de especies distintas, pero como el girasol es una planta de punto de fotosaturación alto, el metabolismo se asemeja al C_4 del maíz, quizá éste proceso fisiológico influyó de manera positiva para que la DAF fuera semejante a la encontrada en maíz, lo que puede utilizarse para futuros estudios sobre la fisiología comparada en ambas especies.

La metodología anterior aplicada al cultivo de maíz presenta una gran ventaja, ya que al ir ajustando los modelos polinómicos generados para estimar la duración del área foliar respecto al tiempo, en un futuro podrían convertirse en alternativas para estimar la DAF sin necesidad de destruir el cultivo, a comparación de los métodos que proponen Garcés y Forcelini (2011), que proponen métodos destructivos para determinar el área foliar, así como índice de área foliar y duración del área foliar, mediante la biomasa seca de hojas en el cultivo de soya.

Estos resultados indican que la duración del área foliar, calculada por el método del trapecio, resultó ser tan confiable como la que se determinó con el programa LabView, ya que el número de intervalos de integración en el programa fue de 100, lo que hace que la integral tienda a ser más precisa. Respecto al método tradicional éste sólo estimó una duración de 142.50 días, que representa una disminución del 15.6% respecto a la regla del trapecio y al programa utilizado. Esto nos lleva a reconocer que el método tradicional presenta cierta deficiencia en la estimación de la duración del área foliar en el cultivo de maíz, hecho que puede repercutir cuando éste estimador se correlaciona con otros parámetros como el rendimiento, lo que ocasionaría que al generar modelos matemáticos que involucren a la duración del área foliar no sean tan precisos.

Conclusiones

La regla del trapecio es una herramienta útil para determinar la duración del área foliar en el cultivo del maíz, lo mismo que el programa LabView. El método de mínimos cuadrados y la generación de una matriz Vandermonde, se usan para determinar polinomios de grado n que pueden ser útiles para explicar la duración del área foliar. El método tradicional presenta deficiencias en su estimación de hasta 15.6 % respecto a su valor más cercano. Así, la matriz Vandermonde y el ajuste polinómico son igualmente estrategias que generan modelos matemáticos, para explicar la duración del área foliar y minimizar los muestreos destructivos para el cálculo de la duración del área foliar (DAF), cuando éstos se aplican al cultivo del maíz 

Bibliografía

- Aguilar-García, L., Escalante-Estrada, E. J. A., Fucikovsky-Zak, L., Tijerina-Chávez, y Mark Engleman, E. 2005. Área foliar, tasa de asimilación neta, rendimiento y densidad de población en girasol. *Terra Latinoamericana*. 23(3): 303-310.
- Aquino, M. J. G., Sánchez, F. A., González, H. A. y Sánchez, P. R. 2011. Resistencia de variedades e híbridos de maíz (*Zea mays* L.) a *Sporisorium reilianum* y su rendimiento de grano. *Revista Mexicana de Fitopatología*. 29(1): 39-49.
- Barrios, A. P., Escalante, E. J. A., González, R. M. T. 2013. Producción de vaina verde en frijol chino y tipo de espaldera en clima cálido. *Revista Chapingo Serie Horticultura*. 19(1): 129-140.
- Castillo, A. M., G. I., Nikolskii, S.C.A. Ortiz, H. Vaquera, B. G. Cruz, S.E. Mejía y H. A. González. 2007. Alteración de la fertilidad del suelo por el cambio climático y su efecto en la productividad agrícola. *Interciencia*. 32(6): 368-376.
- Díaz, L. E., Loeza, C. J. M., Campos, P. J. M., Morales, R. E. J., Domínguez, L. A. y Franco, M. O. 2013. Eficiencia en el uso de la radiación, tasa de asimilación neta e integral térmica en función del fósforo en maíz (*Zea mays* L.). *Agrociencia*. 47(2): 135-146.
- Escalante, E. J. A. 1999. Área foliar, senescencia y rendimiento del girasol de humedad residual en función del nitrógeno. *Terra*. 17(2): 149-157.
- Escalante, E. J. A. y Kohashi, S. J. 1993. El rendimiento y crecimiento de frijol. Manual para la toma de datos. Centro de Botánica-Colegio de Postgraduados. Montecillo, México. 84 p.
- Garcés, F.F. y Forcelini, C.A. 2011. Peso de hojas como herramienta para estimar el área foliar en soya. *Ciencia y Tecnología*. 4(1): 13-18.
- García, E. 2005. Modificaciones al sistema de clasificación climática de KÖPPEN (para adaptarlo a las condiciones de la República Mexicana). Instituto de Geografía. Universidad Nacional Autónoma de México. México, D. F. 80 p.
- González, A.S y Brugués, R. A. 2010. Producción de biocombustibles con maíz: un análisis de bienestar en México. *Ra. Ximhai*. 6(1): 73-85.
- Hopkins, G. W., and P. A. Huner. 2004. Introduction to plant physiology. John Wiley and Sons. USA. p. 45-61.
- Infante, G.S. y Zárate de L. G.P. 1990. Métodos estadísticos: un enfoque multidisciplinario. Trillas. México, D. F. 643 p.
- Kreyszig, E. 2000. Matemáticas avanzadas para ingeniería. LIMUSA. México, D. F. 871 p.
- Mathews, J. y Kurtis, D. F. 2000. Métodos numéricos con MatLab. PRENTICE HALL. Madrid, España. 736 p.
- Martínez, G.A. (1996). Diseños experimentales. Métodos y elementos de teoría. Ed. Trillas, México, 756 p.
- Morales, R. E. J., Franco, M. O. y González, H. A. 2011. Snap bean production using sunflowers as living trellises in the central high valleys of Mexico. *Ciencia e Investigación Agraria*. 38(1): 53-63.
- Rivera, J. A., Cabrales, R.E. y Montoya, R. A. 2007. Effect of the population density of itchgrass (*Rottboellia cochinchinensis* L. SW. Clayton) on the cultivation of maize ICA V – 109. *Temas agrarios*. 12(2): 51-61.
- Vásquez, C. G., Pérez, C. J., Hernández, C., J., Marrufo, D. M. y Martínez, R. E. 2010. Calidad de grano y de tortillas de maíces criollos del altiplano y valle del mezquital, México. 321-325.