Capítulo 9

Análisis cinemático de un robot paralelo 2-PUS+RR aplicado a un rehabilitador de tobillo

Erick D. Flores-Salazar[1]
Mario A. García-Murillo[2]
Esther Lugo-González[3]
Jaime Gallardo-Alvarado[4]
Manuel Arias-Montiel[5]

Abstract: In this work the kinematics of a two degrees of freedom 2-PUS + RR (R, P, U and S = revolute, prismatic, universal and spherical, respectively) parallel manipulator, are solved. The forward position analysis is carried out applying recursively the Sylvester dialytic elimination method. Finally, a numerical example is provided and validated using the MSC Adams View™ simulation software.

Keywords: Parallel robot, kinematics, screw theory.

Resumen: En este trabajo se presenta el análisis cinemático de un robot paralelo 2-PUS + RR (R, P, U, S = revoluta, prismática, universal y esférica, respectivamente) de 2 grados de libertad. Para su análisis el robot paralelo tiene dos modos: en el primero se bloquea la rotación de la plataforma móvil asociada a los movimientos de inversión/eversión y para el segundo, se bloquea la rotación asociada a los movimientos de flexión/extensión. El análisis de desplazamiento conduce a cinco ecuaciones cuadráticas que se resuelven aplicando recursivamente la eliminación dialítica de Sylvester. Los resultados del análisis cinemático se validan por medio del software de simulación MSC Adams View™.

Palabras clave: Robot paralelo, cinemática, teoría de tornillo.

9.1. Introducción

Frecuentemente los seres humanos están en riesgo de sufrir incidentes traumáticos tanto en las extremidades superiores como inferiores, lo cual, en algunas ocasiones son la causa de lesiones

[1] fs1254@hotmail.com. Universidad Tecnológica de la Mixteca
[2] garcia.mario@ugto.mx. Universidad de Guanajuato
[3] elugog@mixteco.utm.mx. Universidad Tecnológica de la Mixteca
[4] jaime.gallardo@itcelaya.edu.mx. Instituto Tecnológico de Celaya
[5] mam@mixteco.utm.mx. Universidad Tecnológica de la Mixteca

permanentes, afectando así las actividades cotidianas de las personas, [11]. De acuerdo con información y datos disponibles de la Secretaria de Trabajo y Previsión Social sobre accidentes y enfermedades de trabajo, anualmente en México se presentan más de 400 mil casos de accidentes laborales, de los cuales poco más del 15 % son por accidentes en el pie y tobillo. Además, existen varias enfermedades neuromusculares que requieren de tratamiento inmediato con la intención de evitar daños más severos o permanentes, [2].

Existe una gran variedad de propuestas que tienen el objetivo de resolver el problema de rehabilitar el tobillo. Algunos autores han propuesto dispositivos que cumplen con dos movimientos de rehabilitación, los cuales proponen un mecanismo simple de un grado de libertad para solo cubrir los movimientos de flexión/extensión, [8, 10]. En lo que respecta a dispositivos que cumplen con cuatro movimientos de rehabilitación, se han propuesto mecanismos como los presentados en [1, 11], los cuales proponen el uso de dos actuadores y dos grados de libertad para cubrir dos movimientos (abducción/aducción y flexión/extensión) . También se han realizado dispositivos que cumplen con seis movimientos de rehabilitación [3, 12, 13], los cuales proponen mecanismos con más de tres actuadores y tres grados de libertad para cubrir los seis movimientos, aumentando el costo de fabricación y adquisición para los usuarios. Además de que se requieren modelos matemáticos más complejos, por el incremento en el número de ecuaciones polinomiales al realizar el análisis cinemático y el aumento en la dificultad para encontrar un modelo dinámico con múltiples entradas y salidas.

En este trabajo se propone un robot paralelo de dos grados de libertad que tiene como objetivo proporcionar seis movimientos necesarios para la rehabilitación de tobillo (flexión/extensión, inversión/eversión y abducción/aducción) utilizando sólo dos actuadores. Para su funcionamiento el robot tiene dos modos de operación (Figura 9.2), para cada modo el robot puede realizar cuatro movimientos de rehabilitación de manera simultánea. Para el primer modo el robot realiza movimientos de flexión/extensión y abducción/aducción. Para el segundo modo el robot realiza movimientos de inversión/eversión y abducción/aducción. Moviendo la orientación de la junta revoluta que une al poste central con la plataforma móvil se realiza el cambio entre ambos modos de operación. En las terapias de rehabilitación no es necesario realizar los seis movimientos de forma simultánea, por lo tanto, el robot propuesto puede proporcionar los seis movimientos (cuatro de forma simultanea) solamente cambiando la orientación de dicha junta.

9.2. Descripción del robot paralelo

El robot en estudio consiste en una plataforma móvil y una base fija, conectadas por medio de dos cadenas cinemáticas $\underline{P}$US más una cadena RR (Figura 9.1). La disposición de las cadenas cinemáticas es tal que los ejes de las juntas prismáticas son paralelas al eje Z del sistema de coordenadas global. Los centros de las uniones universales se designan como A_i y las ubicaciones de las uniones esféricas y la plataforma móvil se indican con B_i, para cada $i = 1, 2$. Para simplificar los análisis, las coordenadas de la plataforma móvil, B_1, B_2 y B_3 son coplanares. El sistema de coordenadas global es O_{XYZ} y el sistema de referencia móvil es P_{xyz}, donde el punto O y el punto P se encuentran en el punto de intersección de las uniones revoluta del poste central. Además, el eje Y es colineal al eje longitudinal del poste central.

9.3. Análisis de desplazamiento

Es bien conocido que la posición de cualquier cuerpo rígido puede especificarse conociendo las coordenadas de los tres puntos que le pertenecen. La posición de la plataforma móvil, con respecto al marco de referencia fijo O_{XYZ}, puede determinarse calculando las coordenadas de los puntos B_i. Luego se escriben las ecuaciones que incluyen estas variables usando expresiones de restricciones mecánicas. Las longitudes de las extremidades del robot están restringidas a

$$(\boldsymbol{B}_i - \boldsymbol{A}_i) \cdot (\boldsymbol{B}_i - \boldsymbol{A}_i) = d_i^2, \qquad \text{para cada } i = 1, 2\,. \tag{9.3.1}$$

Las tres ecuaciones de cierre de compatibilidad para la distancia e_{ij} pueden expresarse como

$$(\boldsymbol{B}_i - \boldsymbol{B}_j) \cdot (\boldsymbol{B}_i - \boldsymbol{B}_j) = e_{ij}^2, \qquad \text{para cada } j = 2, 3;\;\; i \neq j. \tag{9.3.2}$$

donde $(\cdot)$ indica al producto interno usual del álgebra vectorial y A_i, B_i y B_3 están dados por:

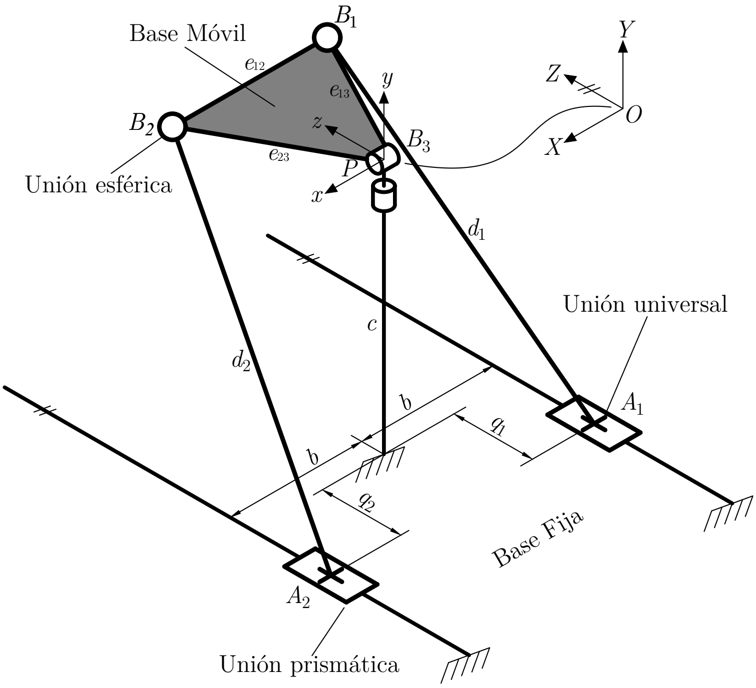


Figura 9.1: Robot paralelo 2-PUS+RR

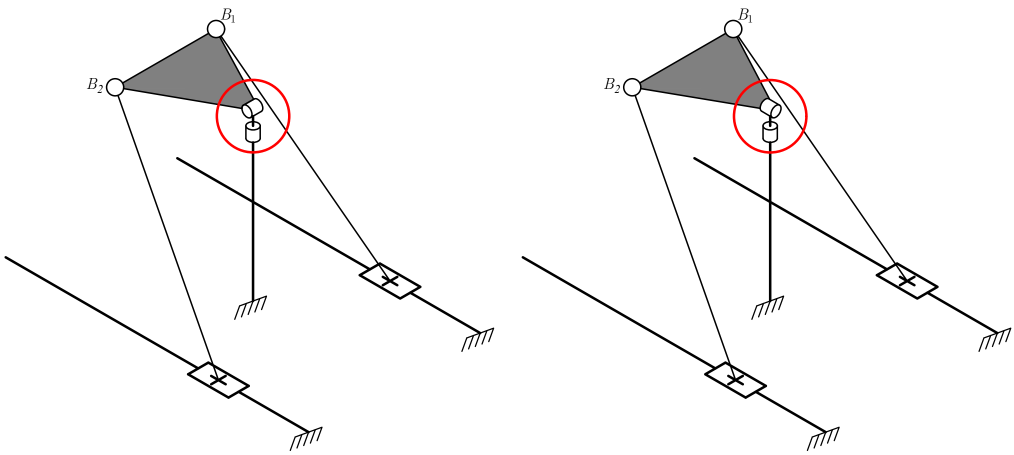
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}_1 &= \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \end{bmatrix}^T \\
\boldsymbol{B}_2 &= \begin{bmatrix} X_2 & Y_2 & Z_2 \end{bmatrix}^T \\
\boldsymbol{B}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\
\boldsymbol{A}_1 &= \begin{bmatrix} -b & -c & q_1 \end{bmatrix}^T \\
\boldsymbol{A}_2 &= \begin{bmatrix} b & -c & q_2 \end{bmatrix}^T
\end{aligned} \tag{9.3.3}$$

9.3.1. Cinemática directa

El problema de la cinemática directa es determinar la posición de las coordenadas B_i de la base móvil, dados los valores para las variables q_i de las juntas prismáticas.

Modos de operación

El robot paralelo tiene dos modos; en el primer modo la unión revoluta que une al poste central con la plataforma móvil tiene la dirección del vector $B_2 - B_1$ (Figura 9.2(a)), debido a esto se tiene que $Y_2 = Y_1$. Para el segundo modo dicha revoluta tiene la dirección del vector B_1+B_2 (Figura 9.2(b)), debido a esto se tiene que $Y_2 = -Y_1$. Para el primer modo el robot puede realizar los movimientos de flexión/extensión y abducción/aducción del tobillo. Para el segundo modo el robot puede realizar los movimientos de inversión/eversión y abducción/aducción. Con los dos modos se pueden realizar todos los movimientos de rehabilitación para la articulación tobillo.



(a) Modo 1. (b) Modo 2.

Figura 9.2: Modos de operación

Modo 1. Desarrollando las ecuaciones dadas en (9.3.1) y (9.3.2), con $Y_2 = Y_1$, se tiene

$$X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 + 2bX_1 + 2cY_1 - 2q_1Z_1 + b^2 + c^2 + q_1^2 = d_1^2 \tag{9.3.4}$$

$$X_2^2 + Y_1^2 + Z_2^2 - 2bX_2 + 2cY_1 - 2q_2Z_2 + b^2 + c^2 + q_2^2 = d_2^2 \tag{9.3.5}$$

$$X_1^2 - 2X_1X_2 + X_2^2 + Z_1^2 - 2Z_1Z_2 + Z_2^2 = e_{12}^2 \tag{9.3.6}$$

$$X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 = e_{13}^2 \tag{9.3.7}$$

$$X_2^2 + Y_1^2 + Z_2^2 = e_{23}^2 \tag{9.3.8}$$

con el fin de reducir el número de ecuaciones polinomiales, se sustituye (9.3.7) y (9.3.8) dentro de (9.3.4) y (9.3.5) y se producen dos ecuaciones lineales

$$e_{13}^2 + 2bX_1 + 2cY_1 - 2q_1Z_1 + b^2 + c^2 + q_1^2 = d_1^2 \tag{9.3.9}$$

$$e_{23}^2 - 2bX_2 + 2cY_1 - 2q_2Z_2 + b^2 + c^2 + q_2^2 = d_2^2 \tag{9.3.10}$$

despejando Z_1 y Z_2 de (9.3.9) y (9.3.10), se tiene

$$Z_1 = \frac{b^2 + 2bX_1 + c^2 + 2cY_1 - d_1^2 + e_{13}^2 + q_1^2}{2q_1} \tag{9.3.11}$$

$$Z_2 = \frac{b^2 - 2bX_2 + c^2 + 2cY_1 - d_2^2 + e_{23}^2 + q_2^2}{2q_2} \tag{9.3.12}$$

para reducir el número de variables se sustituye (9.3.11) y (9.3.12) dentro de (9.3.6), (9.3.7) y (9.3.8), esto produce la eliminación de las variables Z_1 y Z_2.

$$X_1^2 - 2X_1X_2 + X_2^2 + P = e_{12}^2 \tag{9.3.13}$$

$$X_1^2 + Y_1^2 + P' = e_{13}^2 \tag{9.3.14}$$

$$X_2^2 + Y_1^2 + P'' = e_{23}^2 \tag{9.3.15}$$

donde P es un polinomio de segundo grado que depende de X_1, X_2 y Y_1, por otro lado P' y P'' son polinomios de segundo grado que dependen de X_1, Y_1 y X_2, Y_1, respectivamente.

Solución analítica. Para resolver el sistema de ecuaciones en forma semi-cerrada se utiliza recursivamente el método de eliminación dialítica de Sylvester (Apéndice 1).

Sustituyendo los parámetros del robot mostrados en el Cuadro 9.1 con $q_1 = -67{,}0407$mm y $q_2 = -67{,}0407$mm se tienen las soluciones mostradas en el Cuadro 9.2, en la Figura 9.3 se muestra la interpretación física de cada una de las soluciones reales del robot.

Parámetro	Valor (mm)
b	85
c	135
d_1	207.5
d_2	207.5
e_{12}	100
e_{13}	100
e_{23}	100

Cuadro 9.1: Parámetros del robot

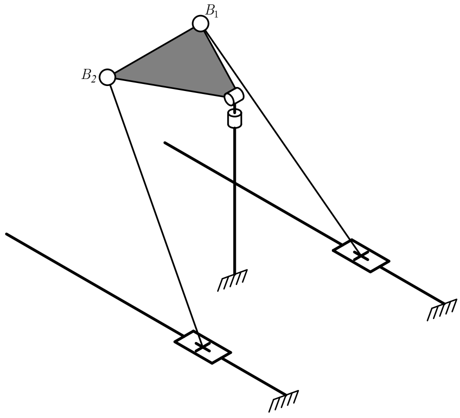
Sol.	X_1	X_2	Y_1	Z_1	Z_2
1	-64.2096+31.7733i	64.2096+31.7733i	77.1027	-50.6431-40.2850i	-50.6431+40.2850i
2	-64.2096+31.7733i	64.2096+31.7733i	77.1027	-50.6431-40.2850i	-50.6431+40.2850i
3	-50.0000	50.0000	68.9978	-52.3384	-52.3384
4	50.0000	-50.0000	21.6808	-83.8448	-83.8448
5	-50.0000	50.0000	0.0000	86.6025	86.6025
6	50.0000	-50.0000	-53.6978	67.9452	67.9452
7	86.7791+55.9410i	-86.7791+55.9410i	-77.1027	68.4440-70.9269i	68.4440+70.9269i
8	86.7791+55.9410i	-86.7791+55.9410i	-77.1027	68.4440-70.9269i	68.4440+70.9269i

Cuadro 9.2: Soluciones de análisis de desplazamiento, Modo 1

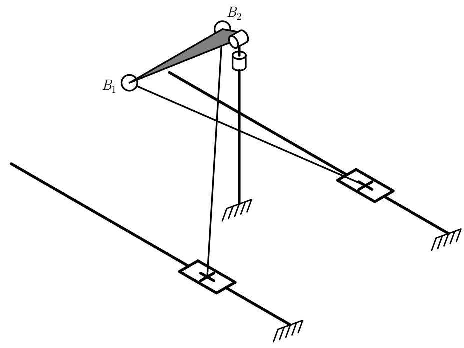
Sol.	B_1	B_2	ψ_1°	ψ_2°	ψ_3°
1	(-50, 0, 86.6025)	(50, 0, 86.6025)	0	0	0
2	(50, -53.6978, 67.9452)	(-50, -53.6978, 67.9452)	141.6802	0	180
3	(-50, 68.9978, -52.3384)	(50, 68.9978, -52.3384)	232.8178	0	0
4	(50, 21.6808, -83.8448)	(-50, 21.6808, -83.8448)	-14.4981	0	180

Cuadro 9.3: Soluciones reales de análisis de desplazamiento, Modo 1

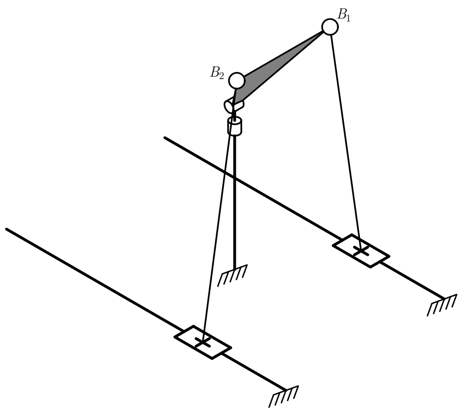
Para validar las ecuaciones se realiza una simulación en el software MSC Adams, los resultados se muestran en la Figura 9.4, donde $q_1 = 50\,\mathrm{sen}\,(t)$ y $q_2 = 30\,\mathrm{sen}\,(t)$.



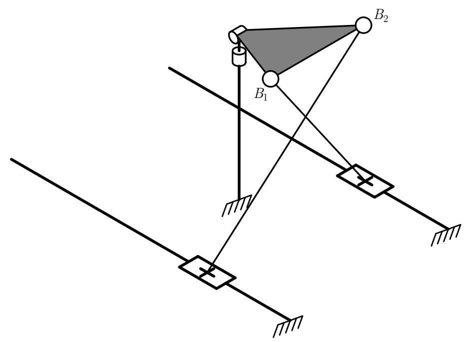
(a) Solución 1.



(b) Solución 2.



(c) Solución 3.



(d) Solución 4.

Figura 9.3: Soluciones obtenidas de análisis directo de desplazamiento para Modo 1

Modo 2. Desarrollando las ecuaciones dadas en (9.3.1) y (9.3.2), con $Y_2 = -Y_1$, se tiene

$$X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 + 2bX_1 + 2cY_1 - 2q_1Z_1 + b^2 + c^2 + {q_1}^2 = d_1^2 \tag{9.3.16}$$

$$X_2^2 + Y_1^2 + Z_2^2 - 2bX_2 - 2cY_1 - 2q_2Z_2 + b^2 + c^2 + {q_2}^2 = d_2^2 \tag{9.3.17}$$

$$X_1^2 - 2X_1X_2 + X_2^2 + 4Y_1^2 + Z_1^2 - 2Z_1Z_2 + Z_2^2 = e_{12}^2 \tag{9.3.18}$$

$$X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 = e_{13}^2 \tag{9.3.19}$$

$$X_2^2 + Y_1^2 + Z_2^2 = e_{23}^2 \tag{9.3.20}$$

Para encontrar una solución en forma semi-cerrada a este sistema de ecuaciones polinomiales, se sigue el mismo procedimiento que se mostró en el modo 1 (Apéndice 1). Sustituyendo los parámetros del robot mostrados en el Cuadro 9.1 con $q_1 = -67{,}0407$mm y $q_2 = -67{,}0407$mm se tienen las soluciones mostradas en el Cuadro 9.4, en la Figura 9.5 se muestra la interpretación física de cada una de las soluciones reales del robot. Para validar las ecuaciones se realiza una simulación en el software MSC Adams, los resultados se muestran en la Figura 9.6, donde $q_1 = 50\,\mathrm{sen}\,(t)$ y $q_2 = -50\,\mathrm{sen}\,(t)$.

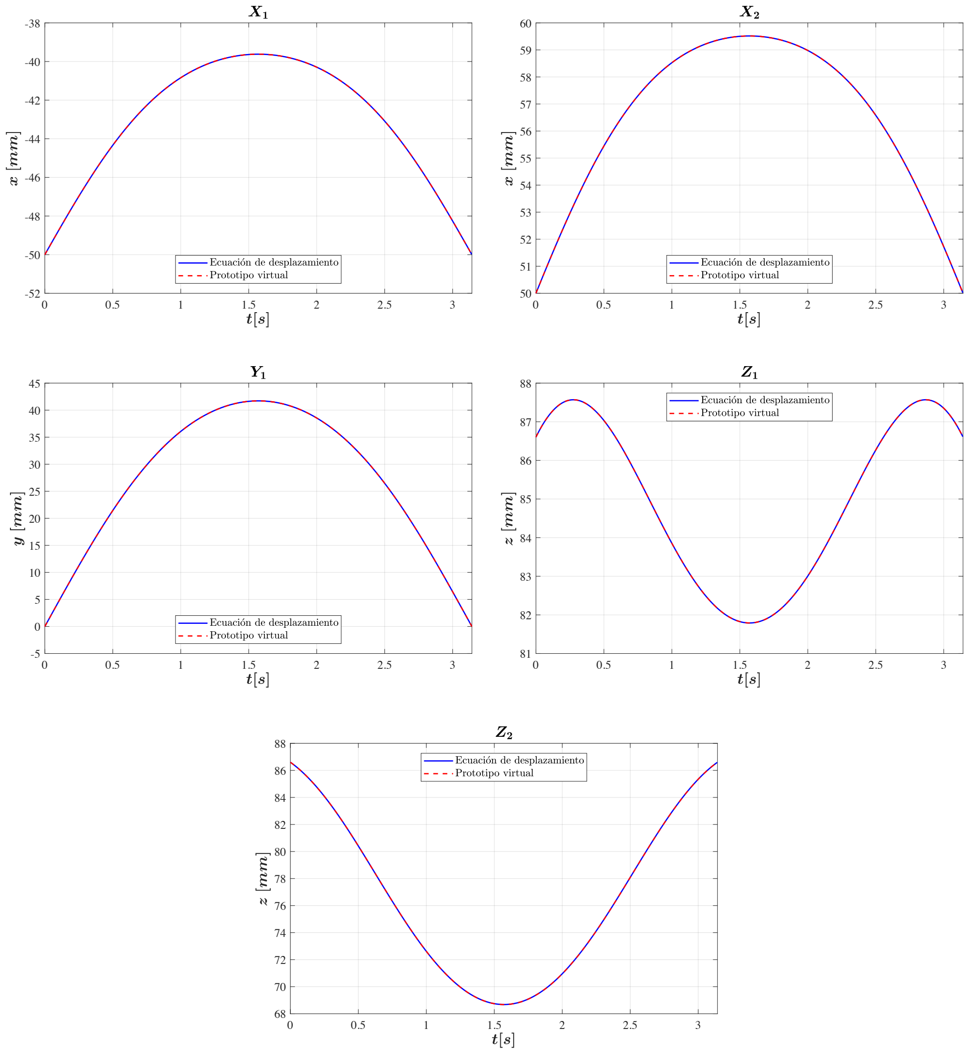


Figura 9.4: Desplazamiento de $\boldsymbol{B}_i$, para Modo 1.

Sol.	X_1	X_2	Y_1	Z_1	Z_2
1	-82.2972	-85.7189	49.5016	27.8703	14.2078
2	-79.2025	-91.1588	37.4519	48.2112	-16.9539
3	101.4898-60.1979i	-101.4899-60.1979i	0.0000+66.6686i	-105.4693-57.9265i	-105.4694+57.9266i
4	101.4898+60.1979i	-101.4899+60.1979i	0.0000-66.6686i	-105.4693+57.9265i	-105.4694-57.9266i
5	-50.0000-1.5857e-07i	50.0000-1.5857e-07i	0.0000+1.4531e-07i	86.6025-9.1552e-08i	86.6025+9.1552e-08i
6	-50.0000+1.5857e-07i	50.0000+1.5857e-07i	0.0000-1.4531e-07i	86.6025+9.1552e-08i	86.6025-9.1552e-08i
7	91.1588	79.2025	-37.4519	-16.9539	48.2112
8	85.7189	82.2972	-49.5016	14.2078	27.8703

Cuadro 9.4: Soluciones de análisis de desplazamiento, Modo 2

Sol.	B_1	B_2	ψ_1°	ψ_2°	ψ_3°
1	(-82.2972, 49.5016, 27.8703)	(-85.7189, -49.5016, 14.2078)	0	-98.0967	-75.9400
2	(-79.2025, 37.4519, 48.2112)	(-91.1588, -37.4519, -16.9539)	0	-131.4929	-79.6032
3	(-50, 0, 86.6025)	(50, 0, 86.6025)	0	0	0
4	(-50, 0, 86.6025)	(50, 0, 86.6025)	0	0	0
5	(91.1588, -37.4519, -16.9539)	(79.2025, 37.4519, 48.2112)	0	131.4929	79.6032
6	(85.7189, -49.5016, 14.2078)	(82.2972, 49.5016, 27.8703)	0	98.0967	75.9400

Cuadro 9.5: Soluciones reales de análisis de desplazamiento, Modo 2

9.3.2. Cinemática inversa

El problema de cinemática inversa consiste en encontrar el desplazamiento de las variables q_i, dadas las coordenadas $\boldsymbol{B}_i$ de la base móvil. Desarrollando las ecuaciones dadas en (9.3.1) y despejando q_1 y q_2 se tiene:

$$q_1 = Z_1 \pm \sqrt{-X_1^2 - 2bX_1 - Y_1^2 - 2cY_1 - b^2 - c^2 + d_1^2} \tag{9.3.21}$$

$$q_2 = Z_2 \pm \sqrt{-X_2^2 + 2bX_2 - {Y_2}^2 - 2cY_2 - b^2 - c^2 + d_2^2}\,, \tag{9.3.22}$$

donde

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}B_i \tag{9.3.23}$$

$\boldsymbol{R}$ es la matriz de rotación sobre sistema de coordenadas global (Figura 9.7) conformada por las matrices de rotación $\boldsymbol{R}_x$, $\boldsymbol{R}_y$ y $\boldsymbol{R}_z$.

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_y\boldsymbol{R}_z\boldsymbol{R}_x \tag{9.3.24}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_x &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi_1) & -\operatorname{sen}(\psi_1) \\ 0 & \operatorname{sen}(\psi_1) & \cos(\psi_1) \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{R}_y &= \begin{bmatrix} \cos(\psi_3) & 0 & \operatorname{sen}(\psi_3) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}(\psi_3) & 0 & \cos(\psi_3) \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{R}_z &= \begin{bmatrix} \cos(\psi_2) & -\operatorname{sen}(\psi_2) & 0 \\ \operatorname{sen}(\psi_2) & \cos(\psi_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{9.3.25}$$

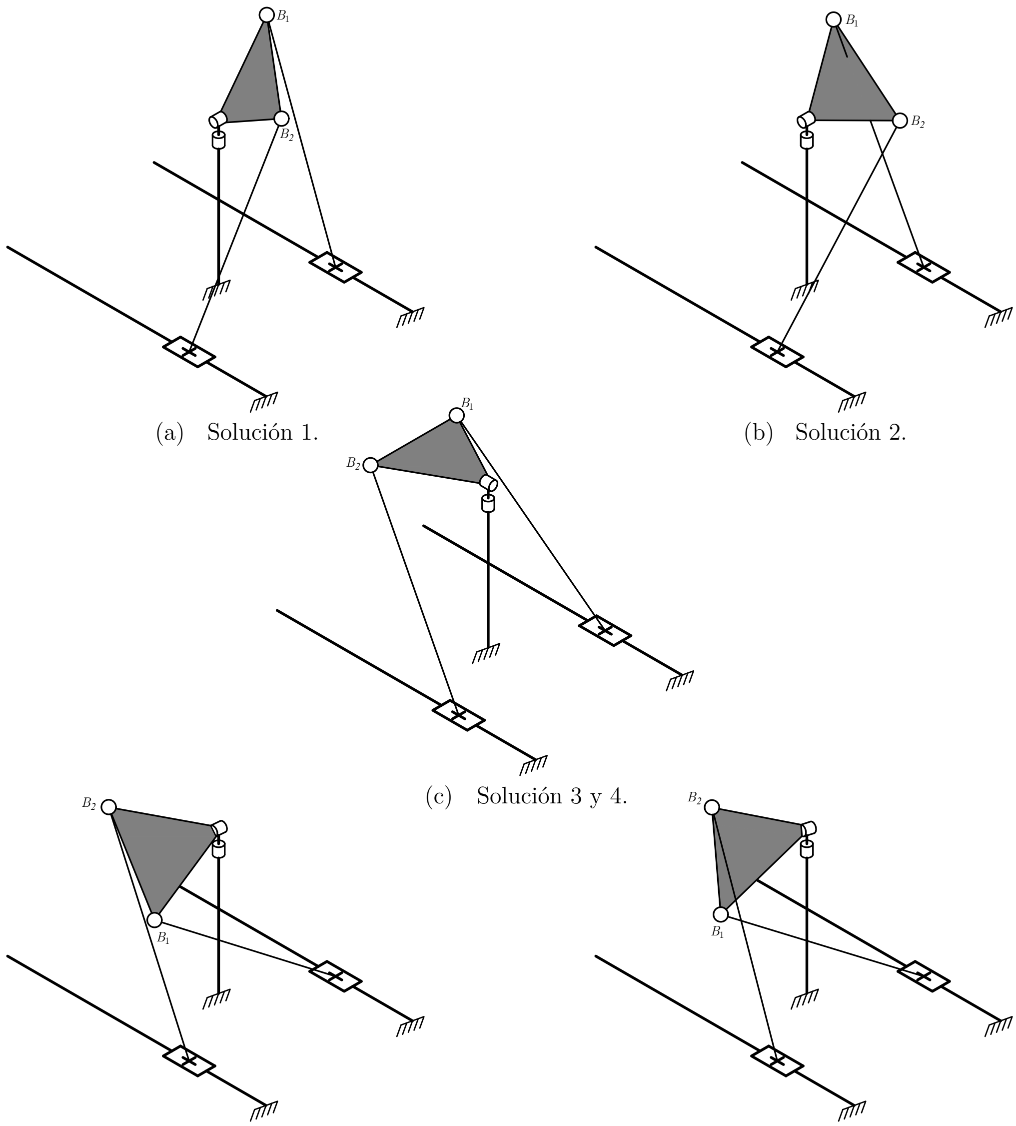
9.4. Teoría de Tornillos

El objetivo principal del estado de velocidad de un cuerpo rígido, respecto a un sistema de referencia, es la determinación de la velocidad de cualquier punto fijo del cuerpo rígido [4]. Un estado de velocidad de un cuerpo rígido b respecto a un cuerpo o sistema de referencia a (Figura 9.8) se representa formalmente como

$${}^a\boldsymbol{V}_O^b = \begin{bmatrix} {}^a\boldsymbol{\omega}^b \\ {}^a\boldsymbol{v}_O^b \end{bmatrix}. \tag{9.4.1}$$

Este estado de velocidad puede expresarse como un tornillo infinitesimal asociado al movimiento como [4]

$${}^a\boldsymbol{V}_O^b = {}_a\omega_b\,{}^a\$^b\,, \tag{9.4.2}$$



(a) Solución 1.

(b) Solución 2.

(c) Solución 3 y 4.

(e) Solución 5.

(d) Solución 6.

Figura 9.5: Soluciones obtenidas de análisis directo de desplazamiento para modo 2

donde

$$ {}^{a}\$^{b} = \begin{bmatrix} {}^{a}\boldsymbol{s}^{b} \\ {}^{a}\boldsymbol{s}_{O}^{b} \end{bmatrix}. \tag{9.4.3}$$

Para el análisis de velocidad de sistemas mecánicos robóticos que se conforman de una secuencia de eslabones, conectados entre sí mediante uniones, que permiten el movimiento relativo de cada dos eslabones consecutivos, donde la mayoría de estas uniones de orden superior pueden modelarse como un conjunto de uniones principales, (unión prismática y revoluta, Figura

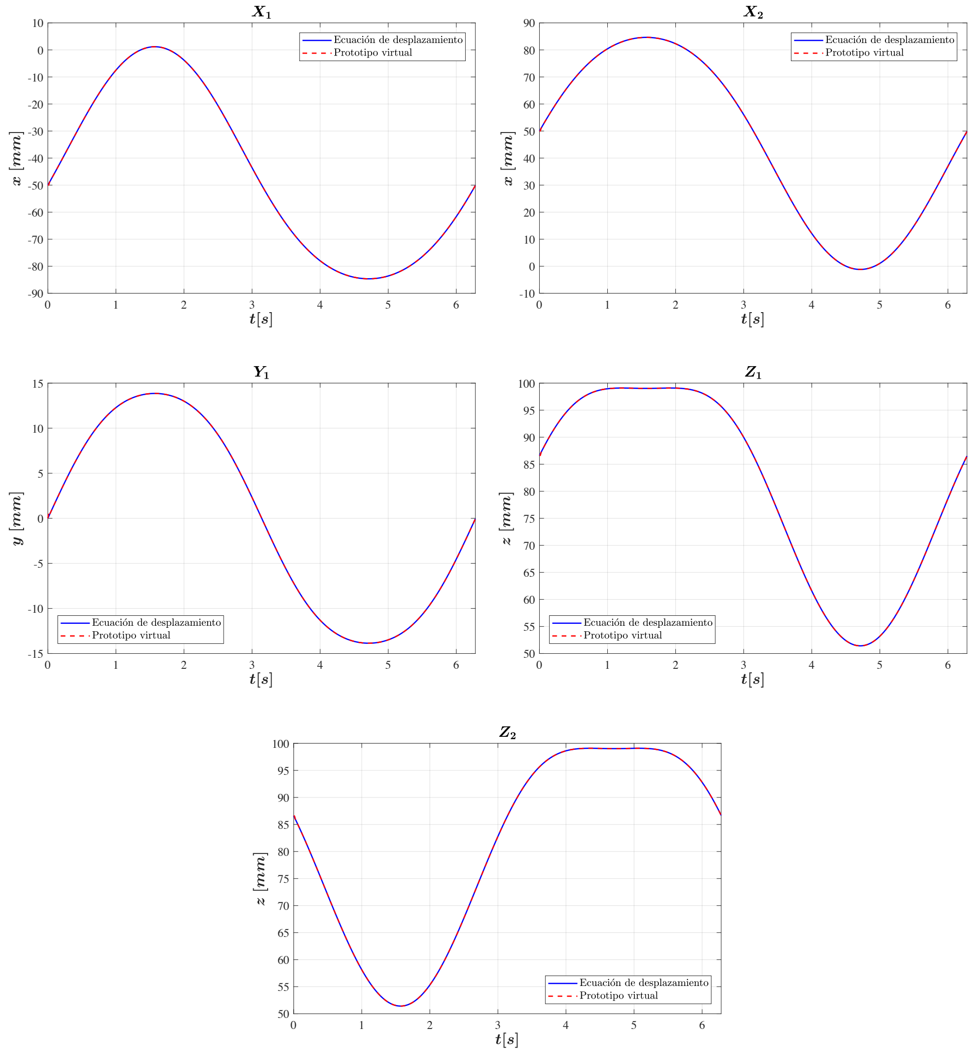


Figura 9.6: Desplazamiento de $\boldsymbol{B}_i$, para modo 2.

9.9), una unión revoluta puede modelarse como un tornillo como, [5]

$$ {}^{a}\$^{b} = \begin{bmatrix} {}^{a}\boldsymbol{s}^{b} \\ {}^{a}\boldsymbol{s}^{b} \times \boldsymbol{r}_{O/P} \end{bmatrix}. \tag{9.4.4} $$

Mientras que una unión prismática puede modelarse como

$$ {}^{a}\$^{b} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ {}^{a}\boldsymbol{s}^{b} \end{bmatrix}, \tag{9.4.5} $$

donde ${}^{a}\boldsymbol{s}^{b}$ es un vector unitario a lo largo de la dirección de la velocidad angular ${}^{a}\boldsymbol{\omega}^{b}$.

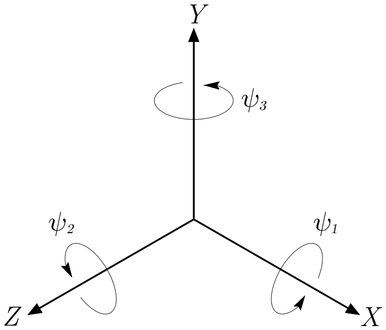


Figura 9.7: Ángulos de rotación sobre sistema de coordenadas global.

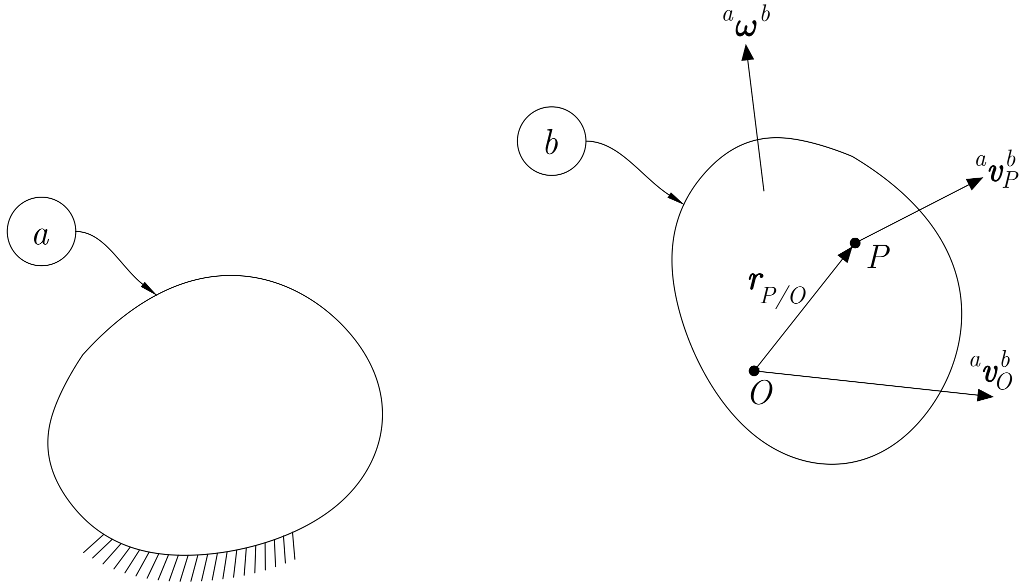


Figura 9.8: Estado de velocidad de un cuerpo rígido b respecto a un cuerpo rígido o sistema de referencia a.

Para el caso de robots paralelos, el estado de velocidad de la plataforma móvil puede representarse a través de cada una de su i-ésima cadena cinemática y n-ésima unión como

$$\boldsymbol{V}_O = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{v}_O \end{bmatrix} = {}_0\omega_1^{i\,0}\$_i^1 + {}_1\omega_2^{i\,1}\$_i^2 + \ldots + {}_{n-1}\omega_n^{i\,n-1}\$_i^n \,. \tag{9.4.6}$$

Tomando como ejemplo un robot paralelo 3-R$\underline{\text{P}}$R (Figura 9.10), obtenido de [5], se puede expresar el estado de velocidad de la plataforma móvil (cuerpo 3) visto desde un cuerpo de referencia fijo (cuerpo 0) como un tornillo

$${}^0\boldsymbol{V}^3 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{v}_O \end{bmatrix} = {}_0\omega_1^{i\,0}\$_i^1 + {}_1\omega_2^{i\,1}\$_i^2 + {}_2\omega_3^{i\,2}\$_i^3, \qquad \text{para cada} i = 1, 2, 3\,, \tag{9.4.7}$$

donde ${}_0\omega_1^{i\,0} = \dot{q}_i$. Para cancelar las velocidades pasivas correspondientes a las uniones revoluta $\boldsymbol{A}_i$ y $\boldsymbol{B}_i$ del robot, se considera una línea en coordenadas de Plücker $\$_i$ con dirección $\boldsymbol{A}_i - \boldsymbol{B}_i$,

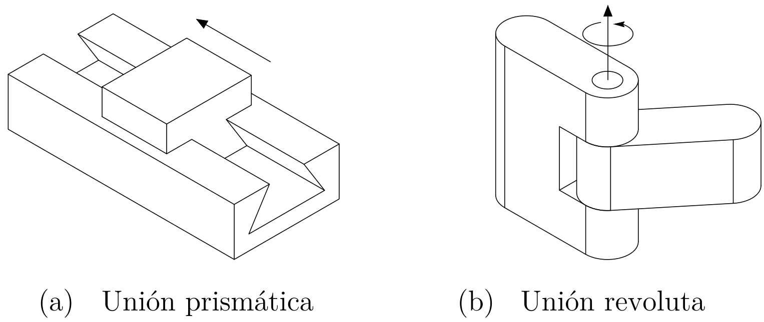


Figura 9.9: Uniones principales.

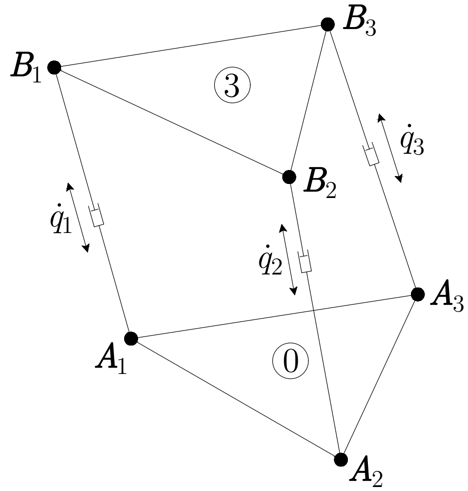


Figura 9.10: Robot paralelo 3-R<u>P</u>R.

aplicando sistemáticamente la forma de Klein se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{ {}^0\boldsymbol{V}^3;\ \$_i \right\} = \dot{q}_i\,, \tag{9.4.8}$$

donde $\{\,;\,\}$ denota la forma de Klein, la cual se define como [5]

$$\{\boldsymbol{V}_1;\ \boldsymbol{V}_2\} = \boldsymbol{\omega}_1 \cdot \boldsymbol{v}_{O_2} + \boldsymbol{\omega}_2 \cdot \boldsymbol{v}_{O_1}\,. \tag{9.4.9}$$

Para completar las ecuaciones necesarias para resolver el análisis de velocidad, se considera que, de acuerdo con la movilidad limitada del manipulador paralelo, se pueden escribir tres expresiones como sigue [6]

$$\{\boldsymbol{V}_O;\ \$_i^r\} = 0\,, \tag{9.4.10}$$

donde

$$\$_1^r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix},\quad \$_2^r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix},\quad \$_3^r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix},$$

mientras que $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{k}$ son vectores unitarios en dirección de los ejes X, Y y Z, respectivamente, del sistema de referencia fijo y $\boldsymbol{0}$ es el vector cero.

Pasando a forma matricial el sistema de ecuaciones conformado por las expresiones (9.4.8) y (9.4.10), la ecuación de entrada-salida de velocidad resulta en

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_O = \boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_v \,, \tag{9.4.11}$$

la matriz $\boldsymbol{A}$ está dada por

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{J}^T \Delta \,,$$

donde $\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \$_1 & \$_2 & \$_2 & \$_1^r & \$_2^r & \$_3^r \end{bmatrix}$ es la matriz Jacabiano global del robot, mientras que Δ es un operador de polaridad de 6×6, el cual está definido como

$$\Delta = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} ,$$

donde $\boldsymbol{I}$ es la matriz identidad de 3×3 y $\boldsymbol{0}$ es una matriz de ceros de 3×3.

Por otro lado $\boldsymbol{B}$ es una matriz identidad de 6×6 y finalmente $\boldsymbol{Q}_v$ se denomina matriz de control de primer orden del robot, la cual está dada por

$$\boldsymbol{Q}_v = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 & \dot{q}_2 & \dot{q}_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T .$$

9.5. Conclusiones

Las ecuaciones para el análisis de desplazamiento se obtienen basándose en condiciones de restricción mecánica de las articulaciones. Se presenta un método para resolver este sistema de ecuaciones usando recursivamente el método de eliminación dialítica de Sylvester, que permite calcular las 8 ubicaciones posibles de la plataforma móvil con respecto a una plataforma fija, mediante el cálculo de las coordenadas de los centros de las dos uniones esféricas de la plataforma móvil, dadas las posiciones de las coordenadas A_1 y A_2. Como se observó utilizando el método de eliminación dialítica de Sylvester se obtienen todas las posibles ubicaciones de la plataforma móvil, además de obtener las soluciones en forma exacta del sistema de ecuaciones. Como trabajos futuros se realizará el análisis de velocidad, aceleración y singularidades utilizando la teoría de tornillo, ya que al aplicar sistemáticamente la forma de Klein permite cancelar las velocidades y aceleraciones pasivas, además de obtener dos sistemas de ecuaciones lineales que relaciona la velocidad y aceleración de la plataforma móvil con las velocidades y aceleraciones de los actuadores, respectivamente.

9.6. Apéndice 1: Solución de sistema de ecuaciones polinomiales

Para resolver el sistema de ecuaciones en forma semi-cerrada se utiliza recursivamente el método de eliminación dialítica de Sylvester. El método de eliminación fue introducido entre 1839 y 1848 por los matemáticos Sylvester, Hesse y Cayley. El método de eliminación dialítica de Sylvester consiste en reducir cualquier sistema de ecuaciones polinomiales en un solo polinomio con una incógnita. El método se conforma de seis pasos [9]:

1. Rescribir cada una de las ecuaciones en forma de polinomio con una incógnita.
2. Considerar las variables de los polinomios como un nuevo sistema de ecuaciones lineales.
3. Generar nuevas ecuaciones linealmente independientes como el número de incógnitas lineales.
4. Igualar el determinante de la matriz de coeficientes a cero para obtener un polinomio en función de la variable eliminada.
5. Encontrar las raíces del polinomio.
6. Sustituir cada una de las raíces dentro del sistema de ecuaciones originales y repetir el proceso.

Eliminación de $\boldsymbol{X_1}$. Para esto se reescriben las ecuaciones (9.3.13) y (9.3.14) de la siguiente forma

$$P_1X_1^2 + P_2X_1 + P_3 = 0\,, \tag{9.6.1}$$

$$P_4X_1^2 + P_5X_1 + P_6 = 0\,, \tag{9.6.2}$$

donde P_j, $j = 1, 2, 3$, son polinomios de segundo grado que dependen de X_2 y Y_1, mientras que P_j, $j = 4, 5, 6$, son polinomios de segundo grado que dependen de Y_1. Para generar dos ecuaciones adicionales, se multiplica (9.6.1) y (9.6.2) por X_1 y se obtiene

$$P_1X_1^3 + P_2X_1^2 + P_3X_1 = 0\,, \tag{9.6.3}$$

$$P_4X_1^3 + P_5X_1^2 + P_6X_1 = 0\,. \tag{9.6.4}$$

Se pueden considerar las ecuaciones (9.6.1), (9.6.2), (9.6.3) y (9.6.4) como cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas: X_1^3, X_1^2, X_1 y 1. Pasando estas ecuaciones a forma matricial se tiene

$$M_1 \begin{bmatrix} X_1^3 \\ X_1^2 \\ X_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\,, \tag{9.6.5}$$

donde

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & P_1 & P_2 & P_3 \\ P_1 & P_2 & P_3 & 0 \\ 0 & P_4 & P_5 & P_6 \\ P_4 & P_5 & P_6 & 0 \end{bmatrix}\,. \tag{9.6.6}$$

La ecuación (9.6.5) tiene una solución si y sólo si $\det(M_1) = 0$, [7], expandiendo $\det(M_1)$ se obtiene

$$P_7X_2^4 + P_8X_2^3 + P_9X_2^2 + P_{10}X_2 + P_{11} = 0\,, \tag{9.6.7}$$

donde P_j, $j = 7, 8, ..., 11$ son polinomios de cuarto grado que dependen de Y_1.

Eliminacion de $\boldsymbol{X_2}$. Para esto se reescribe la ecuación (9.3.15) de la siguiente forma

$$P_{12}X_2^2 + P_{13}X_2 + P_{14} = 0\,, \tag{9.6.8}$$

donde P_j, $j = 12, 13, 14$ son polinomios de segundo grado que dependen de Y_1. Con el fin de evitar soluciones espurias, la derivación de un mínimo de ecuaciones lineales es recomendable, [7], para esto, el término X_2^4 es eliminado de la ecuación (9.6.7) multiplicando por esta ecuación por el término P_{12} y la ecuación (9.6.8) se multiplica por $P_7 X_2^2$, restando ambas ecuaciones la ecuación (9.6.7) queda de la siguiente forma

$$(P_{13}P_7 - P_{12}P_8)\, X_2^3 + (P_{14}P_7 - P_{12}P_9)\, X_2^2 - (P_{12}P_{10})\, X_2 - (P_{12}P_{11}) = 0\,, \tag{9.6.9}$$

la tercera ecuación se obtiene multiplicando (9.6.8) por X_2

$$P_{12}X_2^3 + P_{13}X_2^2 + P_{14}X_2 = 0\,. \tag{9.6.10}$$

La búsqueda de la cuarta ecuación es más elusiva, [7, 9], para ésto se multiplica $P_{12}X_2 + P_{13}$ por la ecuación (9.6.7) y $P_7 X_2^3 + P_8 X_2^2$ por (9.6.8), restando ambas ecuaciones se tiene

$$\begin{aligned}(P_{12}P_9 - P_7P_{14})\, X_2^3 + (P_{12}P_{10} + P_{13}P_9 - P_9P_{14})\, X_2^2 \\ + (P_{12}P_{11} + P_{13}P_{10})\, X_2 + (P_{13}P_{11}) = 0\,. \end{aligned} \tag{9.6.11}$$

Se pueden considerar las ecuaciones (9.6.8), (9.6.9), (9.6.10) y (9.6.11) como cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas: X_2^3, X_2^2, X_2 y 1. Pasando estas ecuaciones a forma matricial se tiene

$$M_2 \begin{bmatrix} X_2^3 \\ X_2^2 \\ X_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{9.6.12}$$

donde

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ (P_{13}P_7 - P_{12}P_8) & (P_{14}P_7 - P_{12}P_9) & -(P_{12}P_{10}) & -(P_{12}P_{11}) \\ P_{12} & P_{13} & P_{14} & 0 \\ (P_{12}P_9 - P_7P_{14}) & (P_{12}P_{10} + P_{13}P_9 - P_9P_{14}) & (P_{12}P_{11} + P_{13}P_{10}) & (P_{13}P_{11}) \end{bmatrix}$$

. La ecuación (9.6.12) tiene una solución si y sólo si $\det(M_2) = 0$, [7], expandiendo $\det(M_2)$ se obtiene

$$P_{15}Y_1^8 + P_{16}Y_1^7 + P_{17}Y_1^6 + P_{18}Y_1^5 + P_{19}Y_1^4 + P_{20}Y_1^3 + P_{21}Y_1^2 + P_{22}Y_1 + P_{23} = 0 \tag{9.6.13}$$

donde de P_j, $j = 15, 16, ..., 23$, son coeficientes constantes que se calculan de acuerdo con los parámetros geométricos del robot, encontrando las raíces del polinomio (9.6.13) se obtienen las soluciones para Y_1, para encontrar X_1 y X_2 se sustituyen las soluciones de Y_1 dentro de las ecuaciones (9.6.2) y (9.6.8), y se obtienen dos soluciones por cada solución de Y_1, para los valores de Z_1 y Z_2 se sustituyen las soluciones de X_1, Y_1 y X_2 dentro de las ecuaciones lineales (9.3.11) y (9.3.12).

Bibliografía

[1] A. Blanco, F. Gómez, L. Vela, and R. Delgado. **A generalized proportional integral controller for an ankle rehabilitation machine based on an XY table**. *Proceedings of 2013 International Conference on Mechatronics, Electronics and Automotive Engineering, ICMEAE 2013*, 152–157, 2013.

[2] L. Chaitow and J. Walker. **Aplicación clínica de las técnicas neuromusculares. Extremidades inferiores (Bicolor)**. *Aplicación clínica de las técnicas neuromusculares*, 2, Paidotribo, 2007.

[3] W. Chunbao, L. Zhijiang, D. Lihong, L. Quanquan, S. Tongyang, L. Zhixiang, L. Weiguang, L. Meng, S. Yajing, S. Qing, W. Yulong, L. Jianjun, W. Jianjun, Q. Jian, and W. Zhengzhi. **Mechanism Design and Control Strategies of an Ankle Robot for Rehabilitation Training**. *In Proceedings of the 6th Annual IEEE International Conference on Cyber Technology in Automation, Control and Intelligent Systems*, 132–137, 2015.

[4] J. Gallardo. ***Análisis Cinemáticos de Orden Superior de Cadenas Espaciales, Mediante el Álgebra de Tornillos, y sus Aplicaciones***. PhD thesis, Instituto Tecnológico de la Laguna, 1999.

[5] J. Gallardo. ***Kinematic Analysis of Parallel Manipulators by Algebraic Screw Theory***. Springer International Publishing, 2016.

[6] J. Gallardo, R. Rodriguez-Castro, L. A. Alcaraz-Caracheo, and F. A. Juarez-Leon. **A parallel manipulator for simulating the ship seakeeping trial**. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering*, Jul, 2018.

[7] J. Gallardo, R. Rodríguez, and M. Islam. **Analytical solution of the forward position analysis of parallel manipulators that generate 3-rs structures**. *Advanced Robotics 22*, 2-3:215–234, 2008.

[8] C. Guzmán, J., Carrera, A. Blanco, M. Oliver, and F. Gómez. **Diseño y control de un sistema interactivo para la rehabilitación de tobillo: Tobibot**. *Ingeniería Mecánica, Tecnología y Desarrollo 5*, 1:255–264, 2014.

[9] T. Lung. ***Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators***. 1st ed. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 1999.

[10] J. Perez, A. Jutinico, J. Campo, F. Escalante, and M. Terra. **Design and analysis of H force control of a series elastic actuator for impedance control of an ankle rehabilitation robotic platform**, *Proceedings of the American Control Conference*, 2423–2428, 2017.

[11] W. Rosado, L. Vela, A. Blanco, J. Ascencio, and C. Beltrán. **Passive Rehabilitation Exercises with an Ankle Rehabilitation Prototype Based in a Robot Parallel Structure**. *IEEE Latin America Transactions 15*, 1:48–56, 2017.

[12] J. Wei, H. Chen, P. Chen, Z. Lu, C. Wei, A. Hou, T. Sun, Q. Liu, W. Li, Z. Lu, et al. **Development of parallel mechanism with six degrees of freedom for ankle rehabilitation**. *Proceedings of International Conference on Advanced Robotics and Mechatronics (ICARM)*, IEEE, 353–358, 2016.

[13] M. Zhang, S. Xie, W. Meng, Z. Guoli, Z. Xiangfeng, H. Xiaolin, and X. Qun. **Robot-Assisted Ankle Rehabilitation for the Treatment of Drop Foot : A Case Study**. *Proceedings of 2016 12th IEEE/ASME International Conference on Mechatronic and Embedded Systems and Applications (MESA)*, 1–5, 2016.