



# UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

## ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS Y APLICACIONES

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE:  
MAESTRA EN MODELACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA:

**LMA. REYNA GUADALUPE PALACIOS CUEVAS**

DIRECTOR DE TESIS:

**DR. FRANCO BARRAGÁN MENDOZA**

CODIRECTOR DE TESIS:

**DR. JESÚS FERNANDO TENORIO ARVIDE**

H. CD. DE HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA  
SEPTIEMBRE DE 2024



## *Dedicatoria*

*A mis padres, Angelina Reyna y José Guadalupe,  
a quienes no me alcanzará la vida entera para agradecerles por creer en mí.*



# Agradecimientos

A mis padres por darme su amor y apoyo incondicional, además de la motivación, el cuidado, la protección y la dedicación que cada día han puesto en mí. Gracias por toda la paciencia y la atención con la que día con día se preocupaban por mi avance y desarrollo de la presente tesis, pero sobretodo por comprender las frecuentes ausencias durante este período. Ustedes han sido y siempre serán mis principales guías, el ejemplo a seguir en muchos aspectos y mi impulso para lograr lo que me proponga. Recuerdo con mucho cariño y nostalgia todas las etapas de mi vida, pero con alegría de saber que siempre estuvieron junto a mí, por lo que no hay día que pase sin agradecer a la vida la oportunidad que me dio de tener unos padres como ustedes. Con la preparación que he obtenido a lo largo de mi carrera profesional, les recompensaré el amor, el esfuerzo y el sacrificio que me han brindado y hasta el final de los días los seguiré amando. Me han otorgado una familia maravillosa, de la que estaré eternamente agradecida. Su hija los adora.

A mi madre Angelina Reyna Cuevas Vásquez por ser mi mejor amiga y compañera de vida. Por estar dispuesta a acompañarme cada larga y agotadora noche de estudio. Eres mi mayor ejemplo de superación y la persona que más admiro. Te agradezco por estar siempre para mí, dándome las palabras adecuadas en los momentos más complicados, además, claro está, por festejar conmigo todas las alegrías; pero más te agradezco por acompañarme incluso en los días más ordinarios, porque justo de esos momentos es de los que se hace la vida. Mi amor por ti es infinito.

A mi padre José Guadalupe Palacios Villa por desear siempre lo mejor para mi vida, por cada uno de tus consejos y por cada una de sus palabras que me han guiado durante mi camino; sobretodo te agradezco por no haber dudado de mí en ningún momento. Somos tan parecidos y tan distintos al mismo tiempo, pero esto sólo ha hecho que con el tiempo te quiera cada día más.

A mi hermano Aldo Méndez Cuevas por haber estado ahí desde el principio, por todo el cariño incondicional que me has brindado a lo largo de mi vida, por nunca dejarme sola y por darme tranquilidad cada vez que lo he requerido. Eres un referente para la persona que quiero llegar a ser, pues tu gran corazón me lleva a admirarte cada día más. Siempre he agradecido a la vida por concederme al mejor de los hermanos.

A mi hermana Beatriz Q.E.P.D. por haber estado siempre al pendiente, aunque no hayamos convivido mucho. Algún día nos volveremos a encontrar.

A Edrei por el apoyo y la comprensión brindada a lo largo de este viaje, por motivarme a seguir siempre adelante y por todas las veces que has escuchado mis problemas y me has ayudado a resolverlos.

A Karina, Alondra, Carlos y Verónica por ser mis amigas, porque no importa cuántas veces les haya contado el mismo problema, siempre han estado para escucharme.

Al Dr. Franco Barragán Mendoza por todo el apoyo y el tiempo invertido en la elaboración de la tesis, por impulsarme a seguir avanzando profesionalmente y motivarme a realizar siempre trabajos de calidad, demostrando que sin constancia y disciplina no se obtiene nada. Su dedicación y empeño en la enseñanza y la promoción de las matemáticas en todas las edades es admirable.

Al Dr. Jesús Fernando Tenorio Arvide por la ayuda brindada en todo momento en la realización de la tesis y por todas las sugerencias para mejorarla; por sus consejos siempre oportunos, pero sin dejar de ser realistas. Su compromiso con la docencia es muy destacable, siendo un claro ejemplo de disciplina y constancia.

A mis revisores el Dr. Virgilio Vásquez Hipólito, el Dr. Sergio Palafox Delgado, el Dr. Armando Romero Morales y la Dra. Anahí Rojas Carrasco, por el tiempo prestado en la lectura de la tesis y por realizar observaciones oportunas y comentarios constructivos que han sido cruciales para la consolidación y enriquecimiento de este trabajo.

A todos los profesores por los conocimientos que me han compartido a lo largo de la licenciatura y la maestría. Particularmente, agradezco al Dr. Salvador Sánchez Perales por motivarme a realizar análisis detallados de cada problema.

A la Universidad Tecnológica de la Mixteca por brindarme todo lo necesario para desarrollarme plenamente en el ámbito académico y por brindar un entorno de convivencia sano. En particular, agradezco a la División de Estudios de Posgrado por proporcionarme las herramientas adecuadas para expandir mis conocimientos y por permitirme continuar con mi formación profesional.

A mis compañeros de la maestría, Israel, David y Cecilia por compartir su tiempo y por su ayuda a lo largo de este camino.

Al CONAHCYT por su generoso apoyo a través de una beca, facilitando así mi camino académico.

Finalmente, a mi laptop DELL, que a pesar que ya debería descansar en paz, sigue afeerándose a la vida.

A cada uno de ustedes, mi más profundo agradecimiento por haber contribuido en este viaje académico.

---

# ÍNDICE GENERAL

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introducción</b>   | <b>IX</b> |
| <b>1. Preliminares</b>                                      | <b>1</b>  |
| 1.1. Notaciones y conceptos básicos . . . . .               | 1         |
| 1.2. Norma de una matriz . . . . .                          | 2         |
| 1.3. Ecuaciones en diferencias . . . . .                    | 4         |
| 1.4. Comportamiento limitante de las soluciones . . . . .   | 8         |
| 1.4.1. Propagación anual de plantas . . . . .               | 17        |
| <b>2. Algunas formas de estabilidad</b>                     | <b>21</b> |
| 2.1. Nociones de estabilidad . . . . .                      | 21        |
| 2.2. Estabilidad 1-dimensional . . . . .                    | 27        |
| 2.3. Estabilidad de sistemas lineales . . . . .             | 38        |
| 2.3.1. Sistemas lineales no autónomos . . . . .             | 38        |
| 2.3.2. Sistemas lineales autónomos . . . . .                | 43        |
| 2.4. Análisis del espacio fase . . . . .                    | 50        |
| 2.5. Método directo o segundo método de Liapunov . . . . .  | 61        |
| 2.6. Estabilidad mediante aproximaciones lineales . . . . . | 78        |
| 2.7. Aplicaciones . . . . .                                 | 87        |
| 2.7.1. Ecuación Logística de Pielou con Retraso . . . . .   | 87        |
| 2.7.2. Una variación del Modelo SI . . . . .                | 89        |

|   |            |
|---|------------|
| 2.7.3. Una especie con dos edades . . . . .   | 91         |
| 2.7.4. Sistemas Huesped-Parasitoides . . . . .  | 94         |
| 2.7.5. Un modelo de ciclo económico . . . . .   | 99         |
| 2.7.6. Estudio del caso del escarabajo de la harina . . . . .   | 102        |
| <b>3. El método de la transformada <math>\mathcal{Z}</math> y ecuaciones en diferencias de Volterra</b> | <b>109</b> |
| 3.1. Definiciones y ejemplos . . . . .  | 110        |
| 3.1.1. Propiedades de la transformada $\mathcal{Z}$ . . . . .   | 114        |
| 3.2. Inversa de la transformada $\mathcal{Z}$ y solución de ecuaciones en diferencias . . . . .         | 124        |
| 3.2.1. Método de series de potencia . . . . .   | 125        |
| 3.2.2. Método de fracciones parciales . . . . .   | 127        |
| 3.2.3. Método de inversión integral . . . . .   | 132        |
| 3.3. Ecuaciones en diferencias de Volterra de tipo convolución: el caso escalar . . . . .               | 134        |
| 3.4. Criterios explícitos para la estabilidad de las ecuaciones de Volterra . . . . .                   | 140        |
| 3.5. Sistemas de Volterra . . . . .   | 144        |
| 3.6. Aplicaciones . . . . .   | 148        |
| 3.6.1. Circuitos eléctricos o una red de escalera . . . . .   | 148        |
| 3.6.2. Desintegración radiactiva . . . . .  | 149        |
| 3.6.3. Función de transferencia . . . . .   | 150        |
| 3.6.4. Un modelo epidémico . . . . .  | 156        |
| <b>4. Teoría de oscilación</b>  | <b>159</b> |
| 4.1. Ecuaciones en diferencias de tres términos . . . . .   | 159        |
| 4.2. Ecuaciones de segundo orden autoadjuntas . . . . .   | 165        |
| 4.2.1. Transformaciones de Riccati . . . . .  | 168        |
| 4.3. Ecuaciones en diferencias no lineales . . . . .  | 174        |
| 4.4. Aplicación . . . . .   | 176        |
| 4.4.1. Ecuación logística de Pielou con retraso . . . . .   | 176        |
| <b>Conclusiones</b>   | <b>179</b> |
| <b>Referencias</b>  | <b>180</b> |



---

# INTRODUCCIÓN

Las computadoras que utilizamos a diario, la dinámica de la población de ciertas especies, el comportamiento de fenómenos económicos, los microprocesadores y microcontroladores, entre otros, funcionan en tiempo discreto o bien, requieren la discretización de parámetros continuos como el tiempo, la frecuencia, la temperatura, etc [17]. Por todo lo anterior, es necesario utilizar los sistemas dinámicos discretos.

La teoría moderna de sistemas dinámicos, tanto continuos como discretos, es relativamente reciente. Comenzó en la última parte del siglo XIX, principalmente debido al trabajo de Henri Poincaré, quien introdujo el concepto de sistemas dinámicos en su trabajo sobre las ecuaciones diferenciales, conocido como “mapa de retorno de Poincaré”, el cual es una herramienta poderosa en su enfoque cualitativo hacia el estudio de ecuaciones diferenciales [1]. Además, publicó dos monografías: “Nuevos métodos de mecánica celeste” en 1892-1899 y “Conferencias sobre mecánica celeste” en 1905-1910 [21]. Con todo esto, se establecieron las bases para el estudio de los sistemas dinámicos continuos. Más tarde, en el siglo XX, Birkhoff (1927) también hizo importantes contribuciones a los sistemas dinámicos al mostrar cómo se podían usar los mapas discretos para comprender el comportamiento global de los sistemas de ecuaciones diferenciales [10]. Sin embargo, uno de los primeros trabajos formales en el ámbito discreto se realizó hasta 1940, cuando John von Neumann y Stanislaw Ulam desarrollaron la teoría de los autómatas celulares [28], que son considerados como sistemas dinámicos discretos con una estructura espacial discreta. Adicionalmente, en 1972 Stephen Smale estableció la conexión entre sistemas dinámicos discretos y topología, desarrollando la teoría de los sistemas dinámicos topológicos [6]. A finales del siglo XX, Ali H. Nayfeh introdujo la aplicación de la dinámica no lineal a los sistemas mecánicos y de Ingeniería [21].

Un sistema dinámico es cualquier modelo matemático que describe el estado de un sistema en el tiempo. Por ejemplo, los modelos matemáticos que describen la oscilación del péndulo simple, el flujo del agua en el tubo, el número de habitantes de la población en una metrópolis, etc. son sistemas dinámicos [10]. En esta tesis, presentamos sistemas dinámicos donde el estado del sistema evoluciona en pasos de tiempo discretos, es decir,

---

sistemas dinámicos discretos. Cuando modelamos un sistema como un sistema dinámico discreto, imaginamos que tomamos una fotografía del sistema en una sucesión de momentos. Dichas fotografías podrían ser tomadas una vez al año, una vez cada milisegundo, o incluso de manera irregular, como una vez cada vez que se elige un nuevo gobierno. Al tomar estas fotografías, la idea es registrar cualquier variable que determine el estado en el que se encuentra el sistema. Para completar la descripción del sistema dinámico, necesitamos especificar una regla que determine, dada una “fotografía inicial”, cuál debe ser la sucesión resultante de “fotografías futuras”. Las aplicaciones se usan ampliamente en la vida cotidiana, ya que pueden servir para pronosticar la población en el futuro, e incluso ser capaz de responder algunas preguntas interesantes sobre la población en el pasado, entre otras cosas. Ejemplos sencillos de la aplicación de sistemas dinámicos discretos son el modelo de mapeo logístico, el modelo de Beverton-Holt y el mapeo logístico con el efecto Allee [21].

En cuanto al análisis de estabilidad de los sistemas dinámicos discretos se refiere, en los trabajos realizados por Poincaré mencionados con anterioridad, ya se había realizado análisis cualitativo a los sistemas dinámicos continuos. Sin embargo, fue a partir de principios del siglo XX, que se le empezó a dar importancia al análisis de la estabilidad de los sistemas dinámicos discretos, esto mediante el trabajo de Aleksandr Liapunov sobre la teoría de la estabilidad, que enfatiza la evaluación cuantitativa de la tasa de divergencia entre soluciones con diferentes condiciones iniciales [2].

Una herramienta útil para analizar los sistemas dinámicos discretos es la transformada  $\mathcal{Z}$ , que se considera como la generalización de la transformada de Fourier en tiempo discreto. Las características esenciales de la transformación  $\mathcal{Z}$  se remontan a principios del siglo XVIII (1730) cuando De Moivre introdujo el concepto de función generadora que es idéntico al de la transformada  $\mathcal{Z}$ . Las aplicaciones de la transformación  $\mathcal{Z}$  son relativamente nuevas.

Es fundamental realizar un análisis de estabilidad de los sistemas dinámicos discretos debido a que esto permite entender cómo evolucionan estos sistemas conforme avanza el tiempo, en este caso discreto. También, permite determinar y clasificar el tipo de equilibrio del sistema dinámico discreto, lo que puede servir para predecir su comportamiento futuro.

Con el paso de los años y con las nuevas investigaciones se han abierto nuevas oportunidades para utilizar modelos discretos en una amplia gama de campos, tales como Criptografía, Redes Neuronales, Biología, Genética, Física, Epidemiología, Finanzas, Economía, Ingeniería, entre otras. Por lo que puede decirse que esta área sigue en ascendencia y podría desarrollarse más teoría, lo que llevaría a nuevos descubrimientos y avances en el conocimiento.

En el área de Economía hay diversos problemas que requieren de la utilización de variables económicas a intervalos fijos de tiempo, por lo que se dice que el tiempo es de carácter discreto y es necesaria la utilización de los sistemas dinámicos discretos para expresar el comportamiento de dichas variables.

Otra área en la que es común utilizar los sistemas dinámicos discretos es la Ingeniería, principalmente en la rama que estudia el control de determinados sistemas, ya que los

modelos discretos que se ocupan, permiten capturar la dinámica y los comportamientos de los mismos, lo que facilita la toma de decisiones y la implementación del control que mejor se adecúe a las necesidades de estos sistemas.

Adicionalmente, en Biología, los sistemas dinámicos discretos se han utilizado para modelar y simular procesos de evolución de ciertas especies, interacción entre especies, propagación de enfermedades, entre otros.

En el presente trabajo de tesis exponemos lo referente al estudio, comportamiento y clasificación de los sistemas dinámicos discretos haciendo énfasis en el análisis de la estabilidad, así como de algunas herramientas que son útiles para el estudio de los mismos, como son el método directo de Liapunov, la transformada  $\mathcal{Z}$  y las ecuaciones en diferencias de Volterra, que se emplean en el análisis de la teoría de oscilación. Adicionalmente, estudiamos su aplicación en la deducción y planteamiento de algunos modelos en Economía, Ingeniería y Biología, realizando un análisis de estabilidad dependiendo de su clasificación mediante las ecuaciones en diferencias que utilicen, enfatizando tanto la parte matemática como en los conceptos necesarios para una adecuada comprensión de los modelos mencionados. Para la teoría referente a sistemas dinámicos discretos, nuestra referencia principal fue [11].

Para lograr tales objetivos, el trabajo de tesis lo hemos organizado como se indica a continuación.

En el Capítulo 1 proporcionamos las notaciones y conceptos básicos que son necesarios para el buen desarrollo y entendimiento de los resultados que se analizan durante el trabajo. Adicionalmente, proporcionamos definiciones referentes a las ecuaciones en diferencias que son necesarias durante todo el desarrollo de la tesis. Después, se estudia la teoría de oscilación de una ecuación en diferencias de segundo orden, ya que esto es útil en el Capítulo 4 y para terminar se analiza un modelo del ciclo de propagación de una especie vegetal.

Posteriormente, en el Capítulo 2 iniciamos con el estudio de algunas nociones de estabilidad. Analizamos la estabilidad 1-dimensional, para pasar al caso general, en el que se examina la parte cualitativa de diversos tipos de sistemas de ecuaciones en diferencias a través del análisis de criterios de estabilidad. Además, revisamos cómo hacer el análisis del espacio fase, que es un método en el que podemos ver gráficamente cómo es la estabilidad de determinado sistema. Después, proporcionamos definiciones pertinentes para entender el método directo de Liapunov, que es otra forma de realizar el análisis de estabilidad. Finalizamos este capítulo proporcionando algunos modelos en Economía y Biología: Ecuación logística de Pielou con retraso de un período, una variación del modelo SI, una especie con dos edades, sistemas huésped-parasitoides (particularmente, el modelo de Nicholson-Bailey), un modelo de ciclo económico y el estudio del caso del escarabajo de la harina.

La transformada  $\mathcal{Z}$  y las ecuaciones en diferencias de Volterra son analizadas en el Capítulo 3. Este capítulo se inicia con el estudio de la transformada  $\mathcal{Z}$ ; aquí presentamos algunas de sus propiedades tales como linealidad, desplazamiento en el tiempo, convolución, entre otras. Luego, examinamos métodos para obtener la inversa de la transformada

---

$\mathcal{Z}$  y se agrega una tabla útil que muestra la transformada  $\mathcal{Z}$  de funciones fundamentales con la correspondiente inversa. También estudiamos las ecuaciones en diferencias de Volterra, particularmente las que son de tipo convolución, algunos criterios explícitos para analizar su estabilidad y analizamos de forma breve los sistemas de Volterra. Para la aplicación de la parte teórica de este capítulo, se proporcionan modelos en Ingeniería y Biología: Una red de escalera, desintegración radiactiva, función de transferencia y un modelo epidémico.

El Capítulo 4 lo dedicamos a estudiar la teoría de oscilación, enfocándonos en las ecuaciones en diferencias de tres términos, ecuaciones en diferencias de segundo orden autoadjuntas y un breve análisis de ecuaciones en diferencias no lineales para después utilizar esta teoría analizando nuevamente la ecuación logística de Pielou, pero con un retraso de  $k$  períodos.

# Análisis de estabilidad de sistemas dinámicos discretos y aplicaciones

Reyna Guadalupe Palacios Cuevas

Septiembre de 2024



---

---

# CAPÍTULO 1

---

## PRELIMINARES

En este capítulo se proporcionan los conceptos básicos que utilizamos a lo largo de la tesis. En el análisis de estabilidad de las ecuaciones en diferencias es necesario estudiar conceptos previos como el comportamiento de las soluciones de ecuaciones en diferencias de orden superior y lo referente a la norma de una matriz, entre otros temas. Por ahora, introducimos los conceptos básicos y fundamentales que nos ayudan a comprender el contenido de nuestro trabajo.

### 1.1. Notaciones y conceptos básicos

Como es usual  $\mathbb{N}$  denota el conjunto de los números naturales,  $\mathbb{Z}$  el conjunto de los números enteros,  $\mathbb{Z}_+$  el conjunto de los números enteros no negativos y  $\mathbb{R}$  el conjunto de los números reales. Dados dos conjuntos  $X$  y  $Y$ , una función de  $X$  en  $Y$  la denotamos por  $f : X \rightarrow Y$ . Particularmente, dados un conjunto  $X$ , una función  $f : X \rightarrow X$  y  $n \in \mathbb{Z}_+$ , la  $n$ -ésima iteración de  $f$  se define como la composición reiterada de  $f$  consigo misma  $n$  veces y la denotamos por  $f^n$ , donde  $f^1 = f$  y  $f^0 = id_X$  (identidad en  $X$ ). Si  $B \subseteq X$ , denotamos por  $f^k(B)$  la imagen de  $B$  bajo  $f^k$ , cuando  $k \geq 0$ , y la preimagen bajo  $f^{|k|}$  cuando  $k < 0$ . Dada una matriz  $A$ ,  $A^n$  denota el producto de dicha matriz consigo misma  $n$  veces y  $A^0 = I$ , además  $A^T$  representa la matriz transpuesta de  $A$ . Para  $k \in \mathbb{N}$  y  $\gamma > 0$ , la *bola abierta en  $\mathbb{R}^k$*  de radio  $\gamma$  y centrada en  $x$  se denota por  $B(x, \gamma)$  y está definida como  $B(x, \gamma) = \{y \in \mathbb{R}^k : \|y - x\| < \gamma\}$ . Por simplicidad, la bola  $B(0, \gamma)$  la denotamos como  $B(\gamma)$ . Para un subconjunto  $G \subset \mathbb{R}^k$ ,  $x$  es un *punto de acumulación de  $G$*  si existe una sucesión  $\{x_i\}$  en  $G$  tal que  $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x$ . La *cerradura de  $G$*  se denota por  $\overline{G}$  y define como la unión de  $G$  y todos sus puntos de acumulación. El *conjunto de todos los puntos de acumulación de  $x_0$* , se denota por  $\Omega(x_0)$  y se define como  $\Omega(x_0) = \{y \in \mathbb{R}^k : \lim_{n_i \rightarrow \infty} x(n_i) = y \text{ para alguna subsucesión } \{n_i\} \text{ de } \mathbb{Z}^+\}$ .

## 1.2. Norma de una matriz

**Definición 1.2.1.** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre un campo  $F$ . La función  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  es conocida como *norma*, si para cada  $x, y \in V$  y  $\alpha \in F$ , se cumplen las condiciones siguientes:

- (a)  $\|x\| \geq 0$ .
- (b)  $\|x\| = 0$  si y sólo si  $x = 0$ .
- (c)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ .
- (d)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

**Definición 1.2.2.** Sean  $p \in \mathbb{R}$  con  $p \geq 1$  y  $k \in \mathbb{N}$ . La función  $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  es conocida como *norma  $p$*  y se define de la forma siguiente:

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^k |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para cada } x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k.$$

**Observación 1.2.3.** Sean  $k \in \mathbb{N}$  y  $x \in \mathbb{R}^k$  tales que  $x = (x_1, \dots, x_k)$ . En  $\mathbb{R}^k$  las normas más utilizadas son las siguientes:

- (a) La *norma 1*, denotada y definida por:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^k |x_i|.$$

- (b) La *norma 2* o *norma Euclidiana*, denotada y definida por:

$$\|x\|_2 = \left( \sum_{i=1}^k |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- (c) La *norma  $\infty$* , denotada y definida por:

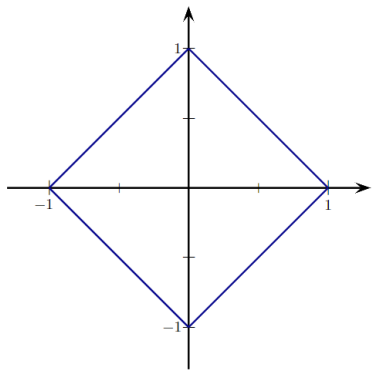
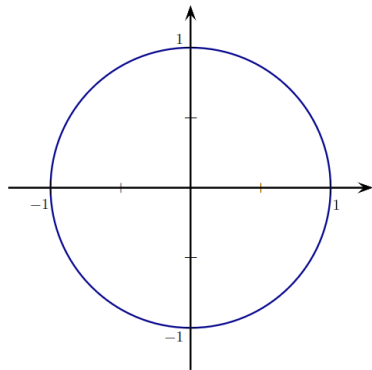
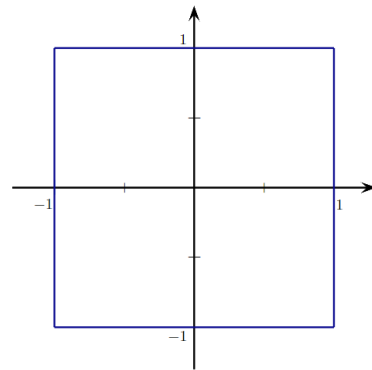
$$\|x\|_\infty = \text{máx}\{|x_i| : 1 \leq i \leq k\}.$$

En las Figuras 1.1, 1.2 y 1.3, mostramos cómo son las esferas en  $\mathbb{R}^2$ , con centro en el origen y radio 1.

**Observación 1.2.4.** Todas las normas en un espacio normado de dimensión finita son equivalentes. En otras palabras, si  $\|\cdot\|$  y  $\|\cdot\|'$  son normas en un espacio normado de dimensión finita  $V$ , entonces existen constantes  $\alpha, \beta > 0$  tales que:

$$\alpha\|x\| \leq \|x\|' \leq \beta\|x\|, \quad \text{para cada } x \in V.$$



Figura 1.1:  $\|x\|_1 = 1$ .Figura 1.2:  $\|x\|_2 = 1$ .Figura 1.3:  $\|x\|_\infty = 1$ .

*Demostración.* Sean  $\|\cdot\|$  y  $\|\cdot\|'$  normas en un espacio normado de dimensión finita  $V$ . Veamos que existen constantes  $\alpha, \beta > 0$  tales que  $\alpha\|x\| \leq \|x\|' \leq \beta\|x\|$ , para cada  $x \in V$ . Consideremos la esfera unitaria cerrada bajo la norma  $\|\cdot\|$ , es decir, el conjunto siguiente:

$$S = \{x \in V : \|x\| = 1\}.$$

Como  $S$  es compacto y  $\|\cdot\|'$  es continua, se tiene que esta función alcanza su máximo y su mínimo en  $S$ . Pongamos  $\beta = \max\{\|x\|' : x \in S\}$  y  $\alpha = \min\{\|x\|' : x \in S\}$ . Notemos que  $\alpha, \beta > 0$ , por ser normas. De aquí, dado  $x \in V \setminus \{0\}$ , definimos  $y = \frac{\|x\|}{x}$ , luego  $\|y\| = \|\frac{\|x\|}{x}\| = \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1$ . Así,  $y \in S$  y por la definición de  $\alpha$  y  $\beta$ , se tiene que  $\alpha \leq \|y\|' \leq \beta$ . Sustituyendo  $z$ , obtenemos:

$$\alpha \leq \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\|' \leq \beta.$$

Por lo tanto,  $\alpha\|x\| \leq \|x\|' \leq \beta\|x\|$ , para cada  $x \in V$ . ■

Así, para cada sucesión  $\{x_n\} \subseteq V$  y  $z \in \mathbb{R}$ , se cumple que  $\|x_n\| \rightarrow z$  si y sólo si  $\|x_n\|' \rightarrow z$ .

**Definición 1.2.5.** Sean  $k \in \mathbb{N}$  y  $A \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{R})$ . La *norma matricial subordinada* de  $A$  inducida por una norma  $\|\cdot\|$  en  $\mathbb{R}^k$ , se denota y define de la forma siguiente:

$$\|A\| = \max \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} : x \in \mathbb{R}^k \text{ y } \|x\| \neq 0 \right\}.$$

Por la Definición 1.2.5, el espacio  $\mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{R})$  es un espacio normado.

**Observación 1.2.6.** Sean  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{R})$  y  $x \in \mathbb{R}^k$ . Se tiene que:

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|. \quad (1.2.1)$$

**Observación 1.2.7.** Sean  $k \in \mathbb{N}$  y  $A \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{R})$ . Se tiene que:

$$\|A\| = \max \{ \|Ax\| : x \in \mathbb{R}^k \text{ y } \|x\| \leq 1 \} = \max \{ \|Ax\| : x \in \mathbb{R}^k \text{ y } \|x\| = 1 \}.$$

**Definición 1.2.8.** Sean  $k \in \mathbb{N}$  y  $A \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{R})$ . El *radio espectral* de  $A$ ,  $\rho(A)$ , se define de la forma siguiente:

$$\rho(A) = \text{máx} \{ |\lambda| : \lambda \text{ es un valor propio de } A \}.$$

**Definición 1.2.9.** Sean  $k \in \mathbb{N}$  y  $A \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{R})$ . Se definen las siguientes normas para  $A$ :

- (a) La norma 1:  $\|A\|_1 = \text{máx} \left\{ \sum_{i=1}^k |a_{ij}| : 1 \leq j \leq k \right\}$ .
- (b) La norma 2 o norma Euclidiana:  $\|A\|_2 = [\rho(A^T A)]^{\frac{1}{2}}$ .
- (c) La norma  $\infty$ :  $\|A\|_\infty = \text{máx} \left\{ \sum_{j=1}^k |a_{ij}| : 1 \leq i \leq k \right\}$ .

**Observación 1.2.10.** Sea  $k \in \mathbb{N}$ . Para cada  $A, B \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{R})$ , se cumple:

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

*Demostración.* Sean  $k \in \mathbb{N}$  y  $A, B \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{R})$ . Por la Observación 1.2.6, se tiene que:

$$\|ABx\| = \|A(Bx)\| \leq \|A\| \|Bx\| \leq \|A\| \|B\| \|x\|.$$

Así,  $\frac{\|ABx\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|B\|$ . De donde,  $\|A\| \|B\|$  es cota superior de  $\left\{ \frac{\|ABx\|}{\|x\|} : x \in \mathbb{R}^k \text{ y } \|x\| \neq 0 \right\}$ . Esto implica que  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ . ■

**Observación 1.2.11.** Sean  $k \in \mathbb{N}$  y  $A \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{R})$ . Se cumple que  $\rho(A) \leq \|A\|$ .

*Demostración.* Pongamos  $\rho(A) = |\lambda|$  tal que  $\lambda$  es un valor propio de  $A$ . Se sigue que:

$$\begin{aligned} \|A\| &= \text{máx} \{ \|Ax\| : x \in \mathbb{R}^k \text{ y } \|x\| = 1 \} \\ &\geq \text{máx} \{ \|Ax\| : x \in \mathbb{R}^k, \|x\| = 1 \text{ y } Ax = \lambda x \} \\ &= \text{máx} \{ \|\lambda x\| : x \in \mathbb{R}^k, \|x\| = 1 \text{ y } Ax = \lambda x \} \\ &= \text{máx} \{ |\lambda| \|x\| : x \in \mathbb{R}^k, \|x\| = 1 \text{ y } Ax = \lambda x \} \\ &= |\lambda| \text{máx} \{ \|x\| : x \in \mathbb{R}^k, \|x\| = 1 \text{ y } Ax = \lambda x \} \\ &= \rho(A). \end{aligned}$$

Así, queda probada la afirmación. ■

### 1.3. Ecuaciones en diferencias

En esta sección, mencionamos algunos conceptos referentes a la teoría de ecuaciones en diferencias. Para más detalle consultar la tesis de licenciatura [19].

El conjunto de funciones de  $\mathbb{Z}$  en  $\mathbb{R}$  lo denotamos por  $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ , esto es:

$$\mathcal{S}(\mathbb{Z}) = \{x|x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

Adicionalmente, el conjunto de funciones de  $\mathbb{Z}_+$  en  $\mathbb{R}$  es denotado por  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ , es decir:

$$\mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) = \{x|x : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

Notar que  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  es un subespacio vectorial de  $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ , con las operaciones usuales.

**Definición 1.3.1.** El *operador diferencia* se denota por  $\Delta : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  y se define como:

$$\Delta(x) = \Delta x, \text{ para cada } x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+),$$

donde  $\Delta x$  es la función diferencia de  $x$  [19, pág. 4], es decir,  $\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ .

**Proposición 1.3.2.** Sean  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$  y  $\Delta : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  el operador diferencia. Se cumple que, para cada  $k \in \mathbb{N}$ :

$$\Delta^k x(n) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} x(n+k-i).$$

**Definición 1.3.3.** Sean  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  y  $k \in \mathbb{N}$ . Una *ecuación en diferencias* determinada por  $x$  es una relación entre la variable  $n$ , la función  $x$  y una o más de sus diferencias  $\Delta x$ ,  $\Delta^2 x$ ,  $\dots$ ,  $\Delta^k x$ . Tal relación generalmente se expresa de manera explícita como:

$$G(\Delta^k x(n), \Delta^{k-1} x(n), \dots, \Delta x(n), x(n), n) = 0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \quad (1.3.1)$$

donde  $G : \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  es alguna función real.

Notemos que toda ecuación en diferencias (1.3.1) se puede expresar de la siguiente manera, y viceversa:

$$F(x(n+k), x(n+k-1), \dots, x(n-1), x(n), n) = 0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \quad (1.3.2)$$

donde  $F : \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  es alguna función real.

**Definición 1.3.4.** La ecuación en diferencias de orden  $k$ , (1.3.2), se dice que es *normal* si existe alguna función real  $f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

$$x(n+k) = f(x(n+k-1), \dots, x(n-1), x(n), n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \quad (1.3.3)$$

**Definición 1.3.5.** Decimos que la ecuación en diferencias de orden  $k$  (1.3.3) es *lineal* si la función  $f$  es lineal.

En general, las ecuaciones en diferencias se pueden clasificar según su orden, propiedades de la función  $f$  (lineal, no lineal, entre otras), homogeneidad y de acuerdo a si son o no autónomas (tipo de coeficientes).

**Definición 1.3.6.** Sea  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ . Se dice que  $u$  es una *solución* de la ecuación en diferencias (1.4.3), si al reemplazar dicha función y sus diferencias en la ecuación, se obtiene una identidad, es decir:

$$F(u(n+k), u(n+k-1), \dots, u(n-1), u(n), n) = 0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

**Definición 1.3.7.** Sean  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función,  $x^* \in A$  y  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ . Se dice que  $x^*$  es un *punto de equilibrio* de  $x(n+1) = f(x(n))$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ , o bien, que  $x^*$  es un *punto fijo* de  $f$  si  $f(x^*) = x^*$ .

**Definición 1.3.8.** Sean  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función y  $x^* \in A$  un punto de equilibrio de  $x(n+1) = f(x(n))$ . Se dice que  $x^*$  es:

- (a) *Estable* si para cada  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para cada  $x_0 \in A$ , si  $|x_0 - x^*| < \delta$ , entonces  $|x(n) - x^*| < \epsilon$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Si  $x^*$  no es estable, se dice que es *inestable*.
- (b) *Atractor* si existe  $\eta > 0$  tal que para cada  $x_0 \in A$ , si  $|x_0 - x^*| < \eta$ , entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = x^*.$$

Si  $\eta = \infty$ ,  $x^*$  es llamado *atractor global*.

- (c) *Repulsor* si existe  $\eta > 0$  tal que para cada  $x_0 \in A$ , si  $|x_0 - x^*| < \eta$ , entonces existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $|x(m) - x^*| \geq \eta$ .
- (d) *Asintóticamente estable* si es estable y atractor. Si  $\eta = \infty$ , se dice que  $x^*$  es *asintóticamente estable global*.

**Observación 1.3.9.** Sean  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  y  $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ . Una ecuación en diferencias lineal no homogénea de orden  $k$  es de la forma siguiente:

$$x(n+k) + p_1(n)x(n+k-1) + \dots + p_k(n)x(n) = g(n), \quad (1.3.4)$$

para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$  con  $n \geq n_0$ ,  $p_i \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ , para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  y  $p_k(n) \neq 0$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$  tal que  $n \geq n_0$ .

La correspondiente ecuación en diferencias homogénea de (1.3.4) se obtiene cuando  $g(n) = 0$ , para cada  $n \geq n_0$ . Esto es:

$$x(n+k) + p_1(n)x(n+k-1) + \dots + p_k(n)x(n) = 0.$$

**Definición 1.3.10.** Un *sistema de ecuaciones en diferencias de primer orden* es un conjunto de ecuaciones en diferencias que tiene la forma siguiente:

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= f_1(x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n), n) \\ x_2(n+1) &= f_2(x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n), n) \\ &\vdots \\ x_k(n+1) &= f_k(x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n), n), \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

donde  $f_i : \mathbb{R}^k \times \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , es una función conocida y para cada  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $x_i \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  es una función desconocida.

Las funciones  $f_i$  en (1.3.5) pueden ser lineales o no lineales.

**Observación 1.3.11.** Dado  $k \in \mathbb{N}$ , un sistema de ecuaciones en diferencias lineales de primer orden,  $k \times k$ , tiene la forma siguiente:

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= a_{11}(n)x_1(n) + a_{12}(n)x_2(n) + \cdots + a_{1k}(n)x_k(n) + g_1(n) \\ x_2(n+1) &= a_{21}(n)x_1(n) + a_{22}(n)x_2(n) + \cdots + a_{2k}(n)x_k(n) + g_2(n) \\ &\vdots \\ x_k(n+1) &= a_{k1}(n)x_1(n) + a_{k2}(n)x_2(n) + \cdots + a_{kk}(n)x_k(n) + g_k(n), \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

donde  $a_{ij}, g_i \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  son funciones conocidas, para cada  $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

**Definición 1.3.12.** Considerando el sistema (1.3.6), se tiene que:

1. Si para cada  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  y para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ ,  $g_i(n) = 0$ , se dice que (1.3.6) es un *sistema de ecuaciones en diferencias homogéneo*.
2. Si existe  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , tal que  $g_i(n) \neq 0$ , para algún  $n \in \mathbb{Z}_+$ , se dice que (1.3.6) es un *sistema de ecuaciones en diferencias no homogéneo*.
3. Si para cada  $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $a_{ij}$  son constantes, se dice que (1.3.6) es un *sistema de ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes*.

Usando notación matricial, un sistema de ecuaciones en diferencias lineales no homogéneo (1.3.6), se puede expresar de la manera siguiente:

$$x(n+1) = A(n)x(n) + g(n), \quad (1.3.7)$$

donde  $x(n+1) = (x_1(n+1), x_2(n+1), \dots, x_k(n+1))^T$ ,  $A(n) = (a_{ij}(n))$  es la matriz no singular de  $k \times k$  formada con los coeficientes de (1.3.6),  $x(n) = (x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n))^T$  y  $g(n) = (g_1(n), g_2(n), \dots, g_k(n))^T$ .

De esta manera, el correspondiente sistema de ecuaciones en diferencias lineales homogéneo, se representa de la forma siguiente:

$$x(n+1) = A(n)x(n). \quad (1.3.8)$$

Dados  $n_0 \in \mathbb{Z}_+$  y  $x_0 \in \mathbb{R}^k$ , añadiendo:

$$n \geq n_0 \text{ y } x(n_0) = x_0, \quad (1.3.9)$$

al sistema (1.3.7), se dice que se tiene un sistema de ecuaciones en diferencias lineales con condiciones iniciales (1.3.9).

## 1.4. Comportamiento limitante de las soluciones

El análisis del comportamiento de las soluciones de determinadas ecuaciones en diferencias se simplifica considerando una ecuación de segundo orden. Adicionalmente, esto es de utilidad en la teoría de oscilación.

Sea  $y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ . Consideremos la ecuación en diferencias homogénea de segundo orden de la forma siguiente:

$$y(n+2) + p_1y(n+1) + p_2y(n) = 0, \quad (1.4.1)$$

para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ ,  $p_i \in \mathbb{R}$ ,  $i \in \{1, 2\}$  con  $p_2 \neq 0$ .

**Definición 1.4.1.** Sea  $y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  una solución de la ecuación (1.4.1) y  $y^*$  un punto de equilibrio de la ecuación (1.4.1). Se tiene que  $y$  oscila alrededor de  $y^*$  si  $y(n) - y^*$  alterna el signo, para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Esto significa que si  $y(n) > y^*$ , entonces  $y(n+1) < y^*$ .

Sean  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  las raíces características de la ecuación (1.4.1) [19, pág. 85]. Existen los casos siguientes:

Caso 1:  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  tales que  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . En este caso, se tiene que  $y_1(n) = \lambda_1^n$  y  $y_2(n) = \lambda_2^n$  son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (1.4.1) [19, pág. 86]. Adicionalmente, se tiene que:

$$y(n) = a_1y_1(n) + a_2y_2(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \text{ con } a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \quad (1.4.2)$$

es la solución general de la ecuación (1.4.1) [19, pág. 86].

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ . En tal caso, se dice que  $y_1$  es la solución dominante y  $\lambda_1$  es la raíz característica dominante.

De la ecuación (1.4.2), se tiene que:

$$\begin{aligned} y(n) &= a_1\lambda_1^n + a_2\lambda_2^n \\ &= \lambda_1^n \left( a_1 + a_2 \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n \right), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

Debido a que  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ , se tiene que  $\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| < 1$ . Lo que quiere decir que, de la ecuación (1.4.3),  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n = 0$ . Esto significa que  $\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = a_1 \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1^n$ , con lo que el comportamiento limitante de la ecuación (1.4.2) depende de  $\lambda_1$ . De donde, tenemos los siguientes subcasos:

Subcaso 1.1:  $\lambda_1 > 1$ . Se tiene que la sucesión  $\{a_1\lambda_1^n\}$  diverge a  $\infty$  (Figura 1.4).

Subcaso 1.2:  $\lambda_1 = 1$ . Se sigue que la sucesión  $\{a_1\lambda_1^n\}$  es constante (Figura 1.5).

Subcaso 1.3:  $0 < \lambda_1 < 1$ . La sucesión  $\{a_1\lambda_1^n\}$  decrece monótonamente a cero (Figura 1.6).

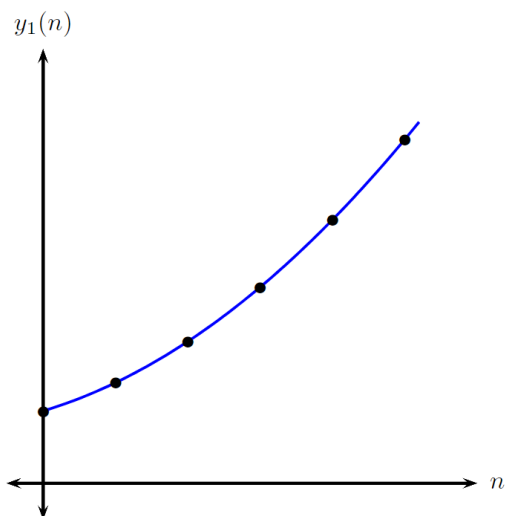


Figura 1.4:  $\lambda_1 > 1$ .

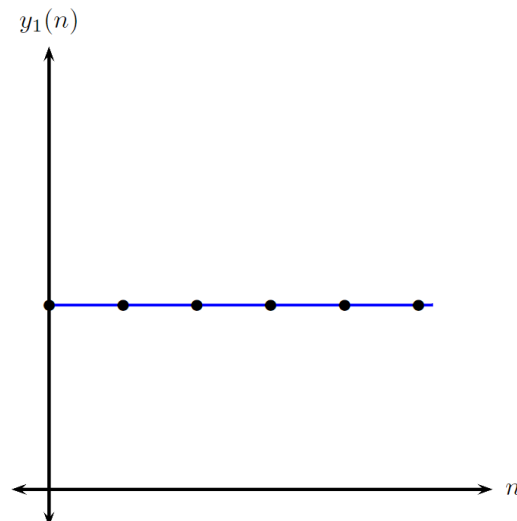


Figura 1.5:  $\lambda_1 = 1$ .

Subcaso 1.4:  $-1 < \lambda_1 < 0$ . Se tiene que la sucesión  $\{a_1 \lambda_1^n\}$  oscila alrededor de cero y converge a cero (Figura 1.7).

Subcaso 1.5:  $\lambda_1 = -1$ . Se sigue que la sucesión  $\{a_1 \lambda_1^n\}$  oscila entre  $a_1$  y  $-a_1$  (Figura 1.8).

Subcaso 1.6:  $\lambda_1 < -1$ . La sucesión  $\{a_1 \lambda_1^n\}$  oscila y es creciente (Figura 1.9).

Caso 2:  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  tales que  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . Se sigue que:

$$y(n) = (a_1 + a_2 n) \lambda^n, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \text{ con } a_1, a_2 \in \mathbb{R},$$

es la solución general de la ecuación (1.4.1) [19, pág. 87].

Subcaso 2.1:  $|\lambda| \geq 1$ . Si  $\lambda \geq 1$ , entonces  $y(n)$  diverge monótonamente y si  $\lambda \leq -1$ , entonces  $y(n)$  diverge por oscilación.

Subcaso 2.2:  $|\lambda| < 1$ . Esto significa que  $y$  converge a cero.

Caso 3:  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$  tales que  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  y  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ , con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \neq 0$ . Se tiene que la solución de la ecuación (1.4.1) es de la forma siguiente [19, Ejemplo 3.2.5]:

$$y(n) = ar^n \cos(n\theta - \omega), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \text{ con } a \in \mathbb{R},$$

donde  $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  y  $\theta = \tan^{-1}(\frac{\beta}{\alpha})$ . Debido a que la función coseno oscila, entonces  $y(n)$  oscila. Sin embargo,  $y(n)$  oscila de forma distinta dependiendo de la localización de las raíces características conjugadas.

- Subcaso 3.1:  $r > 1$ . Se tiene que  $\lambda_1$  y  $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$  están fuera del círculo unitario. Esto significa que  $y$  oscila y es creciente. En este caso, es inestable (Figura 1.10).

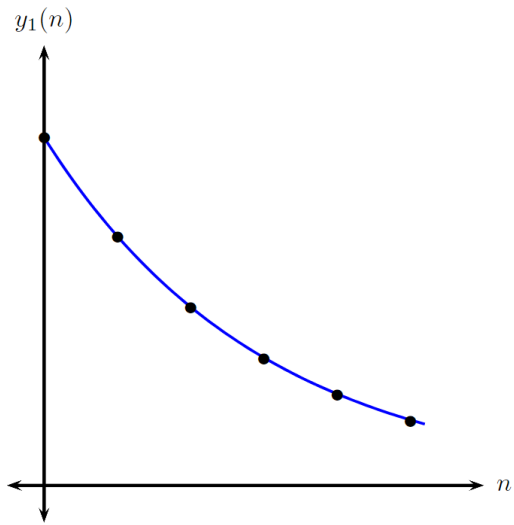


Figura 1.6:  $0 < \lambda_1 < 1$ .

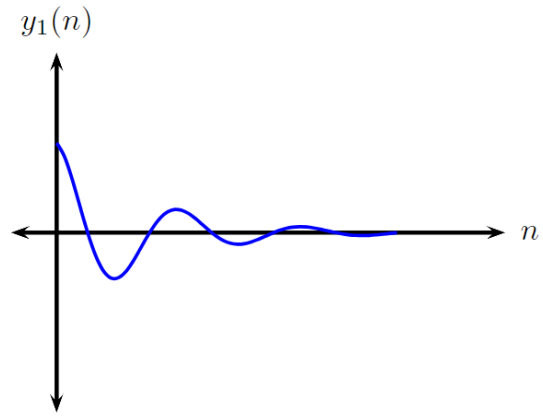


Figura 1.7:  $-1 < \lambda_1 < 0$ .

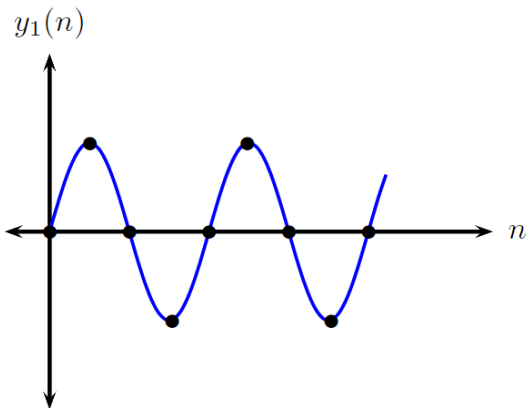


Figura 1.8:  $\lambda = -1$ .

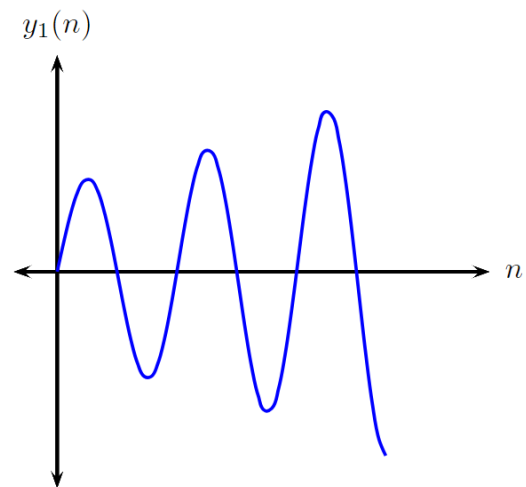
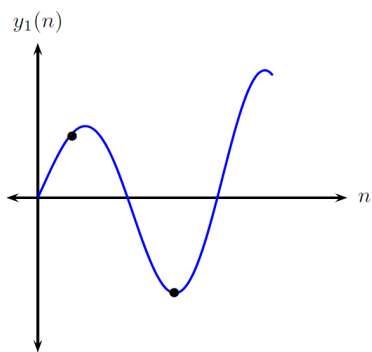
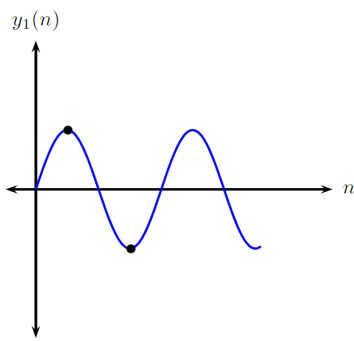
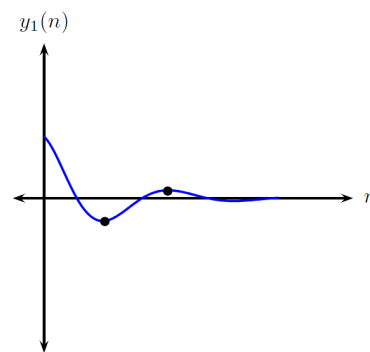


Figura 1.9:  $\lambda < -1$ .



Figura 1.10:  $r > 1$ .Figura 1.11:  $r = 1$ .Figura 1.12:  $r < 1$ .

- Subcaso 3.2:  $r = 1$ . Se sigue que  $\lambda_1$  y  $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$  están sobre el círculo unitario. Lo que quiere decir que  $y$  oscila y es constante (Figura 1.11).
- Subcaso 3.3:  $r < 1$ . Las raíces características  $\lambda_1$  y  $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$  están dentro del disco unitario. Así,  $y(n)$  oscila y converge a cero conforme  $n \rightarrow \infty$ . En este caso, es estable (Figura 1.12).

Como resumen de lo anterior se obtiene el siguiente:

**Teorema 1.4.2.** Sean  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  las raíces características de la ecuación (1.4.1). Se cumplen las siguientes afirmaciones:

- Todas las soluciones de la ecuación (1.4.1) oscilan alrededor de cero si y sólo si  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  no son reales positivas.
- Todas las soluciones de la ecuación (1.4.1) convergen a cero si y sólo si  $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$ .

Por otro lado, consideremos la ecuación en diferencias no homogénea de segundo orden correspondiente a la ecuación (1.4.1):

$$y(n+2) + p_1y(n+1) + p_2y(n) = M, \quad (1.4.4)$$

donde  $M \neq 0$  es una entrada constante. En comparación con la ecuación (1.4.1),  $y(n) = 0$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$  no es una solución de la ecuación (1.4.4), pero podemos calcular el punto de equilibrio de dicha ecuación para hallar una solución particular. Para esto, se sigue que:

$$\begin{aligned} y(n) + p_1y(n) + p_2y(n) &= M \\ y(n)(1 + p_1 + p_2) &= M \\ y(n) &= \frac{M}{1 + p_1 + p_2}. \end{aligned}$$

Esto es,  $y^* = \frac{M}{1+p_1+p_2}$  es una solución particular de (1.4.4). Esto significa que la solución general de (1.4.4) es de la forma siguiente:

$$y(n) = y^* + y_c(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \quad (1.4.5)$$

donde  $y_c$  es la solución complementaria de (1.4.4).

De la ecuación (1.4.5),  $\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = y^*$  si y sólo si  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_c(n) = 0$ . Adicionalmente,  $y(n)$  oscila alrededor de  $y^*$  si y sólo si  $y_c(n)$  oscila alrededor de cero.

Lo anterior se resume a continuación:

**Teorema 1.4.3.** Se cumplen las proposiciones siguientes:

- (a) Todas las soluciones de la ecuación no homogénea (1.4.4) oscilan alrededor de  $y^*$  si y sólo si ninguna de las raíces características de la ecuación homogénea (1.4.1) es real positiva.
- (b) Todas las soluciones de la ecuación no homogénea (1.4.4) convergen a  $y^*$  cuando  $n \rightarrow \infty$  si y sólo si  $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$ , donde  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son las raíces características de la ecuación homogénea (1.4.1).

A pesar de que en los Teoremas 1.4.2 y 1.4.3 se proporcionan condiciones para saber si las soluciones de una ecuación en diferencias de segundo orden son asintóticamente estables, en ocasiones es necesario especificar algunos criterios sobre los valores de  $p_1$  y  $p_2$  tanto de la ecuación homogénea (1.4.1) como de la no homogénea (1.4.4). Esto se puede observar a continuación.

**Teorema 1.4.4.** Sea  $y^*$  el punto de equilibrio de las ecuaciones (1.4.1) y (1.4.4). Se tiene que  $y^*$  es asintóticamente estable si y sólo si:

- (a)  $1 + p_1 + p_2 > 0$ ,
- (b)  $1 - p_1 + p_2 > 0$ ,
- (c)  $1 - p_2 > 0$ .

*Demostración.* Notemos que la ecuación característica de (1.4.1) o (1.4.4) es de la forma siguiente:

$$\lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0,$$

donde  $\lambda_1 = \frac{-p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2}$  y  $\lambda_2 = \frac{-p_1 - \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2}$  son sus raíces características.

Supongamos que  $1 + p_1 + p_2 > 0$ ,  $1 - p_1 + p_2 > 0$  y  $1 - p_2 > 0$ . Se sigue que  $2 + p_1 > 0$  y  $2 - p_1 > 0$ . Luego, tenemos los siguientes casos:

- Caso 1:  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Esto implica que  $p_1^2 - 4p_2 \geq 0$ .

De  $1 + p_1 + p_2 > 0$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} 4 + 4p_1 + 4p_2 &> 0 \\ 4 + 4p_1 &> -4p_2 \\ 4 + 4p_1 + p_1^2 &> -4p_2 + p_1^2 \\ (2 + p_1)^2 &> p_1^2 - 4p_2. \end{aligned}$$

Esto es,  $2 + p_1 < -\sqrt{p_1^2 - 4p_2}$  o  $\sqrt{p_1^2 - 4p_2} < 2 + p_1$ . La primera desigualdad no puede ocurrir, debido a que  $-\sqrt{p_1^2 - 4p_2} \leq 0$  y  $2 + p_1 > 0$ . Lo que quiere decir que:

$$\begin{aligned} \sqrt{p_1^2 - 4p_2} &< 2 + p_1 \\ -p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_2} &< 2 \\ \frac{-p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2} &< 1 \\ \lambda_1 &< 1. \end{aligned} \tag{1.4.6}$$

Debido a que  $2 - p_1 > 0$ , se sigue que:

$$\begin{aligned} -p_1 &> -2 \\ -p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_2} &> -2 \\ \frac{-p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2} &> -1 \\ \lambda_1 &> -1. \end{aligned} \tag{1.4.7}$$

De (1.4.6) y (1.4.7), se tiene que  $-1 < \lambda_1 < 1$ . Esto es,  $|\lambda_1| < 1$ . De forma similar, se sigue que  $|\lambda_2| < 1$ .

Por los Teoremas 1.4.2-(b) y 1.4.3-(b), se tiene que  $y^*$  es asintóticamente estable.

- Caso 2:  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ , donde  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son conjugados. Esto significa que  $p_1^2 - 4p_2 < 0$ . Se tiene que:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2} \\ &= \frac{-p_1 + i\sqrt{4p_2 - p_1^2}}{2} \\ |\lambda_1| &= \sqrt{\frac{p_1^2}{4} + \frac{4p_2 - p_1^2}{4}} \\ |\lambda_1|^2 &= \frac{p_1^2}{4} + \frac{4p_2}{4} - \frac{p_1^2}{4} \\ &= p_2 \\ &< 1. \end{aligned}$$

Lo que quiere decir que  $|\lambda_1| < 1$ . De forma similar,  $|\lambda_2| < 1$ .

Por lo tanto, por los Teoremas 1.4.2-(b) y 1.4.3-(b),  $y^*$  es asintóticamente estable.

---

Recíprocamente, supongamos que  $y^*$  es asintóticamente estable. De los Teoremas 1.4.2-(b) y 1.4.3-(b), se sigue que  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  están dentro del disco unitario, esto es  $|\lambda_1| < 1$  y  $|\lambda_2| < 1$ . Luego, tenemos los siguientes casos:

- Caso 1:  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Lo que quiere decir que  $p_1^2 - 4p_2 \geq 0$ . Debido a que  $|\lambda_1| < 1$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} -1 &< \lambda_1 < 1 \\ -1 &< \frac{-p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2} < 1 \\ -2 &< -p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_2} < 2 \\ -2 + p_1 &< \sqrt{p_1^2 - 4p_2} < 2 + p_1. \end{aligned} \tag{1.4.8}$$

De la segunda desigualdad de (1.4.8), se sigue que:

$$\begin{aligned} \sqrt{p_1^2 - 4p_2} &< 2 + p_1 \\ p_1^2 - 4p_2 &< (2 + p_1)^2 \\ p_1^2 - 4p_2 &< 4 + 4p_1 + p_1^2, \end{aligned}$$

o bien,  $4 + 4p_1 + p_1^2 > p_1^2 - 4p_2$ . Eliminando el término  $p_1^2$  de ambos lados de la desigualdad y reordenando, obtenemos:

$$\begin{aligned} 4p_2 + 4p_1 + 4 &> 0 \\ p_2 + p_1 + 1 &> 0. \end{aligned}$$

De forma similar:

$$-2 + p_1 < -\sqrt{p_1^2 + 4p_2} < 2 + p_1. \tag{1.4.9}$$

Lo que implica que,  $p_1 - p_2 + 1 > 0$ .

De la segunda desigualdad de (1.4.8) y la primera de (1.4.9), se sigue que:

$$\begin{aligned} 2 + p_1 &> 0 \\ 2 - p_1 &> 0 \\ |p_1| &< 2. \end{aligned}$$

De donde  $\frac{p_1^2}{4} < 1$ . Puesto que  $p_1^2 - 4p_2 \geq 0$ , se tiene que  $p_2 \leq \frac{p_1}{4}$ . Esto es,  $p_2 \leq \frac{p_1^2}{4} < 1$ . Esto implica que  $1 - p_2 > 0$ .

- Caso 2:  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ , donde  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son conjugados. Así,  $p_1^2 - 4p_2 < 0$ . Lo que quiere decir que:

$$-2\sqrt{p_2} < p_1 < 2\sqrt{p_2}. \tag{1.4.10}$$

Luego, podemos reescribir las raíces características como  $\lambda_1 = \frac{-p_1 + i\sqrt{4p_2 - p_1^2}}{2}$  y  $\lambda_2 = \frac{-p_1 - i\sqrt{4p_2 - p_1^2}}{2}$ . Esto es,  $|\lambda_1|^2 = \frac{p_1^2}{4} + \frac{4p_2}{4} - \frac{p_1^2}{4} = p_2$ . De aquí,  $0 < p_2 < 1$ .

Para mostrar que  $1 + p_1 + p_2 > 0$  y  $1 - p_1 + p_2 > 0$ , utilizamos  $f$  definida por  $f(x) = 1 + x - 2\sqrt{x}$ . Se necesita verificar que  $f(x) > 0$ , para cada  $x \in (0, 1)$ . Notemos que:

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f'(x) &= 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &< 0, \quad \text{para cada } x \in (0, 1). \end{aligned}$$

Esto significa que  $f$  decrece para cada  $x \in (0, 1)$ . Así,  $x = 1$  es un mínimo local. Lo que quiere decir que,  $f(x) > 0$ , para cada  $x \in (0, 1)$ . De donde,  $f(p_2) = 1 + p_2 - 2\sqrt{p_2} > 0$ .

De la primera desigualdad de (1.4.10), se sigue que  $1 + p_2 + p_1 > 0$ . De forma similar, se tiene que  $1 - p_1 + p_2 > 0$ .

De los Casos 1 y 2, se sigue el resultado. ■

**Ejemplo 1.4.5.** Sea  $y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ . Consideremos la siguiente ecuación en diferencias:

$$y(n+2) - \alpha(1+\beta)y(n+1) + \alpha\beta y(n) = 0, \tag{1.4.11}$$

para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$  con  $\alpha, \beta > 0$ . Hallemos las condiciones bajo las cuales la solución de la ecuación (1.4.11):

- (a) Converge al punto de equilibrio.
- (b) Oscila alrededor del punto de equilibrio.

Para hallar el punto de equilibrio, se tiene que:

$$\begin{aligned} y(n) - \alpha(1+\beta)y(n) + \alpha\beta y(n) &= 0 \\ (1 - \alpha(1+\beta) + \alpha\beta)y(n) &= 0 \\ (1 - \alpha)y(n) &= 0 \\ y(n) &= \frac{1}{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Esto significa que  $y^* = \frac{1}{1-\alpha}$  es el punto de equilibrio de la ecuación (1.4.11).

- (a) De las condiciones del Teorema 1.4.4, se sigue que:

$$\begin{aligned} 1 - \alpha(1+\beta) + \alpha\beta &> 0 \\ 1 - \alpha &> 0 \\ 1 &> \alpha. \end{aligned} \tag{1.4.12}$$

$$1 + \alpha(1+\beta) + \alpha\beta > 0$$

$$1 + \alpha + 2\alpha\beta > 0. \quad (1.4.13)$$

$$\begin{aligned} 1 - \alpha\beta &> 0 \\ 1 &> \alpha\beta. \end{aligned} \quad (1.4.14)$$

Por lo tanto, con las condiciones (1.4.12), (1.4.13) y (1.4.14),  $y^*$  es asintóticamente estable.

(b) Se tiene que la ecuación característica de la ecuación (1.4.11) es la siguiente:

$$r^2 - \alpha(1 + \beta)r + \alpha\beta = 0.$$

Esto significa que sus raíces características son  $\lambda_1 = \frac{\alpha(1+\beta) + \sqrt{\alpha^2(1+\beta)^2 - 4\alpha\beta}}{2}$  y  $\lambda_2 = \frac{\alpha(1+\beta) - \sqrt{\alpha^2(1+\beta)^2 - 4\alpha\beta}}{2}$ .

De acuerdo con el Teorema 1.4.2-(a), las soluciones de la ecuación (1.4.11) oscilan alrededor de  $y^*$  si  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  no son reales positivas.

Para que  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  tales que  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ , es necesario que  $\alpha^2(1 + \beta)^2 > 4\alpha\beta$  y  $\alpha(1 + \beta) < 0$ , pero esto no puede ser posible debido a que  $\alpha, \beta > 0$ . Lo que quiere decir que si  $\alpha^2(1 + \beta)^2 > 4\alpha\beta$ , esto es,  $\alpha > \frac{4\beta}{(1+\beta)^2}$ , así (1.4.11) no tiene soluciones oscilatorias alrededor de  $y^*$ .

Para que  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$  tales que  $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ , se debe cumplir que  $\alpha^2(1 + \beta)^2 < 4\alpha\beta$ . Esto significa que si  $\alpha < \frac{4\beta}{(1+\beta)^2}$  todas las soluciones de (1.4.11) son oscilatorias alrededor del punto de equilibrio.

**Ejemplo 1.4.6.** Sean  $y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  y  $p \in \mathbb{R}$ . Demostremos que cada solución de la ecuación en diferencias:

$$y(n + 2) - y(n + 1) + py(n) = 0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \quad (1.4.15)$$

oscila si y sólo si  $p > \frac{1}{4}$ .

Se tiene que la ecuación característica de (1.4.15) es de la siguiente forma:

$$r^2 - r + p = 0.$$

En consecuencia,  $\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4p}}{2}$  y  $\lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4p}}{2}$ . De acuerdo con el Teorema 1.4.2-(a), las soluciones de la ecuación (1.4.15) oscilan alrededor del punto de equilibrio si  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  no son reales positivas. Para que las raíces características sean reales negativas, es necesario que  $1 + 4p > 0$  y  $1 < 0$ , lo cual es una contradicción.

Por otra parte,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$  tales que  $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$  si y sólo si  $1 + 4p < 0$ . Este caso sí es posible.

Por lo tanto, cada solución de la ecuación (1.4.15) oscila si y sólo si  $p > \frac{1}{4}$ .

A continuación, presentamos un modelo de una especie vegetal con la finalidad de observar que se pueden presentar soluciones oscilatorias bajo ciertas condiciones. Esto nos sirve para comprender las fluctuaciones en la población de la especie en cuestión.

### 1.4.1. Propagación anual de plantas

Este modelo trata de describir la propagación de una cierta especie de plantas, con la intención de calcular el número que habrá en cada generación. Estas plantas producen semillas al final de su temporada de crecimiento, digamos en agosto, después de lo cual mueren. Sólo una fracción de estas semillas sobrevive al invierno y una parte de las que sobreviven germinan al comienzo de la temporada, digamos en mayo, dando lugar a una nueva generación de plantas.

Sean  $\gamma$  el número de semillas producidas por planta en agosto,  $\alpha$  la fracción de semillas de un año de edad que germinan en mayo,  $\beta$  la fracción de semillas de dos años de edad que germinan en mayo,  $\sigma$  la fracción de semillas que sobreviven a un invierno determinado y  $p \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  tal que  $p(n)$  es el número de plantas en la generación  $n$ . Se tiene que:

$$\begin{aligned} p(n) &= \binom{\text{plantas que germinan de}}{\text{semillas de un año de edad}} + \binom{\text{plantas que germinan de}}{\text{semillas de dos años de edad}} \\ &= \alpha s_1(n) + \beta s_2(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned} \quad (1.4.16)$$

donde  $s_1, s_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  tales que  $s_1(n)$  y  $s_2(n)$  son el número de semillas de uno y dos años de edad antes de la germinación, digamos en abril de la generación  $n$ , respectivamente. El número de semillas después de la germinación se puede calcular de la forma siguiente:

$$\binom{\text{semillas}}{\text{que quedan}} = \binom{\text{fracción de semillas}}{\text{que no germinaron}} \cdot \binom{\text{número original de}}{\text{semillas en abril.}}$$

Sean  $\tilde{s}_1, \tilde{s}_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  tales que  $\tilde{s}_1(n)$  y  $\tilde{s}_2(n)$  son el número de semillas de uno y dos años de edad que quedan en mayo de la generación  $n$ , después de que algunas hayan germinado, respectivamente. Se sigue que:

$$\begin{aligned} \tilde{s}_1(n) &= (1 - \alpha)s_1(n) \\ \tilde{s}_2(n) &= (1 - \beta)s_2(n), \end{aligned}$$

para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ . En agosto de la generación  $n$  se producen semillas nuevas  $s_0(n)$ , consideradas como semillas de cero años de edad a una razón de  $\gamma$  por planta. Lo que quiere decir que:

$$s_0(n) = \gamma p(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \quad (1.4.17)$$

Después del invierno, las semillas  $s_0(n)$  que eran nuevas en la generación  $n$  tendrán un año de edad en la siguiente generación  $n + 1$  y una fracción  $\sigma s_0(n)$  de ellas sobrevivirá:

$$s_1(n + 1) = \sigma s_0(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \quad (1.4.18)$$

De las ecuaciones (1.4.17) y (1.4.18), se tiene que:

$$s_1(n + 1) = \sigma \gamma p(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \quad (1.4.19)$$

En cuanto a las semillas de dos años de edad, se sigue que:

$$s_2(n + 1) = \sigma \tilde{s}_1(n)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sigma(1 - \alpha)s_1(n) \\
 &= \sigma^2(1 - \alpha)\gamma p(n - 1), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.
 \end{aligned} \tag{1.4.20}$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.4.19) y (1.4.20) en (1.4.16), se tiene que:

$$\begin{aligned}
 p(n + 1) &= \alpha\gamma\sigma p(n) + \beta\gamma\sigma^2(1 - \alpha)p(n - 1) \\
 p(n + 2) &= \alpha\gamma\sigma p(n + 1) + \beta\gamma\sigma^2(1 - \alpha)p(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.
 \end{aligned} \tag{1.4.21}$$

La ecuación característica de la ecuación (1.4.21) es de la forma siguiente:

$$\lambda^2 - \alpha\gamma\sigma\lambda + \beta\gamma\sigma^2(1 - \alpha) = 0.$$

Esto significa que sus raíces características son  $\lambda_1 = \frac{\alpha\gamma\sigma}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\beta(1-\alpha)}{\alpha^2\gamma}}\right)$  y  $\lambda_2 = \frac{\alpha\gamma\sigma}{2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4\beta(1-\alpha)}{\alpha^2\gamma}}\right)$ . Debido a que  $1 - \alpha > 0$ , se sigue que  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  tales que  $\lambda_1 > 0$  y  $\lambda_2 < 0$ . Para asegurar la propagación de las plantas es necesario que  $\lambda_1 > 1$ . Lo que quiere decir que:

$$\begin{aligned}
 &\lambda_1 > 1 \\
 &\frac{\alpha\gamma\sigma}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\beta(1-\alpha)}{\alpha^2\gamma}}\right) > 1 \\
 &1 + \sqrt{1 + \frac{4\beta(1-\alpha)}{\alpha^2\gamma}} > \frac{2}{\alpha\gamma\sigma} \\
 &\sqrt{1 + \frac{4\beta(1-\alpha)}{\alpha^2\gamma}} > \frac{2}{\alpha\gamma\sigma} - 1 \\
 &1 + \frac{4\beta(1-\alpha)}{\alpha^2\gamma} > \left(\frac{2}{\alpha\gamma\sigma} - 1\right)^2 \\
 &1 + \frac{4\beta(1-\alpha)}{\alpha^2\gamma} > \frac{4}{\alpha^2\gamma^2\sigma^2} - \frac{4}{\alpha\gamma\sigma} + 1 \\
 &\frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha} > \frac{1}{\alpha\gamma\sigma^2} - \frac{1}{\sigma} \\
 &\frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha} + \frac{1}{\sigma} > \frac{1}{\alpha\gamma\sigma^2} \\
 &\frac{\beta\sigma(1-\alpha) + \alpha}{\alpha\sigma} > \frac{1}{\alpha\gamma\sigma^2} \\
 &\frac{1}{\beta\sigma(1-\alpha) + \alpha} < \gamma\sigma \\
 &\frac{1}{\beta\sigma^2(1-\alpha) + \alpha\sigma} < \gamma.
 \end{aligned}$$

Si ninguna semilla de dos años de edad germina en mayo, esto es,  $\beta = 0$ , se tiene que  $\frac{1}{\alpha\sigma} < \gamma$ . Esto significa que  $\alpha\gamma\sigma > 1$ . Lo que quiere decir que la propagación de



plantas ocurre si el producto de la fracción de semillas producidas por planta en agosto, la fracción de semillas de un año de edad que germinan en mayo y la fracción de semillas que sobreviven a un invierno determinado excede 1.



---

---

# CAPÍTULO 2

---

## ALGUNAS FORMAS DE ESTABILIDAD

Es de gran importancia realizar el análisis del comportamiento cualitativo de las soluciones de los sistemas dinámicos discretos, sin la necesidad de calcular éstas. Lo anterior, debido a que en la realidad, la mayoría de las ecuaciones pueden presentar dificultades para construir sus soluciones analíticas o incluso dichos problemas pueden llegar a ser irresolubles. Aún cuando pueden obtenerse las soluciones exactas, el análisis cualitativo es esencial por la simplicidad para determinar las propiedades de la solución. Así, en la tesis [19] estudiamos lo referente a las propiedades de estabilidad de las ecuaciones en diferencias de primer orden. Para profundizar en este análisis del comportamiento cualitativo, en este capítulo se analiza la estabilidad de sistemas dinámicos discretos  $k$ -dimensionales.

### 2.1. Nociones de estabilidad

En esta sección mencionamos los conceptos de estabilidad necesarios para comprender algunos de los resultados más importantes acerca de los criterios de estabilidad, específicamente de estabilidad asintótica.

Sea  $k \in \mathbb{N}$ . El conjunto de funciones de  $\mathbb{Z}_+$  en  $\mathbb{R}^k$  lo denotamos por  $\mathcal{S}_k(\mathbb{Z}_+)$ , esto es:

$$\mathcal{S}_k(\mathbb{Z}_+) = \{x | x : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}^k\}.$$

Sean  $x \in \mathcal{S}_k(\mathbb{Z}_+)$ ,  $n_0 \in \mathbb{Z}_+$  y  $x_0 \in \mathbb{R}^k$ . Consideremos la siguiente ecuación en diferencias vectorial:

$$x(n+1) = f(n, x(n)), \quad x(n_0) = x_0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{con } n \geq n_0, \quad (2.1.1)$$

donde  $f : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  es una función continua.

La ecuación (2.1.1) es *autónoma* si no depende explícitamente del parámetro  $n$  y en tal caso escribimos  $x(n+1) = f(x(n))$ .

**Definición 2.1.1.** La ecuación (2.1.1) es *periódica* si para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , se tiene que  $f(n + N, x) = f(n, x)$ , para algún  $N \in \mathbb{N}$ .

La ecuación (2.1.1) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} x(n + 1) &= f(n, x) \\ &= A(n)x(n), \end{aligned}$$

donde  $A(n) \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathcal{S}(\mathbb{Z}_+))$  con  $A(n)$  no singular.

**Definición 2.1.2.** Consideremos la ecuación (2.1.1). La *órbita positiva* de  $x_0$  se denota y se define como  $\mathcal{O}^+(x_0) = \{x(n, 0, x_0) : n \in \mathbb{Z}_+\} = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots\}$ .

Debido a que en este documento sólo se consideran órbitas positivas, denotamos a  $\mathcal{O}^+(x_0)$  como  $\mathcal{O}(x_0)$ .

**Definición 2.1.3.** Sea  $x^* \in \mathbb{R}^k$ . Se dice que  $x^*$  es un *punto de equilibrio* de la ecuación (2.1.1) si  $f(n, x^*) = x^*$ , para cada  $n \geq n_0$ . En caso de que  $x^* = 0$ , es llamada solución cero.

En muchas ocasiones, puede asumirse que el punto de equilibrio es cero, esto debido a lo siguiente:

**Proposición 2.1.4.** Se tiene que  $x^*$  es punto de equilibrio de la ecuación (2.1.1) si y sólo si  $y^* = 0$  es punto de equilibrio de  $y(n + 1) = g(n, y(n))$ , donde  $g(n, y(n)) = f(x, x(n)) - x^*$ .

Así, de acuerdo a nuestra conveniencia, se puede considerar al punto de equilibrio como la solución cero.

Por [19, Teorema 4.1.5], se tiene la siguiente:

**Observación 2.1.5.** La solución de la ecuación (2.1.1) existe y es única.

Es necesario clasificar los puntos de equilibrio para poder analizar el comportamiento que tienen las soluciones de los sistemas dinámicos discretos conforme se acercan a dichos puntos.

**Definición 2.1.6.** Sea  $x^* \in \mathbb{R}^k$  un punto de equilibrio de la ecuación (2.1.1). Se dice que  $x^*$  es un *punto de equilibrio*:

- (a) *Estable* (E) si para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta = \delta(\epsilon, n_0)$  tal que para cada  $x_0 \in \mathbb{R}^k$ , si  $\|x_0 - x^*\| < \delta$ , entonces  $\|x(n, n_0, x_0) - x^*\| < \epsilon$ , para cada  $n \geq n_0$  (vea Figura 2.1 y Figura 2.2). Si  $\delta$  puede elegirse de forma independiente de  $n_0$ , se tiene que  $x^*$  es *uniformemente estable* (UE).
- (b) *Inestable* (I) si  $x^*$  no es estable (vea Figura 2.3).

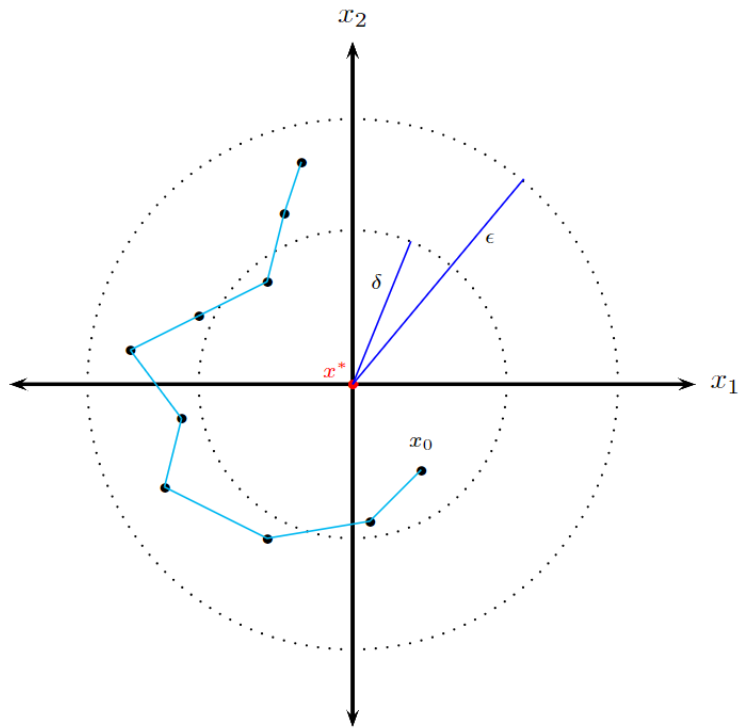


Figura 2.1: Equilibrio estable en el espacio fase, caso  $k = 2$ .

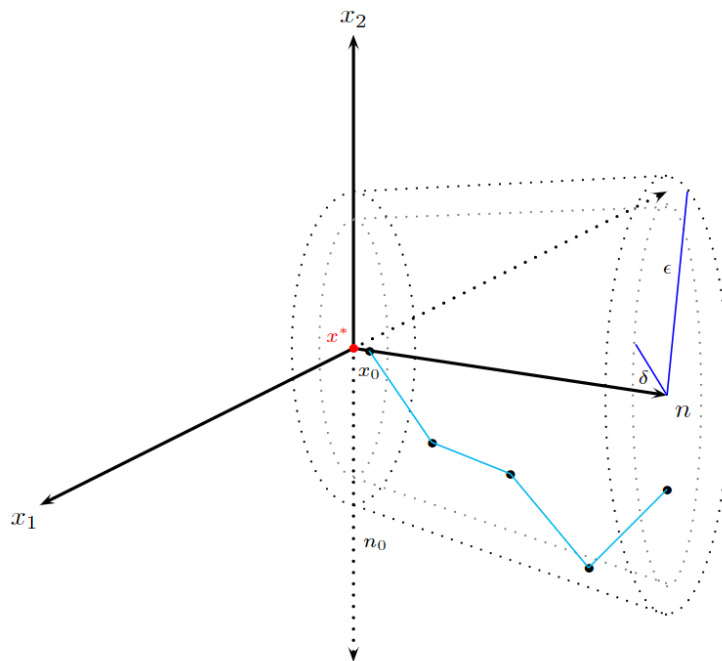


Figura 2.2: Equilibrio estable, considerando el parámetro  $n$ , caso  $k = 2$ .

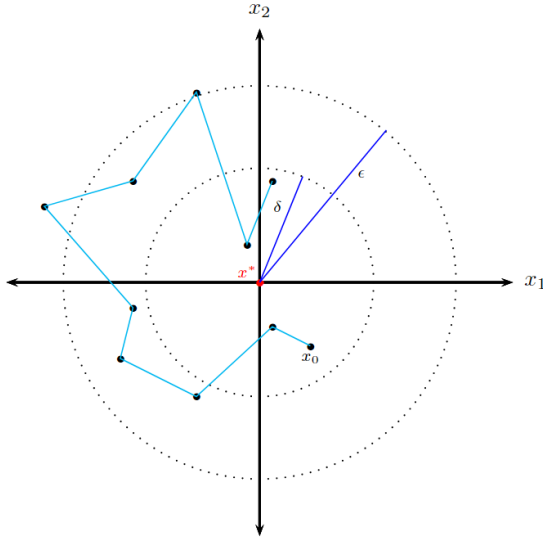


Figura 2.3: Equilibrio inestable en el espacio fase, caso  $k = 2$ .

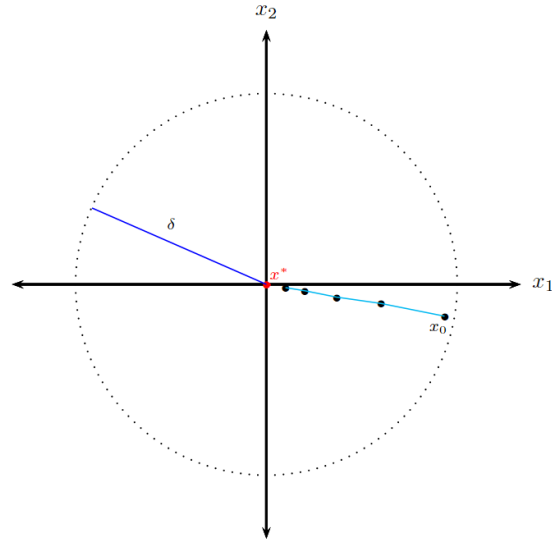


Figura 2.4: Equilibrio exponencialmente estable en el espacio fase, caso  $k = 2$ .

- (c) *Atractor* (A) si existe  $\eta = \eta(n_0) > 0$  tal que para cada  $x_0 \in \mathbb{R}^k$ , se tiene que si  $\|x_0 - x^*\| < \eta$ , entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, n_0, x_0) = x^*.$$

Si la elección de  $\eta$  no depende de  $n_0$ , el punto de equilibrio  $x^*$  es *uniformemente atractor* (UA). Si  $\eta = \infty$ , entonces  $x^*$  es *atractor global*.

- (d) *Asintóticamente estable* (AE) si es estable y atractor (vea Figura 2.6). Si es uniformemente estable y uniformemente atractor,  $x^*$  es *uniformemente asintóticamente estable* (UAE), vea Figura 2.5. Se dice que  $x^*$  es *asintóticamente estable global* si  $x^*$  es estable y atractor global (vea Figura 2.7).

- (e) *Exponencialmente estable* (EE) si existen  $\delta, M > 0$  y  $\eta \in (0, 1)$  tales que para cada  $x_0 \in \mathbb{R}^k$ , si  $\|x_0 - x^*\| < \delta$ , entonces  $\|x(n, n_0, x_0) - x^*\| \leq M\|x_0 - x^*\|\eta^{n-n_0}$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$  (vea Figura 2.4). Si  $\eta = \infty$ , entonces  $x^*$  es *exponencialmente estable global*.

Notemos que en los incisos (a), (c) y (e),  $x(n)$  depende de  $n_0$  y  $x_0$ .

De la Definición 2.1.6-(c), se tiene la siguiente:

**Proposición 2.1.7.** Sea  $x^*$  el punto de equilibrio de la ecuación (2.1.1). Se tiene que  $x^*$  es uniformemente atractor si existe  $\mu > 0$  tal que para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $N = N(\epsilon)$  (independiente de  $n_0$ ) de modo que para cada  $x \in \mathbb{R}$  con  $\|x_0 - x^*\| < \mu$ , se cumple que  $\|x(n, n_0, x_0) - x^*\| < \epsilon$ , para cada  $n \geq n_0 + N$ .

**Definición 2.1.8.** Una solución  $x(n, n_0, x_0)$  de la ecuación en diferencias (2.1.1) es *acotada* si existe  $M > 0$  tal que  $\|x(n, n_0, x_0)\| \leq M$ , para cada  $n \geq n_0$ , donde  $M$  depende de cada solución.

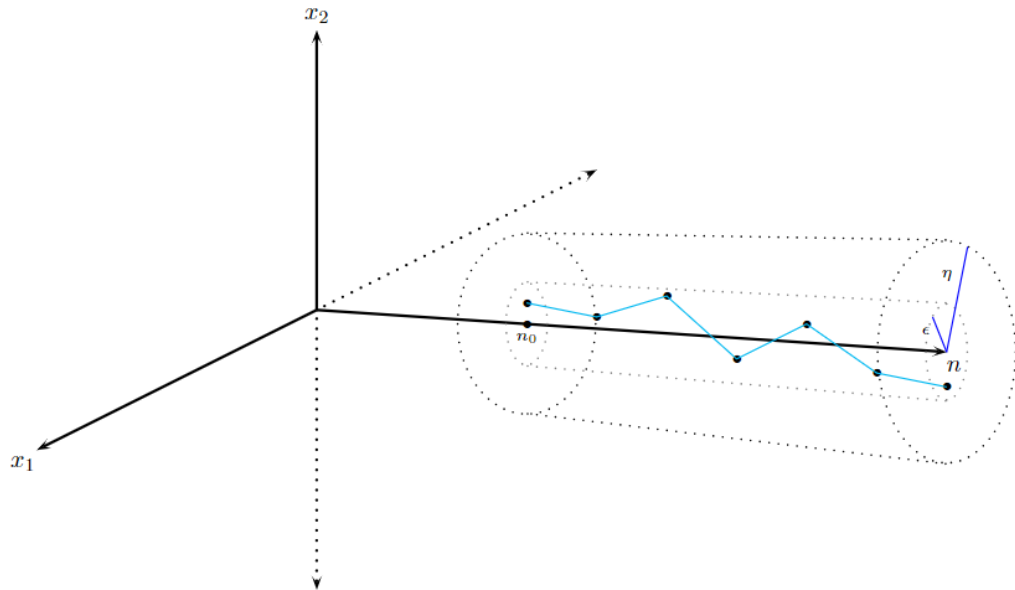


Figura 2.5: Equilibrio uniformemente asintóticamente estable, considerando el parámetro  $n$ , caso  $k = 2$ .

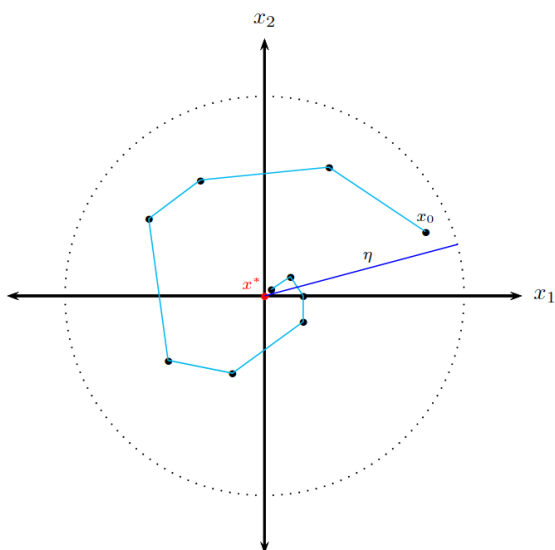


Figura 2.6: Equilibrio asintóticamente estable en el espacio fase, caso  $k = 2$ .

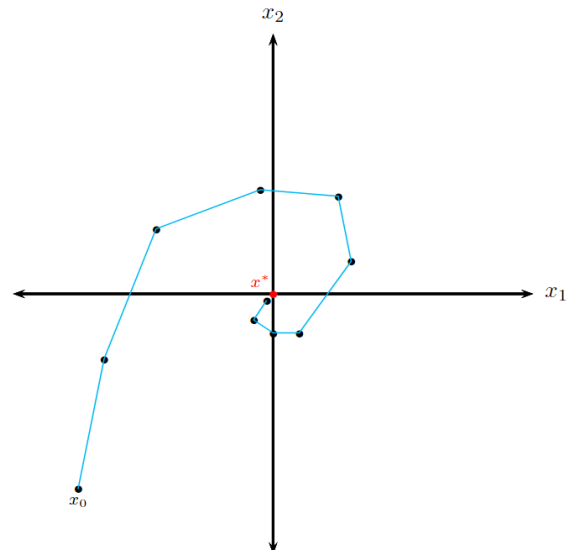


Figura 2.7: Equilibrio asintóticamente estable global en el espacio fase, caso  $k = 2$ .

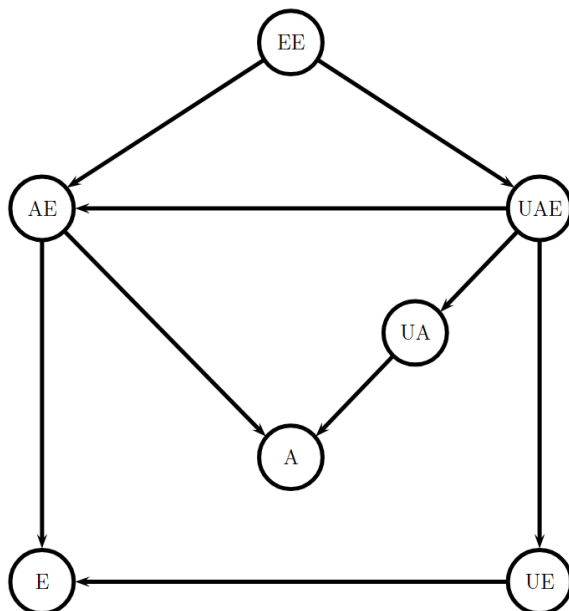


Figura 2.8: Jerarquía de las nociones de estabilidad.

La Figura 2.8 muestra la relación de las nociones de estabilidad dadas en la Definición 2.1.6.

Ahora analizamos algunos resultados y ejemplos para cuando tengamos un sistema autónomo. Notemos que en el caso autónomo, la función  $f : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  de la ecuación (2.1.1) no depende de  $n$ , así, cuando consideremos el caso autónomo, sin perder generalidad podemos considerar la función  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ .

Sean  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathcal{S}_k(\mathbb{Z}_+)$ ,  $n_0 \in \mathbb{Z}_+$  y  $x_0 \in \mathbb{R}^k$ . Consideremos el sistema de ecuaciones en diferencias autónomo siguiente:

$$x(n+1) = f(x(n)), \quad \text{para cada } n \geq n_0 \quad \text{y} \quad x(n_0) = x_0, \quad (2.1.2)$$

donde  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  es una función continua.

Observemos que en el diagrama (Figura 2.8) las relaciones recíprocas no son verdaderas, esto sucede únicamente en algunos casos particulares. Para el caso autónomo, tenemos el teorema siguiente:

**Teorema 2.1.9.** Consideremos la ecuación (2.1.2) y  $x^* \in \mathbb{R}^k$  un punto de equilibrio de (2.1.2). Se cumplen las afirmaciones siguientes:

- (a)  $x^*$  es estable si y sólo si  $x^*$  es uniformemente estable.
- (b)  $x^*$  es asintóticamente estable si y sólo si  $x^*$  es uniformemente asintóticamente estable.
- (c)  $x^*$  es atractor si y sólo si  $x^*$  es uniformemente atractor.

*Demostración.* (a) Supongamos que (2.1.2) es estable.



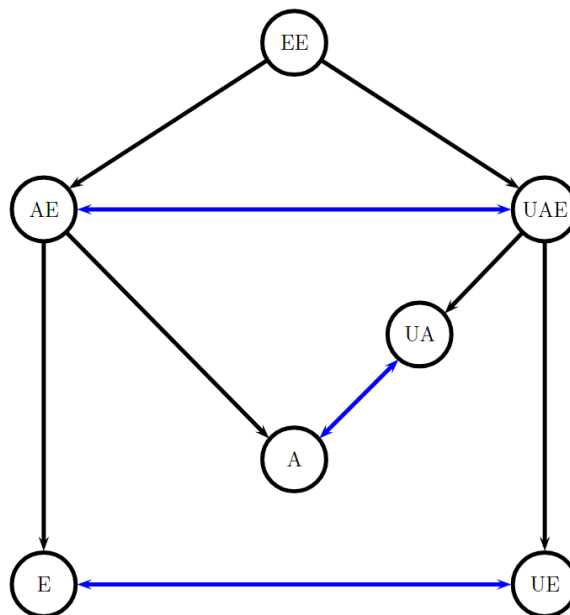


Figura 2.9: Jerarquía de las nociones de estabilidad, caso autónomo.

Sea  $\epsilon > 0$ . Veamos que existe  $\delta > 0$  (que no depende de  $n_0$ ) tal que si  $x_0 \in \mathbb{R}^k$  y  $\|x_0 - x^*\| < \delta$ , entonces  $\|x(n, n_0, x_0) - x^*\| < \epsilon$ , para cada  $n \geq n_0$ . Por hipótesis existe  $\delta_1(\epsilon, n_0) > 0$  tal que si  $x_0 \in \mathbb{R}^k$  y  $\|x_0 - x^*\| < \delta_1$ , entonces  $\|x(n, n_0, x_0) - x^*\| < \epsilon$ , para cada  $n \geq n_0$ . Veamos que  $\delta_1$  no depende de  $n_0$ . Para esto, sean  $x(n, n_0, x_0), y(n, m_0, x_0) \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  dos soluciones del sistema de ecuaciones en diferencias (2.1.2). Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $m_0 = n_0 + r_0$ , con  $r_0 \in \mathbb{Z}_+$ . Se tiene que  $x(n - r_0, n_0, x_0)$  y  $y(n, m_0, x_0)$  se intersectan en  $n = m_0$ . Debido a la unicidad de la solución, Observación 2.1.5, se sigue que  $x(n - r_0, n_0, x_0) = y(n, m_0, x_0)$ . Lo que quiere decir que  $\delta_1$  no depende de  $n_0$ . De esta forma, basta considerar  $\delta = \delta_1$ . Por lo tanto,  $x^*$  es uniformemente estable.

El recíproco, se sigue directamente de las definiciones.

Las demostraciones de los incisos (b) y (c) se realizan de forma similar. ■

Así, en el caso autónomo el diagrama que muestra la relación de las nociones de estabilidad es como se muestra en la Figura 2.9.

## 2.2. Estabilidad 1-dimensional

A continuación, mostramos algunos ejemplos en los que se aplica el Teorema 2.1.9 en el caso 1-dimensional un resultado referente a las ecuaciones en diferencias homogéneas autónomas de primer orden y uno respecto a las ecuaciones en diferencias homogéneas no autónomas de primer orden.

**Ejemplo 2.2.1.** Sean  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ ,  $n_0 \in \mathbb{Z}_+$  y  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Consideremos la ecuación en

diferencias  $x(n+1) = x(n)$ , para cada  $n \geq n_0$  y  $x(n_0) = x_0$ . Por [19, Proposición 2.2.1], se tiene que la solución de esta ecuación es  $x(n, n_0, x_0) = x_0$ , para cada  $n \geq n_0$ .

Sea  $x^* = 0$  un punto de equilibrio de la ecuación  $x(n+1) = x(n)$ . Veamos que  $x^* = 0$  es estable. Sea  $\epsilon > 0$ . Pongamos  $\delta = \epsilon$ . Supongamos que  $x_0 \in \mathbb{R}$  y  $|x_0 - x^*| < \delta$ . Esto implica que  $|x_0| < \epsilon$ . De donde,  $|x(n, n_0, x_0) - x^*| < \epsilon$ , para cada  $n \geq n_0$ . Lo que quiere decir que  $x^*$  es estable y por el Teorema 2.1.9, es uniformemente estable.

Veamos que  $x^* = 0$  no es atractor. Esto es, para cada  $\gamma > 0$ , existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $|x_0 - 0| < \gamma$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, n_0, x_0) \neq 0$ . Sea  $\gamma > 0$ . Luego, sea  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $x_0 \neq 0$ . Puesto que  $x(n, n_0, x_0) = x_0$ , para cada  $n \geq n_0$ , se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, n_0, x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_0 = x_0 \neq 0$ . Esto significa que  $x^* = 0$  no es atractor.

Por lo tanto,  $x^*$  es uniformemente estable y no asintóticamente estable.

De forma general, para las ecuaciones en diferencias de la forma  $x(n+1) = ax(n)$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$  con  $n \geq n_0$  se tiene la siguiente:

**Proposición 2.2.2.** Sea  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ . Consideremos la ecuación en diferencias  $x(n+1) = ax(n)$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$  con  $a \in \mathbb{R}$ . Luego,  $x^* = 0$  es el punto de equilibrio de la ecuación. Los siguientes argumentos son ciertos:

- (a) Si  $|a| < 1$ , entonces  $x^* = 0$  es uniformemente asintóticamente estable.
- (b) Si  $|a| = 1$ , entonces  $x^* = 0$  es uniformemente estable.
- (c) Si  $|a| > 1$ , entonces  $x^* = 0$  es inestable.

*Demostración.* La solución general de la ecuación en diferencias es de la forma siguiente [19, Proposición 2.3.1]:

$$x(n) = a^n x_0,$$

donde  $x(0) = x_0$  es la condición inicial.

- (a) Supongamos que  $|a| < 1$ . Veamos que  $x^* = 0$  es estable. Sea  $\epsilon > 0$ . Como  $|a| < 1$ , se sigue que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0. \tag{2.2.1}$$

De aquí, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para cada  $n \geq N$ , se cumple que  $|a^n| < \epsilon$ . Pongamos  $\delta = \frac{1}{\epsilon}$ . Sea  $x(0) \in \mathbb{R}$ . Supongamos que  $|x(0)| < \delta$ , se tiene que  $|x(0)| < \frac{1}{\epsilon}$ . Por otra parte,  $|x(n)| = |a^n x(0)| = |a^n| |x(0)| < \epsilon$ . Lo que quiere decir que  $x^* = 0$  es estable. Por el Teorema 2.1.9,  $x^* = 0$  es uniformemente estable.

Ahora, veamos que  $x^* = 0$  es atractor. Como  $|a| < 1$ , por (2.2.1),  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a^n x(0)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x(n)| = 0$ . Esto implica que  $x^* = 0$  es atractor global. En particular,  $x^* = 0$  es atractor. Por el Teorema 2.1.9 es uniformemente atractor.

Por lo tanto, la solución cero es uniformemente asintóticamente estable.

(b) Se sigue del Ejemplo 2.2.1.

(c) Supongamos que  $|a| > 1$ . Probemos que existe  $\epsilon > 0$  tal que para cada  $\delta > 0$ , se cumple que existe  $x(0) \in \mathbb{R}$  tal que  $|x(0)| < \delta$  y  $|x(n)| \geq \epsilon$ , para algún  $n \geq n_0$ .

Como  $|a| > 1$ , se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a|^n = \infty$ .

Pongamos  $\epsilon = 1$ . Sea  $\delta > 0$ . De donde, existe  $x(0) \in \mathbb{R}$  con  $x(0) \neq 0$  tal que  $|x(0)| < \delta$ . Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a|^n = \infty$ , tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a|^n |x(0)| = \infty$ . Luego, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para cada  $n \geq N$ ,  $|a|^n |x(0)| \geq 1$ , es decir,  $|x(n)| \geq 1$ , para cada  $n \geq N$ . Sea  $m \in \mathbb{N}$  con  $m \geq \max\{N, n(0)\}$ . Así,  $|x(m)| \geq 1$  con  $m \geq n(0)$ .

Por lo tanto, la solución cero es inestable.

El resultado se sigue de los incisos (a), (b) y (c). ■

**Proposición 2.2.3.** Sean  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ ,  $n_0 \in \mathbb{Z}_+$  y  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Consideremos la ecuación en diferencias  $x(n+1) = a(n)x(n)$ , con  $a : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $a(n) \neq 0$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Las soluciones de esta ecuación en diferencias son de la forma siguiente:

$$x(n, n_0, x_0) = \left[ \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] x_0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{con } n \geq n_0. \quad (2.2.2)$$

Además, sea  $x^*$  el punto de equilibrio de (2.2.2) tal que  $x^* = 0$ . El punto de equilibrio  $x^*$  es:

- (a) Estable si y sólo si existe  $M \in \mathbb{R}^+$  que depende de  $n_0$  tal que  $|\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)| \leq M$ , para cada  $n \geq n_0$ .
- (b) Uniformemente estable si y sólo si existe  $M \in \mathbb{R}^+$  tal que  $|\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)| \leq M$ , para cada  $n \geq n_0$ .
- (c) Asintóticamente estable si y sólo si  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)| = 0$ .
- (d) Uniformemente asintóticamente estable si y sólo si existen  $M > 0$  y  $0 < \eta < 1$  tales que  $|\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)| \leq M\eta^{n-n_0}$ , para cada  $n \geq n_0$ .

*Demostración.* Para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$  con  $n \geq n_0$ , pongamos  $x(n, n_0, x_0) = \Phi(n)x_0$ , donde  $\Phi(n) = \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)$ .

(a) Supongamos que  $x^* = 0$  es estable. Veamos que existe  $M \in \mathbb{R}^+$  que depende de  $n_0$  tal que  $|\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)| \leq M$ , para cada  $n \geq n_0$ . Sea  $\epsilon > 0$ . Debido a que  $x^* = 0$  es estable, existe  $\delta > 0$  que depende de  $n_0$  tal que si  $x_0 \in \mathbb{R}$  y  $|x_0 - x^*| < \delta$ , entonces  $|x(n, n_0, x_0) - x^*| < \epsilon$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$  tal que  $n \geq n_0$ .

Sea  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $x_0 \neq 0$  y  $|x_0 - x^*| < \delta$ . Pongamos  $M = \frac{\epsilon}{|x_0|}$ . Sea  $n \in \mathbb{Z}_+$  con  $n \geq n_0$ . Luego, se sigue que  $|x(n, n_0, x_0) - x^*| < \epsilon$ . Esto implica que  $|\Phi(n)x_0| < \epsilon$ . De

donde  $|\Phi(n)||x_0| < \epsilon$ . Lo que quiere decir que  $|\Phi(n)| \leq \frac{\epsilon}{|x_0|}$ . Notemos que  $M \in \mathbb{R}^+$  y depende de  $n_0$ . Además,  $|\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)| \leq M$ , para cada  $n \geq n_0$ .

Recíprocamente, supongamos que existe  $M \in \mathbb{R}^+$  que depende de  $n_0$ , de tal forma que  $|\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)| \leq M$ , para cada  $n \geq n_0$ . Veamos que  $x^* = 0$  es estable. Sea  $\epsilon > 0$ . Ahora, veamos que existe  $\delta > 0$ , tal que si  $|x_0 - x^*| < \delta$ , entonces  $|x(n, n_0, x_0) - x^*| < \epsilon$ . Para lo cual, analizamos  $|x(n, n_0, x_0) - x^*|$ . Notemos que:

$$|x(n, n_0, x_0) - x^*| = |\Phi(n)x_0| = |\Phi(n)||x_0|.$$

Puesto que se requiere que  $|\Phi(n)x_0| < \epsilon$ , necesitamos acotar el término  $\Phi(n)$ . Debido a que  $|\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)| \leq M$ , se sigue que  $\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \leq |\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)| \leq M$ , de donde,  $\Phi(n) \leq M$ , para cada  $n \geq n_0$ . Luego, pongamos  $\delta = \frac{\epsilon}{M}$ . Ahora, supongamos que  $|x_0 - x^*| < \delta$  y sea  $n \geq n_0$ . Esto significa que  $|x_0| < \frac{\epsilon}{M}$ . Esto es,  $M|x_0| < \epsilon$ . Debido a que  $\Phi(n) \leq M$ , se sigue que  $|\Phi(n)x_0| < \epsilon$ . Esto implica que  $|x(n, n_0, x_0) - x^*| < \epsilon$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$  tal que  $n \geq n_0$ . Lo que quiere decir que  $x^* = 0$  es estable.

(b) La prueba es similar al inciso (a) de esta proposición.

(c) Supongamos que  $x^* = 0$  es asintóticamente estable. Veamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)| = 0$ . Debido a que  $x^* = 0$  es asintóticamente estable, se tiene que  $x^* = 0$  es estable y es atractor. Por ser  $x^* = 0$  atractor, existe  $\eta > 0$  que depende de  $n_0$  tal que si  $x_0 \in \mathbb{R}$  y  $|x_0 - x^*| < \eta$ , entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, n_0, x_0) = x^*.$$

Sea  $x_0 \in \mathbb{R}$  con  $|x_0| < \eta$ . Por la propiedad que cumple  $\eta$ , se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, n_0, x_0) = 0$ . Sea  $\epsilon > 0$ . Existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para cada  $n \geq N$ , se sigue que  $|\Phi(n)x_0| < \epsilon|x_0|$ , lo que quiere decir que:

$$\begin{aligned} |\Phi(n)||x_0| &< \epsilon|x_0| \\ |\Phi(n)| &< \epsilon. \end{aligned}$$

Esto es,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\Phi(n)| = 0$ . De donde,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)| = 0$ .

Recíprocamente, supongamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)| = 0$ . Veamos que  $x^* = 0$  es asintóticamente estable. Sea  $n \geq n_0$ . Veamos que existe  $M > 0$ , tal que  $|\Phi(n)| \leq M$ . Sea  $\epsilon > 0$ . Debido a que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)| = 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para cada  $p \geq N$ , se tiene que  $|\Phi(p)| < \epsilon$ . Obtenemos los casos siguientes:

- Caso 1:  $N \leq n$ . Se sigue que  $|\Phi(n)| < \epsilon$ .  
Pongamos  $M = \epsilon$ . Luego,  $M > 0$  tal que  $|\Phi(n)| < M$ .
- Caso 2:  $N > n$ . Sea  $p \geq N$ . Se tiene que:

$$|\Phi(p)| = \left| \prod_{i=n_0}^{p-1} a(i) \right|$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \cdot \prod_{i=n}^{p-1} a(i) \right| \\
 &= \left| \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right| \left| \prod_{i=n}^{p-1} a(i) \right| \\
 &= |\Phi(n)| \left| \prod_{i=n}^{p-1} a(i) \right|.
 \end{aligned}$$

Pongamos  $M = \frac{\epsilon}{\left| \prod_{i=n}^{p-1} a(i) \right|}$ . Dado que  $|\Phi(p)| < \epsilon$ , obtenemos que  $|\Phi(n)| < \frac{\epsilon}{\left| \prod_{i=n}^{p-1} a(i) \right|}$ . Esto significa que  $|\Phi(n)| < M$ .

De los Casos 1 y 2, tenemos que para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $M > 0$  tal que  $|\Phi(n)| < M$ . Lo que quiere decir que, por el inciso (a) de esta proposición,  $x^* = 0$  es estable.

Luego, como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right| = 0$ , se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(n) = 0$ . Esto es,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(n)x_0 = 0$ . Lo que quiere decir que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, n_0, x_0) = 0$ . Esto significa que  $x^* = 0$  es atractor.

Por lo tanto,  $x^* = 0$  es asintóticamente estable.

- (d) Supongamos que  $x^* = 0$  es uniformemente asintóticamente estable. Veamos que existen  $M > 0$  y  $0 < \eta < 1$  tales que  $\left| \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right| \leq M\eta^{n-n_0}$ , para cada  $n \geq n_0$ . Se sigue que  $x^* = 0$  es uniformemente estable y uniformemente atractor.

Por ser  $x^* = 0$  uniformemente estable, por el inciso (b) de esta proposición, se sigue que existe  $M \in \mathbb{R}^+$ , tal que  $\left| \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right| \leq M$ , para cada  $n \geq n_0$ .

Por ser  $x^* = 0$  uniformemente atractor, existe  $\mu > 0$  tal que para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{Z}_+$  que depende de  $\epsilon$  y no depende de  $n_0$  tal que si  $|x_0 - x^*| < \mu$ , entonces  $|x(n, n_0, x_0) - x^*| < \epsilon$ , para cada  $n \geq n_0 + N$ .

Sea  $\epsilon > 0$  tal que  $\epsilon < 1$ . Se sigue que  $|\Phi(n)x_0| < \epsilon$ , para cada  $n \geq n_0 + N$ . Sea  $n \geq n_0 + N$ . Para cada  $n \in [n_0 + N, n_0 + 2N]$ , se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \left| \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right| &= \left| \prod_{i=n_0}^{n_0+N-1} a(i) \right| \left| \prod_{i=n_0+N}^{n-1} a(i) \right| \\
 |x_0| \left| \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right| &= \left| \prod_{i=n_0}^{n_0+N-1} a(i) \right| \left| \prod_{i=n_0+N}^{n-1} a(i)x_0 \right| \\
 |\Phi(n)| &\leq \frac{M\epsilon}{|x_0|} \\
 &= \frac{M}{\epsilon|x_0|} \left( \epsilon^{\frac{1}{N}} \right)^{2N} \\
 &= \tilde{M}\eta^{2N} \\
 &\leq \tilde{M}\eta^{n-n_0},
 \end{aligned}$$

donde  $\tilde{M} = \frac{M}{\epsilon|x_0|}$  y  $\eta = \epsilon^{\frac{1}{N}}$ , para cada  $N \leq n - n_0 \leq 2N$ .

Recíprocamente, supongamos que existen  $M > 0$  y  $0 < \eta < 1$  tales que  $|\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)| \leq M\eta^{n-n_0}$ , para cada  $n \geq n_0$ . Veamos que  $x^* = 0$  es uniformemente asintóticamente estable. Por lo supuesto, existen  $M > 0$  y  $0 < \eta < 1$  tales que  $|\Phi(n)| < M\eta^{n-n_0}$ , para cada  $n \geq n_0$ . Sea  $\delta > 0$ .

Sean  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $|x_0 - x^*| < \delta$  y  $n \geq n_0$ . Se sigue que:

$$\begin{aligned} |\Phi(n)| &\leq M\eta^{n-n_0} \\ |\Phi(n)||x_0| &\leq M\eta^{n-n_0}|x_0| \\ |\Phi(n)x_0| &\leq M|x_0|\eta^{n-n_0} \\ |x(n, n_0, x_0) - x^*| &\leq M|x_0 - x^*|\eta^{n-n_0}. \end{aligned}$$

Esto significa que  $x^* = 0$  es exponencialmente estable. Luego,  $x^* = 0$  es uniformemente asintóticamente estable.

De los incisos (a), (b), (c) y (d) se sigue el resultado. ■

**Ejemplo 2.2.4.** Sean  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ ,  $n_0 \in \mathbb{Z}_+$  y  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Sea  $\eta \in (0, 1)$  y consideremos la ecuación en diferencias  $x(n+1) = a(n)x(n)$ , con  $a : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $a(n) = 1 + \eta^n$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Veamos que el punto de equilibrio  $x^* = 0$  es estable.

Debido a que para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ ,  $1 + \eta^n < \exp(\eta^n)$ , se sigue que:

$$\begin{aligned} \prod_{i=n_0}^{n-1} (1 + \eta^i) &\leq \exp\left(\sum_{i=n_0}^{n-1} \eta^i\right) \\ &\leq \exp\left(\sum_{i=n_0}^{\infty} \eta^i\right) \\ &\leq \exp\left(\frac{\eta^{n_0}}{\eta - 1}\right). \end{aligned}$$

Pongamos  $M = \exp\left(\frac{\eta^{n_0}}{\eta - 1}\right)$ . De donde,  $\prod_{i=n_0}^{n-1} (1 + \eta^i) \leq M$ . Lo que quiere decir que  $|\prod_{i=n_0}^{n-1} (1 + \eta^i)| \leq M$ . De la Proposición 2.2.3-(a), se sigue que  $x^* = 0$  es estable.

**Ejemplo 2.2.5.** Sean  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ ,  $n_0 \in \mathbb{Z}_+$  y  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Consideremos la ecuación en diferencias  $x(n+1) = a(n)x(n)$ , con  $a : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $a(n) = \text{sen}(1+n)$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Veamos que el punto de equilibrio  $x^* = 0$  es uniformemente estable.

Para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ , se tiene que  $\text{sen}(1+n) \leq 1$ . De donde,  $\prod_{i=n_0}^{n-1} \text{sen}(1+i) \leq 1$ . Pongamos  $M = 1$ . Esto es,  $\prod_{i=n_0}^{n-1} \text{sen}(1+i) \leq M$ . Se sigue que  $|\prod_{i=n_0}^{n-1} \text{sen}(1+i)| \leq M$ .

De la Proposición 2.2.3-(b),  $x^* = 0$  es uniformemente estable.

**Ejemplo 2.2.6.** Sean  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ ,  $n_0 \in \mathbb{Z}_+$  y  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Consideremos la ecuación en diferencias  $x(n+1) = a(n)x(n)$ , con  $a : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $a(n) = \frac{n+1}{n+2}$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Veamos que el punto de equilibrio  $x^* = 0$  es asintóticamente estable.

Se tiene que:

$$\prod_{i=n_0}^{n-1} \frac{i+1}{i+2} = \binom{n_0+1}{n_0+2} \binom{n_0+2}{n_0+3} \binom{n_0+3}{n_0+4} \cdots \binom{n-1}{n} \binom{n}{n+1} = \frac{n_0+1}{n+1}.$$

Lo que quiere decir que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=n_0}^{n-1} \frac{i+1}{i+2} = 0$ . Esto significa que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \prod_{i=n_0}^{n-1} \frac{i+1}{i+2} \right| = 0$ . De la Proposición 2.2.3-(c), se tiene que  $x^* = 0$  es asintóticamente estable. Luego,  $\prod_{i=n_0}^{n-1} \frac{i+1}{i+2} \leq 1$ . Pongamos  $M = 1$ . Se sigue que,  $\left| \prod_{i=n_0}^{n-1} \frac{i+1}{i+2} \right| \leq M$ .

De la Proposición 2.2.3-(b), se tiene que  $x^* = 0$  es uniformemente estable.

**Ejemplo 2.2.7.** Sean  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ ,  $n_0 \in \mathbb{Z}_+$  con  $n_0 \geq 5$  y  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Consideremos la ecuación en diferencias  $x(n+1) = a(n)x(n)$ , con  $a : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $a(n) = \frac{1}{n}$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Veamos que el punto de equilibrio  $x^* = 0$  es uniformemente asintóticamente estable.

Se tiene que:

$$\begin{aligned} \prod_{i=n_0}^{n-1} \frac{1}{i} &= \frac{(n_0-1)!}{(n-1)!} \\ &\leq \frac{(n_0-1)!}{n!} \\ &= \left(\frac{1}{n!}\right) (n_0-1)! \end{aligned}$$

Debido a que  $n! > 2^n$ , para cada  $n \geq 4$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n!}\right) (n_0-1)! &< \left(\frac{1}{2^n}\right) (2^{n_0-1}) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}. \end{aligned}$$

Pongamos  $M = \eta = \frac{1}{2}$ . Se sigue que  $\prod_{i=n_0}^{n-1} \frac{1}{i} \leq M\eta^{n-n_0}$ . De donde,  $\left| \prod_{i=n_0}^{n-1} \frac{1}{i} \right| \leq M\eta^{n-n_0}$ .

De la Proposición 2.2.3-(d),  $x^* = 0$  es uniformemente asintóticamente estable.

En general, el Teorema 2.1.9 no es válido, un caso es precisamente con las ecuaciones en diferencias no autónomas o no lineales. Para verificar esto, en el siguiente ejemplo se muestra una ecuación en diferencias de primer orden no lineal y no autónoma tal que el punto de equilibrio es atractor y no uniformemente atractor.

**Ejemplo 2.2.8.** Sean  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ ,  $n_0 \in \mathbb{Z}_+$  y  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Consideremos la ecuación en diferencias  $x(n+1) = \left(\frac{n+1}{2}\right) x^2(n)$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Debido a que esta ecuación en diferencias es no lineal de Tipo 4 [19, pág. 105], se realiza la sustitución  $z(n) = \ln x(n)$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ , con lo que se tiene lo siguiente:

$$x(n+1) = \left(\frac{n+1}{2}\right) x^2(n)$$

$$\begin{aligned}\ln x(n+1) &= \ln \left( \left( \frac{n+1}{2} \right) x^2(n) \right) \\ z(n+1) &= 2z(n) + \ln \left( \frac{n+1}{2} \right), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.\end{aligned}\tag{2.2.3}$$

Por [19, Proposición 2.3.1], se tiene que la solución de la ecuación en diferencias (2.2.3) es de la forma siguiente:

$$z(n) = 2^{n-n_0} z_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} 2^{n-r-1} \ln \left( \frac{r+1}{2} \right).$$

Lo que quiere decir que:

$$\begin{aligned}x(n) &= \exp \left( 2^{n-n_0} \ln x_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} 2^{n-r-1} \ln \left( \frac{r+1}{2} \right) \right) \\ &= \exp(2^{n-n_0} \ln x_0) \cdot \exp \left( \sum_{r=n_0}^{n-1} 2^{n-r-1} \ln \left( \frac{r+1}{2} \right) \right) \\ &= x_0^{2^{n-n_0}} \prod_{r=n_0}^{n-1} \left( \exp \left( \ln \left( \frac{r+1}{2} \right) \right) \right)^{2^{n-r-1}} \\ &= x_0^{2^{n-n_0}} \prod_{r=n_0}^{n-1} \left( \frac{r+1}{2} \right)^{2^{n-r-1}} \\ &= x_0^{2^{n-n_0}} \left( \frac{n_0+1}{2} \right)^{2^{n-n_0-1}} \left( \frac{n_0+2}{2} \right)^{2^{n-n_0-2}} \left( \frac{n_0+3}{2} \right)^{2^{n-n_0-3}} \\ &\quad \dots \left( \frac{n-1}{2} \right)^2 \left( \frac{n}{2} \right).\end{aligned}$$

Veamos que el punto de equilibrio  $x^* = 0$  es atractor y no uniformemente atractor.

Sea  $\mu > 0$  tal que  $\mu < 1$ . Supongamos que  $|x_0| < \mu$ . Se sigue que  $|x_0| < 1$ . De donde,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_0^{2^{n-n_0}} = 0$ . Esto significa que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, n_0, x_0) = 0$ . Lo que quiere decir que  $x^* = 0$  es atractor.

Supongamos que  $x^* = 0$  es uniformemente atractor. Esto significa que existe  $\mu > 0$  tal que para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $N$  independiente de  $n_0$  tal que para cada  $x_0 \in \mathbb{R}$ , si  $|x_0| < \mu$ , entonces  $|x(n, n_0, x_0)| < \epsilon$ , para cada  $n \geq n_0 + N$ .

Consideremos  $\delta > 0$  tal que  $\delta < \mu$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $(n_0 + 1)\delta^2 \geq 2$ . Pongamos  $\epsilon = 1$ . Sea  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $|x_0| = \delta$ . De donde,  $|x_0| < \mu$ . Pero, se sigue que:

$$\begin{aligned}x(n_0 + 1, n_0, x_0) &= \left( \frac{n_0 + 1}{2} \right) x_0^2 \\ |x(n_0 + 1, n_0, x_0)| &= \left( \frac{n_0 + 1}{2} \right) |x_0|^2\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \left( \frac{n_0 + 1}{2} \right) \delta^2 \\
 &\geq 1 \\
 &= \epsilon.
 \end{aligned}$$

Lo que quiere decir que existe  $n \in \mathbb{Z}_+$  con  $n = n_0 + 1$ , tal que  $|x(n, n_0, x_0)| \geq \epsilon$ , contradicción. Esto significa que  $x^* = 0$  no es uniformemente atractor.

**Ejemplo 2.2.9.** Sean  $r, \theta \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ ,  $n_0 \in \mathbb{Z}_+$  y  $r_0, \theta_0 \in \mathbb{R}$ . Consideremos la ecuación en diferencias:

$$\begin{aligned}
 r(n+1) &= \sqrt{r(n)}, \quad r > 0 \\
 \theta(n+1) &= \sqrt{2\pi\theta(n)}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.
 \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Se tiene que un punto de equilibrio de la ecuación (2.2.4) es  $(r^*, \theta^*) = (1, 0)$ . Luego, debido a que esta ecuación en diferencias es no lineal de Tipo 4, por [19, Proposición 2.2.1] se realizan las sustituciones  $z_1(n) = \ln r(n)$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$  y  $z_2(n) = \ln \theta(n)$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ , lo que quiere decir que:

$$\begin{aligned}
 r(n+1) &= \sqrt{r(n)} \\
 \ln r(n+1) &= \ln \sqrt{r(n)} \\
 z_1(n+1) &= \frac{1}{2} z_1(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.
 \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

$$\begin{aligned}
 \theta(n+1) &= \sqrt{2\pi\theta(n)} \\
 \ln \theta(n+1) &= \ln \sqrt{2\pi\theta(n)} \\
 z_2(n+1) &= \frac{1}{2} (\ln(2\pi) + z_2(n)), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.
 \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Por [19, Proposición 2.2.1], las soluciones de las ecuaciones en diferencias (2.2.5) y (2.2.6), son de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 z_1(n) &= \left( \frac{1}{2} \right)^n z_{1_0} \\
 z_2(n) &= \left( \frac{1}{2} \right)^n z_{2_0} + \ln(2\pi)(1 - 2^{-n}).
 \end{aligned}$$

Esto significa que:

$$\begin{aligned}
 r(n) &= \exp \left( \left( \frac{1}{2} \right)^n \ln r_0 \right) \\
 &= (\exp(\ln r_0))^{\left( \frac{1}{2} \right)^n} \\
 &= (r_0)^{2^{-n}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta(n) &= \exp\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n \ln \theta_0 + \ln(2\pi)(1 - 2^{-n})\right) \\ &= (\exp(\ln \theta_0))^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} (\exp(\ln(2\pi)))^{(1-2^{-n})} \\ &= (\theta_0)^{2^{-n}} (2\pi)^{1-2^{-n}}.\end{aligned}$$

Veamos que el punto de equilibrio  $(r^*, \theta^*) = (1, 0)$  no es estable pero sí es atractor.

Se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} r(n) = 1$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta(n) = 2\pi$ . Supongamos que  $r_0 \neq 0$  y  $\theta_0 = 0$ , se sigue que  $(r(n), \theta(n)) = ((r_0)^{2^{-n}}, 0)$ . De donde,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (r(n), \theta(n)) = (1, 0)$ . Lo que quiere decir que  $(r^*, \theta^*) = (1, 0)$  es atractor.

Supongamos que  $(r^*, \theta^*) = (1, 0)$  es estable. Esto significa que para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $(r_0, \theta_0) \in \mathbb{R}^2$  y  $\|(r_0, \theta_0) - (r^*, \theta^*)\| < \delta$ , entonces  $\|(r(n), \theta(n)) - (r^*, \theta^*)\| < \epsilon$ , para cada  $n \geq n_0$ .

Pongamos  $\epsilon = 1$ . Se tiene que existe  $\delta_1 > 0$  tal que si  $\|(r_0, \theta_0) - (1, 0)\| = \|(r_0 - 1, \theta_0)\| < \delta_1$ , entonces  $\|(r(n), \theta(n)) - (1, 0)\| = \|(r(n) - 1, \theta(n))\| < \epsilon$ , para cada  $n \geq n_0$ .

Sea  $(r_0, \theta_0) \in \mathbb{R}^2$  con  $r_0 > 0$  y  $0 \leq \theta_0 \leq 2\pi$ , tal que  $\|(r_0 - 1, \theta_0)\| < \delta_1$ . Esto implica que  $\|(r(n) - 1, \theta(n))\| < \epsilon$ , para cada  $n \geq n_0$ . Lo que quiere decir que  $|\theta(n)| < 1$ , para cada  $n \geq n_0$ . Se sigue que:

$$\begin{aligned}(\theta_0)^{2^{-n}} (2\pi)^{1-2^{-n}} &< 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (\theta_0)^{2^{-n}} (2\pi)^{1-2^{-n}} &< \lim_{n \rightarrow \infty} 1.\end{aligned}$$

Esto significa que  $2\pi \leq 1$ , contradicción. Esto es,  $\delta_1$  no puede existir, con lo que para  $\epsilon = 1$  no se cumple la definición de estabilidad. Lo que quiere decir que  $(r^*, \theta^*) = (1, 0)$  es inestable.

Existe la posibilidad de que un punto de equilibrio de un sistema dinámico no atraiga de forma local algunas iteraciones, pero atraiga globalmente a todas las iteraciones. Veamos el ejemplo siguiente:

**Ejemplo 2.2.10.** Sean  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función y  $a \in \mathbb{R}^+$ . Consideremos la función de la forma siguiente:

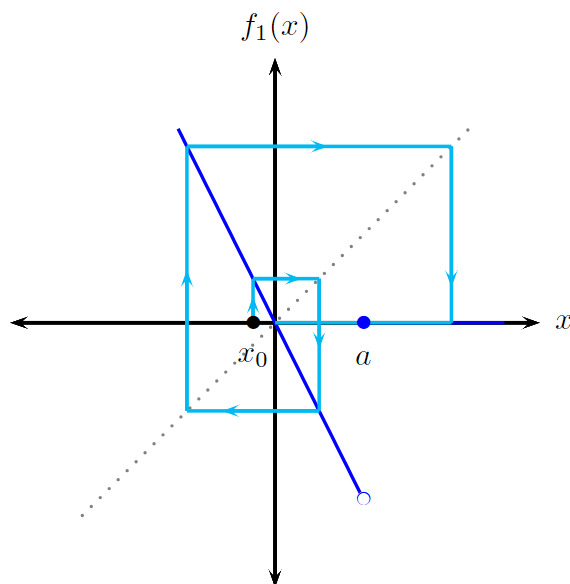
$$f_a(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < a, \\ 0 & \text{si } x \geq a. \end{cases}$$

Sea  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ . La ecuación en diferencias definida por  $f_a$  es  $x(n+1) = f_a(x(n))$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$  y su solución es de la forma siguiente:

$$x(n) = \begin{cases} (-2)^n x_0 & \text{si } (-2)^{n-1} x_0 < a, \\ 0 & \text{si } (-2)^{n-1} x_0 \geq a, \end{cases}$$

para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$  con  $x(0) = x_0$ .

Se tiene que el único punto de equilibrio de la ecuación en diferencias es  $x^* = 0$ . Veamos que  $x^* = 0$  es inestable y atractor global.

Figura 2.10:  $x(n+1) = f_2(x(n))$ .

- Caso 1:  $x_0 \geq a$ . Se sigue que  $x(n) = 0$ , para cada  $n \geq 1$ .
  - Caso 2:  $x_0 < a$ . Existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $x(k) \geq a$ . Luego,  $x(n) = 0$ , para cada  $n > k$ .
- Veamos que para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq N$ , entonces  $|x(n)| < \epsilon$ .  
 Sea  $\epsilon > 0$ . Pongamos  $N = k$ . Se sigue que  $n > k$ , entonces  $|x(n) - 0| < \epsilon$ . Esto significa que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = 0$ .

De los Casos 1 y 2, se sigue que  $x^* = 0$  es atractor global.

Veamos que  $x^* = 0$  es inestable. Para esto, supongamos que  $x^* = 0$  es estable. Esto significa que para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $x_0 \in \mathbb{R}$  y  $|x_0 - x^*| < \delta$ , entonces  $|x(n, n_0, x_0) - x^*| < \epsilon$ .

Sea  $\epsilon > 0$ . Pongamos  $\epsilon = a$ . Se tiene que existe  $\delta_a > 0$  tal que si  $|x_0| < \delta_a$ , entonces  $|x(n, n_0, x_0)| < \epsilon$ , para cada  $n \geq n_0$ . Sea  $x_0 \in \mathbb{R}$ , tal que  $|x_0| < \delta_a$ . Esto implica que  $|x(n, n_0, x_0)| = |(-2)^n x_0| < \epsilon$ , para cada  $n \geq n_0$ . Lo que quiere decir que  $2^n x_0 < \epsilon$ , contradicción. Esto es,  $\delta_a$  no puede existir, con lo que para  $\epsilon = a$  no se cumple la definición de estabilidad. Lo que quiere decir que  $x^* = 0$  es inestable.

El Ejemplo 2.2.10 muestra que en algunos sistemas dinámicos discretos existen puntos de equilibrio atractores que son inestables. Debido a que  $f_a$  es discontinua en  $x = a$ , es natural preguntarse si se puede construir en una dimensión un ejemplo que involucre una función continua con un atractor puntual global inestable. Mediante los siguientes teoremas, podemos ver que esto no es posible.

Veamos el siguiente teorema que será de utilidad en la prueba del resultado que le sucede.

**Teorema 2.2.11** (Criterio de estabilidad asintótica de puntos fijos de funciones no diferenciables [23]). Sean  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua,  $x^* \in \mathbb{R}$  un punto de equilibrio de  $f$  y  $a, b \in \mathbb{R}$ . Se tiene que  $x^*$  es asintóticamente estable si y sólo si existe un intervalo  $(a, b)$  que contiene a  $x^*$  tal que  $f^2(x) > x$  con  $a < x^* < x$  y  $f^2(x) < x$  con  $x < x^* < b$ .

Observemos que en el Teorema 2.2.11 no es necesaria la diferenciabilidad de la función  $f$ . Luego, se tiene el siguiente:

**Teorema 2.2.12.** Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, entonces  $f$  no puede tener un punto de equilibrio atractor global inestable.

*Demostración.* Supongamos que  $f$  tiene un punto fijo inestable  $x^*$  que es un atractor global. Se sigue que  $f^2(x) = x$  sólo tiene como solución a  $x = x^*$ .

Luego, es posible uno de los casos siguientes:

- Caso 1:  $f^2(x) > x$  para cada  $x < x^*$  y  $f^2(x) < x$  para cada  $x > x^*$ . Del Teorema 2.2.11, se sigue que  $x^*$  es asintóticamente estable, por lo que  $x^*$  es estable, contradicción.
- Caso 2:  $f^2(x) < x$  para cada  $x < x^*$  y  $f^2(x) > x$  para cada  $x > x^*$ . Supongamos que  $f^2(x) > x$  para cada  $x > x^*$ . Sea  $x_0 \in \mathbb{R}$  con  $x_0 > x^*$ . De donde,  $f^2(x_0) > x_0 > x^*$ . Lo que quiere decir que  $x^* < x_0 < f^2(x_0) < f^4(x_0) < \dots$ . Esto significa que  $f^{2n}(x_0)$  no converge a  $x^*$  y  $x^*$  no es atractor global, contradicción.

Si  $f^2(x) < x$  para cada  $x < x^*$ , entonces la prueba es similar.

De los Casos 1 y 2, se tiene lo que se quería demostrar. ■

Respecto al resultado obtenido en el Teorema 2.2.12, son necesarias la unidimensionalidad y la continuidad para descartar la existencia de puntos de equilibrio inestables que sean atractores globales. Por lo que existen ejemplos de funciones en  $k$  dimensiones continuas que tienen puntos de equilibrio inestables que son atractores globales. Un sistema dinámico discreto bidimensional en el que ocurre esto es el modelo clásico de Hicks del ciclo comercial [26].

## 2.3. Estabilidad de sistemas lineales

### 2.3.1. Sistemas lineales no autónomos

Sean  $x \in \mathcal{S}_k(\mathbb{Z}_+)$ ,  $n_0 \in \mathbb{Z}_+$  y  $x_0 \in \mathbb{R}^k$ . Consideremos el sistema de ecuaciones en diferencias siguiente:

$$x(n+1) = A(n)x(n), \quad x(n_0) = x_0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{con } n \geq n_0, \quad (2.3.1)$$

con  $A \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathcal{S}(\mathbb{Z}_+))$  no singular.

Recordemos que si  $\Phi(n)$  es una matriz fundamental de (2.3.1), entonces  $\Phi(n, m) = \Phi(n)\Phi^{-1}(m)$  es su matriz de transición de estado [19, pág. 119].

**Teorema 2.3.1.** Consideremos el sistema de ecuaciones en diferencias  $x(n+1) = A(n)x(n)$  tal que  $x^* = 0$ . Se tiene que el punto de equilibrio  $x^*$  es:

- (a) Estable si y sólo si existe  $M \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\|\Phi(n)\| \leq M$ , para cada  $n \geq n_0$ .
- (b) Uniformemente estable si y sólo si existe  $M \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\|\Phi(n, m)\| \leq M$ , para cada  $n \geq m \geq n_0$ .
- (c) Asintóticamente estable si y sólo si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi(n)\| = 0$ .
- (d) Uniformemente asintóticamente estable si y sólo si existen  $M > 0$  y  $0 < \eta < 1$  tales que  $\|\Phi(n, m)\| \leq M\eta^{n-m}$ , para cada  $n \geq m \geq n_0$ .

*Demostración.* Suponemos que  $\Phi(n_0) = I$ , debido a que las condiciones de los incisos (a)-(d) de este teorema son válidas para cada matriz fundamental si se cumplen para una de ellas. Luego,  $x(n, n_0, x_0) = \Phi(n)x_0$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$  con  $n \geq n_0$ .

- (a) Supongamos que  $x^* = 0$  es estable. Veamos que existe  $M \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\|\Phi(n)\| \leq M$ , para cada  $n \geq n_0$ .

Sea  $\epsilon > 0$ . Debido a que  $x^* = 0$  es estable, existe  $\delta > 0$  que depende de  $n_0$  tal que si  $x_0 \in \mathbb{R}^k$  y  $\|x_0 - x^*\| < \delta$ , entonces  $\|x(n, n_0, x_0) - x^*\| < \epsilon$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$  tal que  $n \geq n_0$ . Se sigue que  $\epsilon$  es cota superior de  $\{\|\Phi(n)x\| : x \in \mathbb{R}^k \text{ y } \|x\| \leq 1\}$ . Lo que quiere decir que  $\sup\{\|\Phi(n)x\| : x \in \mathbb{R}^k \text{ y } \|x\| \leq 1\} \leq \epsilon$ . Luego,  $\frac{1}{\delta} \sup\{\|\Phi(n)x\| : x \in \mathbb{R}^k \text{ y } \|x\| \leq 1\} \leq \frac{\epsilon}{\delta}$ . Esto es,  $\sup\{\|\Phi(n)\frac{1}{\delta}x\| : x \in \mathbb{R}^k \text{ y } \frac{1}{\delta}\|x\| \leq 1\} \leq \frac{\epsilon}{\delta}$ . Se sigue que  $\sup\{\|\Phi(n)z\| : z \in \mathbb{R}^k \text{ y } \|z\| \leq 1\} \leq \frac{\epsilon}{\delta}$ , con  $z = \frac{1}{\delta}x$ . De donde,  $\max\{\|\Phi(n)z\| : z \in \mathbb{R}^k \text{ y } \|z\| \leq 1\} \leq \frac{\epsilon}{\delta}$ . Por la Observación 1.2.7, se tiene que  $\|\Phi(n)\| \leq \frac{\epsilon}{\delta}$ . Pongamos  $M = \frac{\epsilon}{\delta}$ .

Lo que quiere decir que  $\|\Phi(n)\| \leq M$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ .

Recíprocamente, supongamos que existe  $M \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\|\Phi(n)\| \leq M$ , para cada  $n \geq n_0$ . Veamos que  $x^* = 0$  es estable. Sea  $\epsilon > 0$ . Ahora, veamos que existe  $\delta > 0$ , tal que si  $\|x_0\| < \delta$ , entonces  $\|\Phi(n)x_0\| < \epsilon$ . Se tiene que:

$$\begin{aligned} \|\Phi(n)\| &\leq M \\ \|\Phi(n)x_0\| &\leq M\|x_0\|. \end{aligned}$$

Luego, pongamos  $\delta = \frac{\epsilon}{M}$ . Ahora, supongamos que  $\|x_0\| < \delta$  y sea  $n \geq n_0$ . Se sigue que  $\|x_0\| < \frac{\epsilon}{M}$ . Esto es,  $M\|x_0\| < \epsilon$ . Debido a que  $\|\Phi(n)\| \leq M$ , se tiene que  $\|\Phi(n)x_0\| < \epsilon$ . Lo que quiere decir que  $x^* = 0$  es estable.

- (b) Supongamos que  $x^* = 0$  es uniformemente estable. Veamos que existe  $M \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\|\Phi(n, m)\| \leq M$ , para cada  $n \geq m \geq n_0$ . Debido a que  $x^* = 0$  es uniformemente estable, se sigue que  $x^* = 0$  es estable. Por el inciso (a) de este teorema, se sigue

que existe  $M \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\|\Phi(n)\| \leq M$ , para cada  $n \geq n_0$ . Luego,  $\prod_{i=m}^{n-1} A(i) \leq \prod_{i=n_0}^{n-1} A(i)$ . Esto significa que  $\Phi(n, m) \leq \Phi(n)$ . Esto es,  $\|\Phi(n, m)\| \leq \|\Phi(n)\|$ . Lo que quiere decir que  $\|\Phi(n, m)\| \leq M$ , para cada  $n \geq m \geq n_0$ .

Recíprocamente, supongamos que existe  $M \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\|\Phi(n, m)\| \leq M$ , para cada  $n \geq m \geq n_0$ . Veamos que  $x^* = 0$  es uniformemente estable. Sea  $\epsilon > 0$ . Ahora, veamos que existe  $\delta > 0$  que no depende de  $n_0$ , tal que si  $\|x_0\| < \delta$ , entonces  $\|\Phi(n)x_0\| < \epsilon$ . Se sigue que:

$$\begin{aligned} \|\Phi(n, m)\| &\leq M \\ \|\Phi(n)\| &\leq M \left\| \prod_{i=n_0}^{m-1} A(i) \right\| \\ \|\Phi(n)x_0\| &\leq M \|\Phi(m)\| \|x_0\| \\ &= M \|\Phi(m, n_0)\| \|x_0\| \\ &= M^2 \|x_0\|. \end{aligned}$$

Pongamos  $\delta = \frac{\epsilon}{M^2}$ . Supongamos que  $\|x_0\| < \delta$  y sea  $n \geq n_0$ . Se sigue que  $\|x_0\| < \frac{\epsilon}{M^2}$ . Debido a que  $\|\Phi(n, m)\| \leq M$ , se tiene que  $\|\Phi(n)x_0\| < \epsilon$ . Observemos que  $\delta$  no depende de  $n_0$ . Lo que quiere decir que  $x^* = 0$  es uniformemente estable.

- (c) Supongamos que  $x^* = 0$  es asintóticamente estable. Veamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi(n)\| = 0$ . Debido a que  $x^* = 0$  es asintóticamente estable, se tiene que  $x^* = 0$  es estable y es atractor. Por ser  $x^* = 0$  atractor, existe  $\eta > 0$  que depende de  $n_0$  tal que si  $x_0 \in \mathbb{R}^k$  y  $\|x_0\| < \eta$ , entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(n)x_0 = 0.$$

Sea  $x_0 \in \mathbb{R}^k$  con  $x_0 \neq 0$ , tal que  $\|x_0\| < \eta$ . Por la propiedad que cumple  $\eta$ , se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(n)x_0 = 0$ .

Sea  $\epsilon > 0$ . Existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para cada  $n \geq N$ , se sigue que  $\|\Phi(n)x_0\| < \epsilon \|x_0\|$ , lo que quiere decir que  $\|\Phi(n)\| < \epsilon$ . Esto es,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(n) = 0$ . De donde,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi(n)\| = 0$ .

Recíprocamente, supongamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi(n)\| = 0$ . Probemos que  $x^* = 0$  es asintóticamente estable. Veamos que existe  $M \in \mathbb{R}^+$ , tal que  $\|\Phi(n)\| \leq M$ , para cada  $n \geq n_0$ . Sea  $\epsilon > 0$ . Debido a que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi(n)\| = 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para cada  $n \geq N$ , se sigue que  $\|\Phi(n)\| < \epsilon$ . Pongamos  $M = \frac{\epsilon}{\|\Phi(N, n)\|}$ . Sea  $n \geq n_0$ . Obtenemos los casos siguientes:

- Caso 1:  $n_0 \geq N$ . Se sigue que  $N \leq n$ . De donde,  $\|\Phi(n)\| < \epsilon$ . Notemos que en este caso  $\|\Phi(N, n)\| = 1$ . Esto es,  $M = \epsilon$ . Así,  $\|\Phi(n)\| \leq M$ .
- Caso 2:  $n_0 < N$ . Se tiene que  $n_0 \leq n < N$ . En este caso,  $\|\Phi(N, n)\| > 0$ . Luego:

$$\|\Phi(N)\| = \|\Phi(n) \cdot \Phi(N, n)\| = \|\Phi(n)\| \|\Phi(N, n)\|.$$

Debido a que  $\|\Phi(N)\| < \epsilon$ , obtenemos que  $\|\Phi(n)\| < \frac{\epsilon}{\|\Phi(N, n)\|}$ . Esto significa que  $\|\Phi(n)\| \leq M$ .

De los Casos 1 y 2, tenemos que existe  $M > 0$  tal que  $\|\Phi(n)\| < M$ , para cada  $n \geq n_0$ . Lo que quiere decir que, por el inciso (a) de este teorema,  $x^* = 0$  es estable.

Luego, como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi(n)\| = 0$ , se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(n) = 0$ . Esto es,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(n)x_0 = 0$ . Lo que quiere decir que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, n_0, x_0) = 0$ . Esto significa que  $x^* = 0$  es atractor. Por lo tanto,  $x^* = 0$  es asintóticamente estable.

- (d) Supongamos que  $x^* = 0$  es uniformemente asintóticamente estable. Veamos que existen  $M > 0$  y  $0 < \eta < 1$  tales que  $\|\Phi(n, m)\| \leq M\eta^{n-m}$ , para cada  $n \geq m \geq n_0$ . Se sigue que  $x^* = 0$  es uniformemente estable y uniformemente atractor.

Debido a que  $x^* = 0$  es uniformemente estable, por el inciso (b) de este teorema, se sigue que existe  $M \in \mathbb{R}^+$ , tal que  $\|\Phi(n, m)\| \leq M$ , para cada  $n \geq m \geq n_0$ .

Por ser  $x^* = 0$  uniformemente atractor, existe  $\mu > 0$  tal que para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{Z}_+$  que depende de  $\epsilon$  y no depende de  $n_0$  tal que si  $\|x_0 - x^*\| < \mu$ , entonces  $\|\Phi(n, n_0) - x^*\| < \epsilon$ , para cada  $n \geq n_0 + N$ .

Sea  $\epsilon > 0$  tal que  $\epsilon < 1$ . Se sigue que existe  $N \in \mathbb{Z}_+$  que depende de  $\epsilon$  y no depende de  $n_0$  tal que si  $\|x_0\| < \mu$ , entonces  $\|\Phi(n, n_0)\| < \epsilon$ , para cada  $n \geq n_0 + N$ . Sea  $x_0 \in \mathbb{R}^k$  con  $x_0 \neq 0$  tal que  $\|x_0\| < \mu$ . Luego,  $\|\Phi(n, n_0)\| < \epsilon$ , para cada  $n \geq n_0 + N$ .

Sean  $m, n \in \mathbb{Z}_+$  tales que  $n \geq m \geq n_0$ . Para cada  $n \in [n_0 + mN, n_0 + (m+1)N]$ , se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \|\Phi(n, m)\| &\leq \|\Phi(n, n_0)\| \\
 &= \|\Phi(n_0 + N, n_0) \Phi(n_0 + 2N, n_0 + N) \Phi(n_0 + 3N, n_0 + 2N) \cdots \\
 &\quad \Phi(n_0 + mN, n_0 + (m-1)N) \Phi(n, n_0 + mN)\| \\
 &\leq \|\Phi(n_0 + N, n_0)\| \|\Phi(n_0 + 2N, n_0 + N)\| \|\Phi(n_0 + 3N, n_0 + 2N)\| \cdots \\
 &\quad \|\Phi(n_0 + mN, n_0 + (m-1)N)\| \|\Phi(n, n_0 + mN)\| \\
 &\leq M\epsilon^m \\
 &= \frac{M}{\epsilon} \left(\epsilon^{\frac{1}{N}}\right)^{(m+1)N} \\
 &= \tilde{M}\eta^{(m+1)N} \\
 &\leq \tilde{M}\eta^{n-n_0} \\
 &\leq \tilde{M}\eta^{n-m},
 \end{aligned}$$

donde  $\tilde{M} = \frac{M}{\epsilon}$  y  $\eta = \epsilon^{\frac{1}{N}}$ , para cada  $mN \leq n - n_0 \leq (m+1)N$ .

Recíprocamente, supongamos que existen  $M > 0$  y  $0 < \eta < 1$  tales que  $\|\Phi(n, m)\| \leq M\eta^{n-m}$ , para cada  $n \geq m \geq n_0$ .

Por el inciso (b) de este teorema, se tiene que  $x^* = 0$  es uniformemente estable.

Veamos que  $x^* = 0$  es uniformemente atractor. Es decir, veamos que existe  $\mu > 0$  tal que para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $N$  que no depende de  $n_0$  tal que para cada  $x \in \mathbb{R}^k$  con  $\|x_0 - x^*\| < \mu$ , se cumple que  $\|x(n, n_0, x_0) - x^*\| < \epsilon$ , para cada  $n \geq n_0 + N$ . Pongamos  $\mu = 1$ . Sea  $\epsilon > 0$ . Como  $0 < \eta < 1$ , se sigue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta^N = 0$ , lo que quiere

decir que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\eta^N < \frac{\epsilon}{M}$ . Sean  $m \geq n_0$  y  $x_0 \in \mathbb{R}^k$  tal que  $\|x_0\| < 1$ . Sea  $n \geq n_0 + N$ . Se tiene que:

$$\|\Phi(n, n_0)x_0\| = \|x_0\|\|\Phi(n, n_0)\| < \|\Phi(n, n_0)\| < M\eta^{n-n_0} \leq M\eta^N < M\frac{\epsilon}{M} = \epsilon.$$

Se sigue que  $\|\Phi(n, n_0)x_0\| < \epsilon$ , para cada  $n \geq n_0 + N$ . Luego,  $\|x(n, n_0, x_0)\| < \epsilon$ , para cada  $n \geq n_0 + N$ . Lo que quiere decir que  $x^* = 0$  es uniformemente atractor.

Por lo tanto,  $x^* = 0$  es uniformemente asintóticamente estable.

De los incisos (a), (b), (c) y (d) se sigue el resultado. ■

Del teorema anterior, surgen los corolarios enunciados a continuación.

**Corolario 2.3.2.** Consideremos el sistema de ecuaciones en diferencias lineal (2.3.1). Se cumplen las proposiciones siguientes:

- (a) El punto de equilibrio  $x^* = 0$  es estable si y sólo si todas las soluciones del sistema de ecuaciones en diferencias lineal (2.3.1) son acotadas.
- (b) El punto de equilibrio  $x^* = 0$  es exponencialmente estable si y sólo si  $x^* = 0$  es uniformemente asintóticamente estable.

*Demostración.* (a) La prueba se sigue del Teorema 2.3.1-(a).

- (b) Supongamos que  $x^* = 0$  es exponencialmente estable. Se sigue que  $x^* = 0$  es uniformemente asintóticamente estable.

Recíprocamente, supongamos que  $x^* = 0$  es uniformemente asintóticamente estable. Veamos que  $x^* = 0$  es exponencialmente estable. Por lo supuesto, existen  $M_1 > 0$  y  $0 < \eta < 1$  tales que  $\|\Phi(n, m)\| \leq M_1\eta^{n-n_0}$ , para cada  $n \geq m \geq n_0$ .

Sean  $x_0 \in \mathbb{R}^k$  tal que  $\|x_0 - x^*\| < \delta$  y  $n \geq n_0$ . Se sigue que:

$$\begin{aligned} \|\Phi(n, m)\| &\leq M_1\eta^{n-n_0} \\ \|\Phi(m)\Phi(n, m)\| &\leq \|\Phi(m)\|M_1\eta^{n-n_0} \\ \|\Phi(n)\| &\leq M_2M_1\eta^{n-n_0} \\ &\leq M\eta^{n-n_0}, \quad \text{con } M = M_2M_1 \\ \|\Phi(n)x_0\| &\leq M\|x_0\|\eta^{n-n_0} \\ \|x(n, n_0, x_0) - x^*\| &\leq M\|x_0 - x^*\|\eta^{n-n_0}. \end{aligned}$$

Lo que quiere decir que  $x^* = 0$  es exponencialmente estable.

De (a) y (b) se sigue la prueba. ■

Notar que en el Teorema 2.3.1-(c), siempre se cumple que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi(n)\| = 0$ , por lo que para cada  $x_0 \in \mathbb{R}^k$ , se tiene que si  $\|x_0 - x^*\| < \eta$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x(n, n_0, x_0) - x^*\| = 0$ . Por lo tanto,  $\eta$  puede ser  $\infty$ . Ocurre algo similar con el inciso (d) del mismo teorema. De todo lo anterior, se tiene el siguiente:



**Corolario 2.3.3.** Consideremos el sistema de ecuaciones en diferencias lineal (2.3.1). Se tiene que cada propiedad de estabilidad local del punto de equilibrio  $x^* = 0$  implica las propiedades de estabilidad global correspondientes.

A continuación se menciona un importante criterio para determinar la estabilidad uniforme y la estabilidad asintótica uniforme respecto a la ecuación (2.3.1).

**Teorema 2.3.4.** Sea  $x^* = 0$  un punto de equilibrio de la ecuación (2.3.1). Se cumplen las proposiciones siguientes:

- (a) Si  $\sum_{i=1}^k |a_{ij}(n)| \leq 1$ , con  $1 \leq j \leq k$ , para cada  $n \geq n_0$ , entonces  $x^* = 0$  es uniformemente estable.
- (b) Si existe  $\nu > 0$  tal que  $\sum_{i=1}^k |a_{ij}(n)| \leq 1 - \nu$ , con  $1 \leq j \leq k$ , para cada  $n \geq n_0$ , entonces  $x^* = 0$  es uniformemente asintóticamente estable.

*Demostración.* (a) Supongamos que  $\sum_{i=1}^k |a_{ij}(n)| \leq 1$ , con  $1 \leq j \leq k$ , para cada  $n \geq n_0$ . Sea  $n \geq n_0$ . Se sigue que:

$$\sum_{i=1}^k |a_{ij}(n)| \leq 1$$

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^k |a_{ij}(n)| : 1 \leq j \leq k \right\} \leq 1$$

$$\|A\|_1 \leq 1.$$

Lo que quiere decir que  $\|A\|_1 \leq 1$ , para cada  $n \geq n_0$ . Luego:

$$\|\Phi(n, m)\|_1 = \left\| \prod_{i=m}^{n-1} A(i) \right\|_1 \leq \|A(m)\|_1 \|A(m+1)\|_1 \cdots \|A(n-2)\|_1 \|A(n-1)\|_1 \leq 1,$$

para cada  $n \geq m \geq n_0$ . De donde, por el Teorema 2.3.1-(b), el punto de equilibrio  $x^* = 0$  es uniformemente estable.

- (b) La prueba es similar a la del inciso (a) de este teorema.

De los incisos (a) y (b) se sigue el resultado. ■

### 2.3.2. Sistemas lineales autónomos

Sean  $x \in \mathcal{S}_k(\mathbb{Z}_+)$ ,  $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^k$  y  $A \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{R})$  no singular. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias:

$$x(n+1) = Ax(n), \quad x(n_0) = x_0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{con } n \geq n_0. \quad (2.3.2)$$

En el siguiente teorema se resumen los principales resultados de estabilidad para sistemas de ecuaciones en diferencias de la forma (2.3.2). Sin embargo, antes recordemos la siguiente:

**Definición 2.3.5.** Sea  $A \in M_{k \times k}(\mathbb{R})$  no singular. Sea  $\lambda \in \mathbb{R}$  un valor propio de  $A$ . Se tiene que  $\lambda$  es *semisimple* si su bloque de Jordan correspondiente es diagonal.

Notemos que debido a que  $A$  es constante, se sigue que  $\Phi(n) = A^{n-n_0}$  y si  $n_0 = 0$ , entonces  $\Phi(n) = A^n$  [19, pág. 127].

**Teorema 2.3.6.** Sea  $x^* = 0$  un punto de equilibrio de la ecuación (2.3.2). Los siguientes enunciados son verdaderos:

- (a) El punto de equilibrio  $x^* = 0$  es estable si y sólo si  $\rho(A) \leq 1$  y los valores propios de módulo unitario son semisimples.
- (b) El punto de equilibrio  $x^* = 0$  es asintóticamente estable si y sólo si  $\rho(A) < 1$ .

*Demostración.* (a) Sea  $A = P^{-1}JP$ , donde  $P = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k]$ , tal que  $\xi_j$ ,  $j \in \{1, \dots, k\}$  son los vectores propios de  $A$  y  $J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_r)$ , para cada  $r \in \{1, \dots, k\}$  es la forma de Jordan de  $A$  y para cada  $j \in \{1, \dots, r\}$ :

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad (2.3.3)$$

es el bloque de Jordan correspondiente a  $\lambda_i$  [19, pág. 147].

Podemos suponer que  $n_0 = 0$ . Esto significa que  $\Phi(n) = A^n$ . Del Teorema 2.3.1-(a), se tiene que  $x^* = 0$  es estable si y sólo si:

$$\|\Phi(n)\| = \|A^n\| = \|PJP^{-1}\| \leq M,$$

o bien,  $\|J^n\| \leq \tilde{M}$ , donde  $\tilde{M} = \frac{M}{\|P\|\|P^{-1}\|}$ .

Recordemos que podemos escribir  $J_i$  de la ecuación (2.3.3) de la forma siguiente [19, pág. 149]:

$$J_i^n = \begin{pmatrix} \lambda_i^n & \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda_i^{n-2} & \cdots & \binom{n}{s_i-1}\lambda_i^{n-s_i+1} \\ 0 & \lambda_i^n & \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1} & \cdots & \binom{n}{s_i-2}\lambda_i^{n-s_i+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i^n \end{pmatrix}.$$

Se tienen los casos siguientes:

- Caso 1:  $J_i^n \in M_{1 \times 1}(\mathbb{R})$ . Notemos que para que  $J_i^n$  sea acotada debe cumplirse que  $|\lambda_i| = 1$ , o bien,  $|\lambda_i| < 1$ .
  - Subcaso 1.1:  $|\lambda_i| = 1$ . En este caso el bloque de Jordan correspondiente a  $\lambda_i$  es diagonal. Luego,  $|\lambda_i|$  es semisimple.

- Subcaso 1.2:  $|\lambda_i| < 1$ . Se sigue que cada valor propio de  $A$  es menor que 1, en particular,  $\rho(A) < 1$ .
- Caso 2:  $J_i^n \notin M_{1 \times 1}(\mathbb{R})$ . Notemos que  $J_i$  no es acotada si  $|\lambda_i| > 1$  o  $|\lambda_i| = 1$ . De aquí que,  $|\lambda_i| < 1$ . De forma similar al Subcaso 1.2, se sigue que  $\rho(A) < 1$ .

En ambos casos, se tiene que  $\rho(A) \leq 1$  y en caso de que existan valores propios  $\lambda_i$  de módulo unitario, por el Subcaso 1.1, se tiene que son semisimples.

- (b) Para verificar este enunciado se realiza un procedimiento similar al del inciso (a) de este teorema.

La prueba se sigue de los incisos (a) y (b). ■

**Ejemplo 2.3.7.** Consideremos el sistema de ecuaciones en diferencias (2.3.2) con:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinemos la estabilidad del punto de equilibrio  $x^* = 0$ . Se tiene que los valores propios de la matriz  $A$  son  $\lambda_1 \approx 0.561$ ,  $\lambda_2 \approx -0.737$  y  $\lambda_3 \approx -0.074$ . Luego,  $\rho(A) = 0.737 \leq 1$ . Por el Teorema 2.3.6, se sigue que  $x^* = 0$  es asintóticamente estable.

### Criterio explícito para la estabilidad de sistemas de ecuaciones en diferencias bidimensionales

Ahora, expresaremos resultados fundamentales en el análisis de estabilidad del sistema de ecuaciones en diferencias (2.3.2) para  $k = 2$ . Se hace énfasis en este caso en específico debido a que podemos utilizar algunos de los resultados que estudian la estabilidad bidimensional a través de la naturaleza de los valores propios de la matriz de coeficientes.

**Observación 2.3.8.** Consideremos el sistema de ecuaciones en diferencias (2.3.2) para  $k = 2$ . Sea  $x^*$  un punto de equilibrio de (2.3.2). Se tiene que  $x^*$  es asintóticamente estable si y sólo si  $|\operatorname{tr} A| < 1 + \det A < 2$ .

*Demostración.* Consideremos la matriz  $A$  de la forma siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Notemos que el polinomio característico de  $A$  es el siguiente:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$

$$\lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A = 0.$$

Comparando la ecuación anterior con el polinomio  $\lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0$ , se tiene que  $p_1 = -\operatorname{tr} A$  y  $p_2 = \det A$ . Por los Teoremas 1.4.2 y 1.4.4, los valores propios de  $A$  están dentro del disco unitario si y sólo si:

$$\begin{aligned} 1 - \operatorname{tr} A + \det A &> 0 \\ 1 + \operatorname{tr} A + \det A &> 0 \\ 1 - \det A &> 0. \end{aligned}$$

Lo que quiere decir que:

$$|\operatorname{tr} A| < 1 + \det A < 2. \quad (2.3.4)$$

Luego, bajo la condición (2.3.4), se sigue que  $x^*$  es asintóticamente estable. ■

**Ejemplo 2.3.9.** Consideremos el sistema de ecuaciones en diferencias (2.3.2) con:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinemos la estabilidad del punto de equilibrio  $x^* = 0$ . Notemos que  $\operatorname{tr} A = 1$  y  $\det A = \frac{1}{2}$ . Esto significa que se cumple la condición (2.3.4). Por la Observación 2.3.8, se sigue que  $x^* = 0$  es asintóticamente estable.

### Teorema del Subespacio Estable

Respecto al caso general de la ecuación (2.3.2), uno de los principales resultados referente a estabilidad es el Teorema del Subespacio Estable, debido a que no se requiere que la matriz  $A$  sea no singular.

Sea  $\lambda$  un valor propio de  $A$  de multiplicidad  $m$  y sean  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$  los vectores propios generalizados correspondientes a  $\lambda$  [19, pág. 148]. Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ , se sigue que:

$$\begin{aligned} A\xi_i &= \lambda\xi_i \\ A\xi_i &= \lambda\xi_i + \xi_{i-1}. \end{aligned}$$

Lo que quiere decir que los  $\xi_i, i \in \{1, \dots, m\}$  son las soluciones de la ecuación siguiente:

$$(A - \lambda J)^m \xi = 0,$$

donde  $J$  es la matriz de Jordan de  $A$  y  $\xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m]$ .

El generado de los vectores propios generalizados correspondientes a  $\lambda$  es invariante bajo  $A$  y es llamado *espacio propio generalizado*  $E_\lambda$  de  $\lambda$ . Notemos que si  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , entonces  $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$ , debido a que cada espacio propio generalizado contiene al vector cero.

Se dice que la matriz  $A$  es *hiperbólica* si ninguno de sus valores propios está en la circunferencia unitaria. Consideremos el sistema de ecuaciones en diferencias (2.3.2) tal que  $A$  es hiperbólica. Se ordenan todos los valores propios de  $A$  de tal forma que:

- $\Delta_s = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$  tal que  $|\lambda_i| < 1$ , con  $i \in \{1, \dots, r\}$ .
- $\Delta_u = \{\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \dots, \lambda_k\}$  tal que  $|\lambda_i| > 1$ , con  $i \in \{r+1, \dots, k\}$ .

Los espacios propios generados por los vectores propios correspondientes a los valores propios en  $\Delta_s$  y  $\Delta_u$  son denotados como  $W^s$  y  $W^u$ , respectivamente.

**Teorema 2.3.10** (Del Subespacio Estable). Consideremos el sistema de ecuaciones en diferencias (2.3.2). Si  $A$  es hiperbólica, se tienen las siguientes afirmaciones:

- (a) Si  $x$  es una solución de (2.3.2), con  $x(0) \in W^s$ , entonces  $x(n) \in W^s$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$  y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = 0.$$

- (b) Si  $x$  es una solución de (2.3.2), con  $x(0) \in W^u$ , entonces  $x(n) \in W^u$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$  y

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} x(n) = 0.$$

*Demostración.* (a) Sea  $x$  una solución de (2.3.2) con  $x(0) \in W^s$ . Debido a que  $AE_\lambda = E_\lambda$ , se sigue que  $AW^s = W^s$ . Esto significa que  $x(n) \in W^s$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ .

Ahora, veamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = 0$ . Debido a que  $x(0) \in W^s$ , se tiene que  $x(0) = \sum_{i=1}^r c_i \xi_i$ , donde los  $\xi_i$ ,  $i \in \{1, \dots, r\}$  son los vectores propios generalizados correspondientes a los elementos de  $\Delta_s$  y  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i \in \{1, \dots, r\}$ .

Sea  $J = P^{-1}AP$  la forma de Jordan de  $A$ . Luego,  $J$  puede escribirse como:

$$J = \begin{pmatrix} J_s & 0 \\ 0 & J_u \end{pmatrix},$$

tal que  $J_s$  y  $J_u$  están compuestas por los valores propios en  $\Delta_s$  y  $\Delta_u$ , respectivamente. Se tiene que los vectores propios generalizados  $\tilde{\xi}_i$ ,  $i \in \{1, \dots, r\}$  de  $J_s$  son de la forma  $\tilde{\xi}_i = P^{-1}\xi_i = P^{-1}(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ir}, 0, 0, \dots, 0)^T$  [11, Lema 3.27]. Luego:

$$\begin{aligned} x(n) &= A^n x(0) \\ &= P J^n P^{-1} \sum_{i=1}^r c_i \xi_i \\ &= P J^n \sum_{i=1}^r c_i \tilde{\xi}_i \\ &= P \begin{pmatrix} J_s^n & 0 \\ 0 & J_u^n \end{pmatrix} \sum_{i=1}^r c_i \tilde{\xi}_i \\ &= P \sum_{i=1}^r c_i \begin{pmatrix} J_s^n & \tilde{\xi}_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Notemos que si  $\lim_{n \rightarrow \infty} J_s^n = 0$ , entonces  $\tilde{\xi}_i = 0$ , para cada  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Lo que quiere decir que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = 0$ .

(b) Para verificar este resultado se realiza un procedimiento similar al del inciso (a) de este teorema.

De los incisos (a) y (b) se tiene el resultado. ■

### Estabilidad de sistemas de ecuaciones en diferencias periódicos

En esta parte del documento, se retoman los sistemas de ecuaciones en diferencias no autónomos, que adicionalmente cumplen la condición de ser periódicos. Por este motivo, se proporcionan definiciones y resultados relacionados a los sistemas de ecuaciones en diferencias periódicos necesarios para comprender el teorema de estabilidad de los mismos.

**Definición 2.3.11.** Sean  $x \in \mathcal{S}_k(\mathbb{Z}_+)$ ,  $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^k$  y  $A \in M_{k \times k}(\mathcal{S}(\mathbb{Z}_+))$  no singular. El sistema de ecuaciones en diferencias:

$$x(n+1) = A(n)x(n), \quad x(n_0) = x_0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{con } n \geq n_0, \quad (2.3.5)$$

es *periódico* si para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ , se tiene que  $A(n+N) = A(n)$ , para algún  $N \in \mathbb{N}$ .

**Lema 2.3.12.** [11, pág. 155] Para un sistema de ecuaciones en diferencias periódico (2.3.5), son válidas las siguientes afirmaciones:

- (a) Si  $\Phi(n)$  es una matriz fundamental, entonces  $\Phi(n+N)$  es una matriz fundamental.
- (b)  $\Phi(n+N) = \Phi(n)C$ , donde  $C \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{R})$  es no singular.
- (c)  $\Phi(n+N, N) = \Phi(n, 0)$ .

**Teorema 2.3.13.** [11, pág. 155] Para cada matriz fundamental  $\Phi(n)$  de (2.3.5) existe una matriz no singular periódica  $P \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathcal{S}(\mathbb{Z}_+))$  de periodo  $N$  tal que:

$$\Phi(n) = P(n)B^n,$$

para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ .

**Definición 2.3.14.** Consideremos el sistema de ecuaciones en diferencias periódico (2.3.5). Se tiene que:

- (a) A la matriz  $C = B^N$ , que se puede hallar utilizando el Lema 2.3.12-(b), se le conoce como *matriz de monodromía* de (2.3.5).
- (b) Los valores propios  $\lambda$  de  $B$  son conocidos como *exponentes de Floquet* de (2.3.5).
- (c) A los valores propios  $\lambda^N$  de  $B^N$  se les llama *multiplicadores de Floquet* de (2.3.5).

Del Teorema 2.3.13, se sigue que si  $\Phi(n) = \Phi(n, n_0)$  es una matriz fundamental de (2.3.5), entonces existe una matriz  $B$  tal que sus valores propios son los exponentes de Floquet  $\lambda$  y existe una matriz periódica  $P(n) = P(n, n_0)$ , tal que  $\Phi(n, n_0) = P(n, n_0)B^n$ ,

donde  $P(n + N, n_0) = P(n, n_0)$ . Luego, notemos que  $B^n$  es acotado si y sólo si  $|\lambda| \leq 1$ , de aquí que  $\Phi(n, n_0)$  es acotado. Por el Teorema 2.3.1-(a), el punto de equilibrio  $x^* = 0$  es estable. Adicionalmente,  $\lim_{n \rightarrow \infty} B^n = 0$  si y sólo si  $|\lambda| < 1$ , lo que quiere decir que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(n, n_0) = 0$ . Por el Teorema 2.3.1-(c), el punto de equilibrio  $x^* = 0$  es asintóticamente estable. Lo anterior se resume a continuación.

**Teorema 2.3.15.** Sea  $x^* = 0$  un punto de equilibrio del sistema de ecuaciones en diferencias periódico (2.3.5). Se tiene que:

- (a) El punto de equilibrio  $x^* = 0$  es estable si y sólo si los exponentes de Floquet  $\lambda$  de (2.3.5) cumplen que  $|\lambda| \leq 1$ .
- (b) El punto de equilibrio  $x^* = 0$  es asintóticamente estable si y sólo si los exponentes de Floquet  $\lambda$  de (2.3.5) cumplen que  $|\lambda| < 1$ .

Del Teorema 2.3.15, se deriva el corolario escrito a continuación, que es primordial en el análisis de las propiedades de estabilidad de los sistemas de ecuaciones en diferencias periódicos.

**Corolario 2.3.16.** Sea  $x^* = 0$  un punto de equilibrio del sistema de ecuaciones en diferencias periódico (2.3.5). Los siguientes argumentos son válidos:

- (a) El punto de equilibrio  $x^* = 0$  es estable si y sólo si los valores propios de la matriz  $C = A(N - 1)A(N - 2) \cdots A(0)$  son de módulo menor o igual que 1.
- (b) El punto de equilibrio  $x^* = 0$  es asintóticamente estable si y sólo si los valores propios de la matriz  $C = A(N - 1)A(N - 2) \cdots A(0)$  son de módulo menor que 1.

De lo anterior, se tiene que para conocer la estabilidad de los sistemas de ecuaciones en diferencias autónomos (2.3.2), los valores propios de  $A$  son determinantes, en contraste, en los sistemas de ecuaciones en diferencias no autónomos periódicos (2.3.5) es necesario analizar los exponentes de Floquet.

**Ejemplo 2.3.17.** Consideremos el sistema de ecuaciones en diferencias (2.3.5) con:

$$A(n) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2+(-1)^n}{2} \\ \frac{2-(-1)^n}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Notemos que la matriz  $A(n)$  es de periodo 2. Se tiene que los valores propios de  $A(n)$  son  $\lambda_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ . De aquí,  $\rho(A) = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ . Se tiene que:

$$B^2 = C = A(0)A(1) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{9}{4} \end{pmatrix}.$$

Lo que quiere decir que los multiplicadores de Floquet son  $\frac{1}{4}$  y  $\frac{9}{4}$ . Por el Corolario 2.3.16-(a), se tiene que  $x^* = 0$  es inestable.

Del Ejemplo 2.3.17, podemos observar que no es necesario calcular la solución explícita de un sistema de ecuaciones en diferencias periódico para determinar su estabilidad, ya que esto se puede realizar de una manera considerablemente más simple utilizando el Corolario 2.3.16.

## 2.4. Análisis del espacio fase

Otra forma de analizar la estabilidad de los sistemas de ecuaciones en diferencias autónomos bidimensionales es mediante diagramas para representar el espacio fase. Para ello, consideremos el sistema de ecuaciones en diferencias (2.3.2) para  $k = 2$ :

$$x(n+1) = Ax(n), \quad x(n_0) = x_0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{con } n \geq n_0, \quad (2.4.1)$$

donde  $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  es no singular de coeficientes constantes.

Recordemos que  $x^* \in \mathbb{R}^2$  es un punto de equilibrio de (2.4.1) si  $Ax^* = x^*$ , o bien  $(A-I)x^* = 0$ . Luego, si  $A-I$  es no singular, entonces  $x^* = 0$  es el único punto de equilibrio del sistema de ecuaciones en diferencias (2.4.1). En contraste, si  $A-I$  es singular, entonces existe una familia de puntos de equilibrio. En este caso, podemos realizar el cambio de variable  $y(n) = x(n) - x^*$  en el sistema (2.4.1) obteniendo el sistema  $y(n+1) = A(n)y(n)$ , que resulta ser equivalente a (2.4.1). Con esto, se tiene que las propiedades de estabilidad de un punto de equilibrio  $x^* \neq 0$  son las mismas que si fuera  $x^* = 0$ . Por ello, en esta sección, podemos asumir que  $x^* = 0$  es el único punto de equilibrio del sistema de ecuaciones en diferencias (2.4.1).

Sean  $x, y \in \mathcal{S}_2(\mathbb{Z}_+)$  y  $J = P^{-1}AP$  la forma de Jordan de la matriz  $A$  de (2.4.1), donde  $P, J \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  son no singulares. Sean  $\lambda_1, \lambda_2$  los valores propios de  $A$ . Dependiendo de la naturaleza de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , se sigue que la matriz  $J$  puede tener una de las formas canónicas siguientes:

- $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  si  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  con  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ .
- $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  en caso de que  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- $J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$  si se cumple que  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$  tales que  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  y  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$  con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$ .

Si hacemos:

$$x(n) = Py(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \quad (2.4.2)$$

se tiene que (2.4.1) se transforma en el sistema de ecuaciones en diferencias siguiente:

$$y(n+1) = Jy(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.4.3)$$

Notemos que si  $x(0) = x_0$  es la condición inicial de (2.4.1), entonces  $y(0) = y_0 = P^{-1}x_0$ . Observemos que las propiedades de los sistemas de ecuaciones en diferencias (2.4.1) y (2.4.3) son las mismas. Antes de proseguir con el método, veamos las siguientes definiciones.



**Definición 2.4.1.** Sea  $y^*$  un punto de equilibrio de (2.4.3). Se dice que  $y^*$  es un *nodo* si todas las trayectorias cercanas al punto de equilibrio convergen a este de forma monótona. Dependiendo cómo sean los valores propios de la matriz  $J$ , el nodo puede clasificarse en diferentes categorías:

- *Nodo asintóticamente estable:* Esto sucede cuando  $|\lambda_1|, |\lambda_2| < 1$ .
- *Nodo repulsor:* Esto sucede cuando  $|\lambda_1|, |\lambda_2| > 1$ .
- *Nodo degenerado:* Esto ocurre si al menos uno de los valores propios  $\lambda_1, \lambda_2$  tiene magnitud igual a 1.
- *Nodo inestable:* Esto sucede si existe al menos un valor propio  $\lambda_1, \lambda_2$  con magnitud mayor que 1.

**Definición 2.4.2.** Sea  $y^*$  un punto de equilibrio de (2.4.3). Se tiene que  $y^*$  es un *punto silla* si algunas trayectorias cercanas al punto de equilibrio convergen hacia él, mientras que otras divergen de él. Esto ocurre si  $|\lambda_1| > 1$  y  $|\lambda_2| < 1$ , o viceversa. Este tipo de punto de equilibrio es inestable.

**Definición 2.4.3.** Sea  $y^*$  un punto de equilibrio de (2.4.3). Decimos que  $y^*$  es un *foco* si las trayectorias cercanas a  $y^*$  convergen o divergen de manera oscilatoria. Esto sucede cuando  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$  con parte real no nula:

- *Foco asintóticamente estable:* Esto ocurre si  $|\lambda_1|, |\lambda_2| < 1$ .
- *Foco inestable:* Esto sucede cuando  $|\lambda_1|, |\lambda_2| > 1$ .

**Definición 2.4.4.** Sea  $y^*$  un punto de equilibrio de (2.4.3). Se tiene que  $y^*$  es un *centro* si todas las trayectorias cercanas al punto de equilibrio no convergen ni divergen del punto de equilibrio, indicando que las soluciones son periódicas. Esto ocurre cuando  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  y no hay parte real dominante. Este tipo de punto de equilibrio es estable.

El objetivo de esta sección es realizar el diagrama del espacio fase de (2.4.3) dependiendo de la forma de la matriz  $J$ , comenzando con el valor inicial  $y_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix}$  en el plano  $y_1 y_2$  y de forma similar a los diagramas de Cobweb [19], se continúa dibujando la órbita  $\mathcal{O}(y_0) = \{y(n, 0, y_0) : n \in \mathbb{Z}_+\}$ . Se tienen los siguientes casos:

- Caso 1:  $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ . Con esta matriz, el sistema (2.4.3) es de la forma siguiente:

$$y(n+1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} y(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Luego,  $y(n) = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} y_0$ . Lo que quiere decir que  $\begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^n y_{10} \\ \lambda_2^n y_{20} \end{pmatrix}$ . De otro modo:

$$\frac{y_2(n)}{y_1(n)} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n \left(\frac{y_{20}}{y_{10}}\right).$$

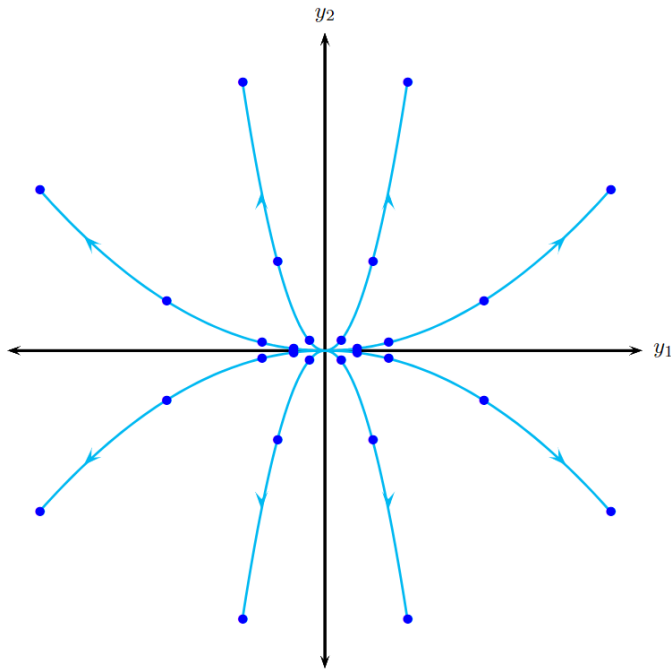


Figura 2.11:  $\lambda_1 > \lambda_2 > 1$ , nodo inestable.

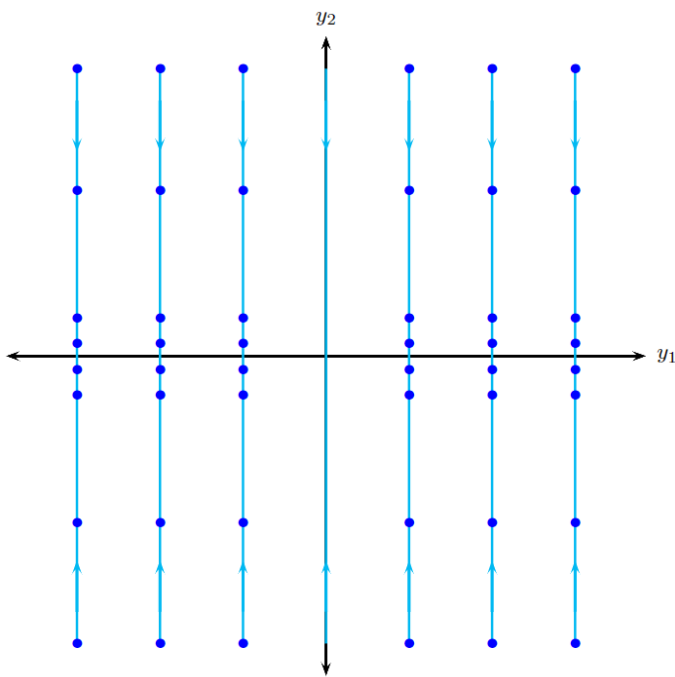


Figura 2.12:  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 < \lambda_1$ , nodo degenerado.

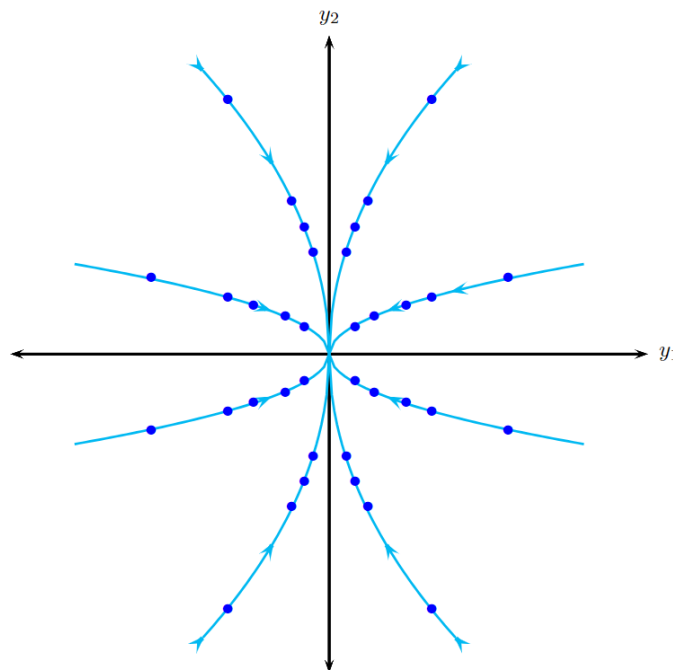


Figura 2.13:  $\lambda_1 < \lambda_2 < 1$ , nodo asintóticamente estable.

- Subcaso 1.1:  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ . En las Figuras 2.11 y 2.12, se muestran las posibles opciones de este subcaso.
  - Subcaso 1.2:  $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ . En las Figuras 2.13 y 2.14 podemos observar las distintas posibilidades de este subcaso.
- Caso 2:  $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ . Sustituyendo  $J$  en el sistema de ecuaciones en diferencias (2.4.3), se tiene que:

$$y(n+1) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} y(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

De donde,  $y(n) = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} y_0$ . Esto significa que  $\begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^n y_{10} + n\lambda^{n-1} y_{20} \\ \lambda^n y_{20} \end{pmatrix}$ . Lo que quiere decir que:

$$\frac{y_2(n)}{y_1(n)} = \frac{\lambda^n y_{20}}{\lambda^n y_{10} + n\lambda^{n-1} y_{20}} = \frac{y_{20}}{y_{10} + \frac{n}{\lambda} y_{20}} = \frac{\lambda y_{20}}{\lambda y_{10} + n y_{20}}.$$

Notemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_2(n)}{y_1(n)} = 0$ . En las Figuras 2.15, 2.16 y 2.17 se puede observar el comportamiento de las soluciones dependiendo del valor que tome  $\lambda$ .

- Caso 3:  $J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ . Se sigue que el sistema (2.4.3) es de la forma siguiente:

$$y(n+1) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} y(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

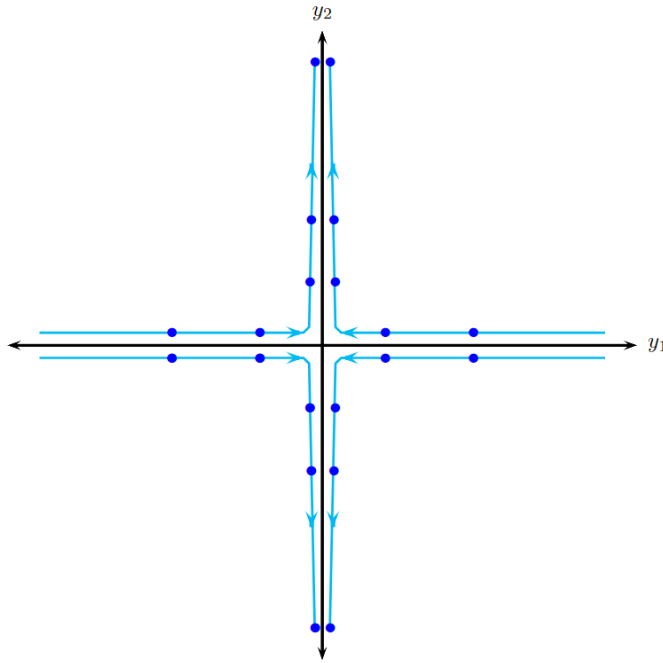


Figura 2.14:  $0 < \lambda_1 < 1$ ,  $\lambda_2 > 1$ , punto silla.

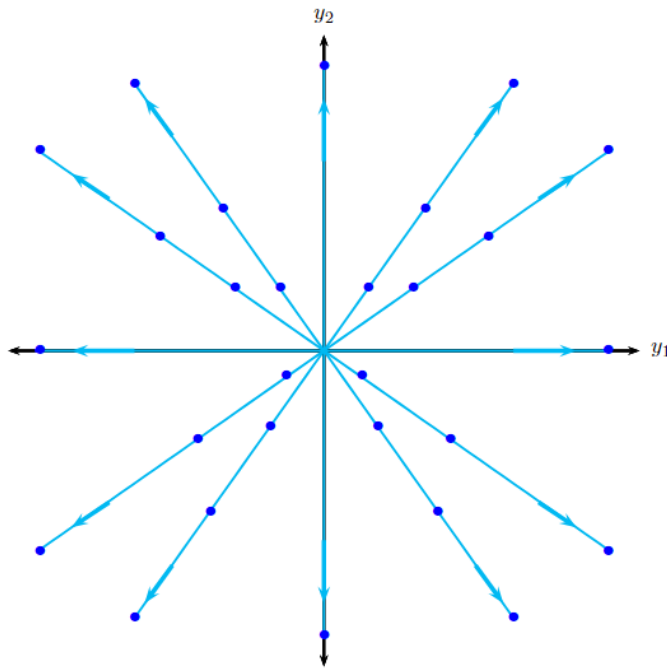
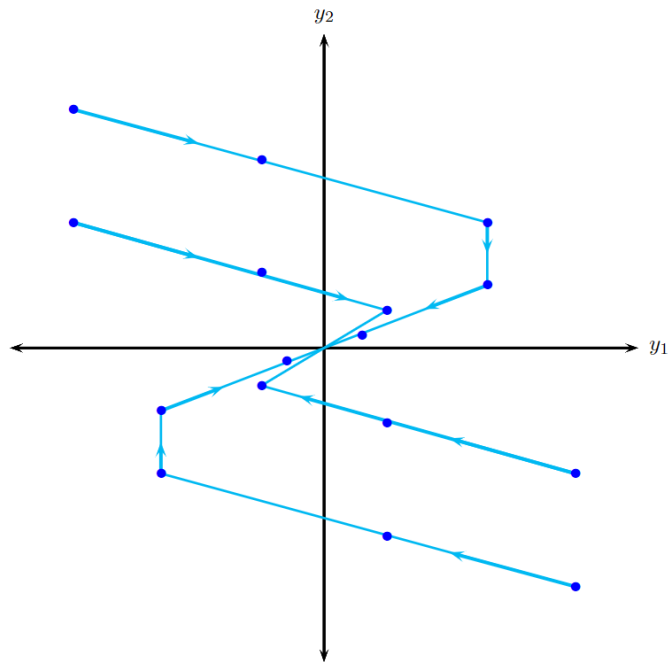
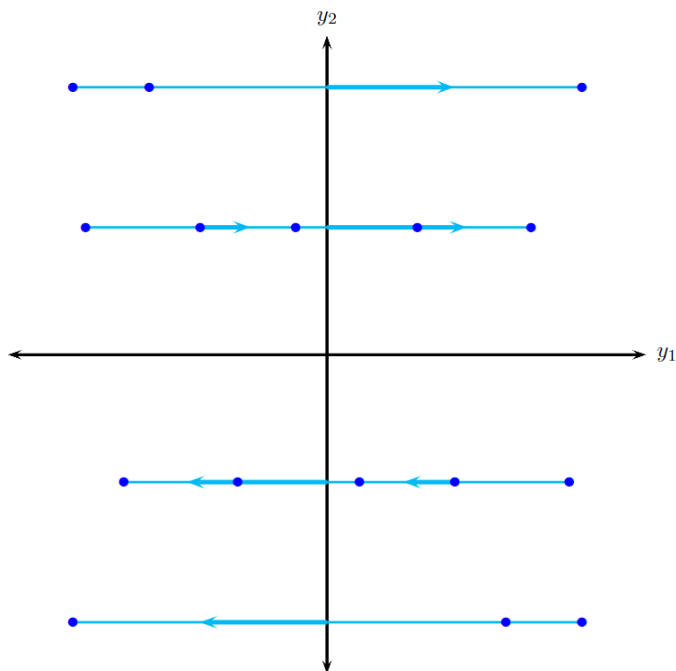


Figura 2.15:  $0 < \lambda_1 = \lambda_2 > 1$ , nodo repulsor.

Figura 2.16:  $\lambda_1 = \lambda_2 < 1$ , nodo asintóticamente estable.Figura 2.17:  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ , nodo degenerado. Todos los puntos en el eje  $y_1$  son puntos de equilibrio.

Recordemos que podemos escribir  $\alpha = \lambda_1 \cos(\omega)$ ,  $\beta = \lambda_1 \sin(\omega)$ ,  $\lambda_1 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  y  $\omega = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ . De aquí que la solución general [19, pág. 90] está dada por  $\begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix} = |\lambda_1|^n \begin{pmatrix} c_1 \cos(n\omega) + c_2 \sin(n\omega) \\ -c_1 \sin(n\omega) + c_2 \cos(n\omega) \end{pmatrix}$  con  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Sustituyendo los valores iniciales  $y_1(0) = y_{10}$  y  $y_2(0) = y_{20}$ , obtenemos que  $c_1 = y_{10}$  y  $c_2 = y_{20}$ . Luego, se sigue que:

$$\begin{aligned} y_1(n) &= |\lambda_1|^n (y_{10} \cos(n\omega) + y_{20} \sin(n\omega)) \\ y_2(n) &= |\lambda_1|^n (-y_{10} \sin(n\omega) + y_{20} \cos(n\omega)). \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Pongamos  $\cos(\gamma) = \frac{y_{10}}{r_0}$  y  $\sin(\gamma) = \frac{y_{20}}{r_0}$  con  $r_0 = \sqrt{y_{10}^2 + y_{20}^2}$ . Se tiene que:

$$\begin{aligned} y_1(n) &= |\lambda_1|^n r_0 \cos(n\omega - \gamma) \\ y_2(n) &= |\lambda_1|^n r_0 \sin(n\omega - \gamma). \end{aligned}$$

Si sustituimos las ecuaciones anteriores en el sistema de ecuaciones en diferencias (2.4.4), se obtiene la solución en coordenadas polares y es de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} r(n) &= r_0 |\lambda_1|^n \\ \theta(n) &= -(n\omega - \gamma). \end{aligned}$$

Nuevamente, dependiendo del valor de  $|\lambda_1|$ , se tienen los subcasos siguientes:

- Subcaso 3.1:  $|\lambda_1| < 1$ . Tenemos un foco asintóticamente estable, como podemos observar en la Figura 2.18.
- Subcaso 3.2:  $|\lambda_1| = 1$ . En este subcaso hay un centro cuyas órbitas son círculos de radio  $r_0$ , como es mostrado en la Figura 2.19.
- Subcaso 3.3:  $|\lambda_1| > 1$ . Aquí hallamos un foco inestable, como se muestra en la Figura 2.20.

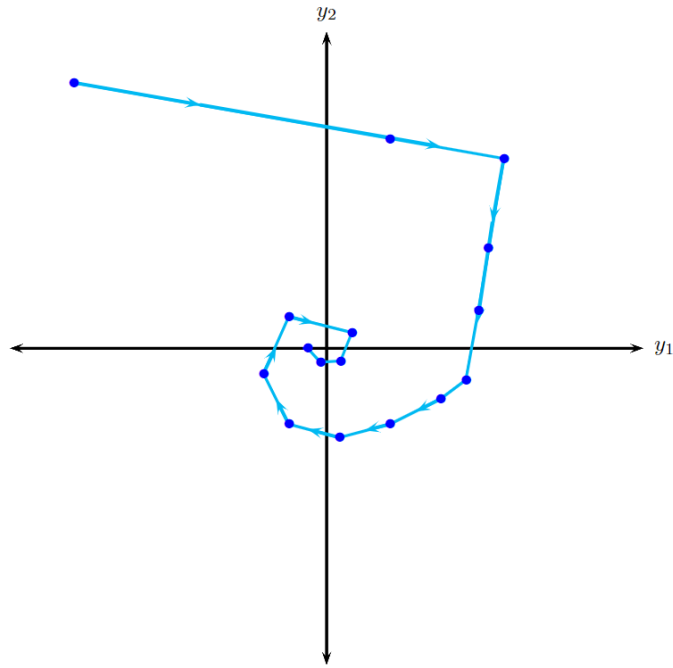
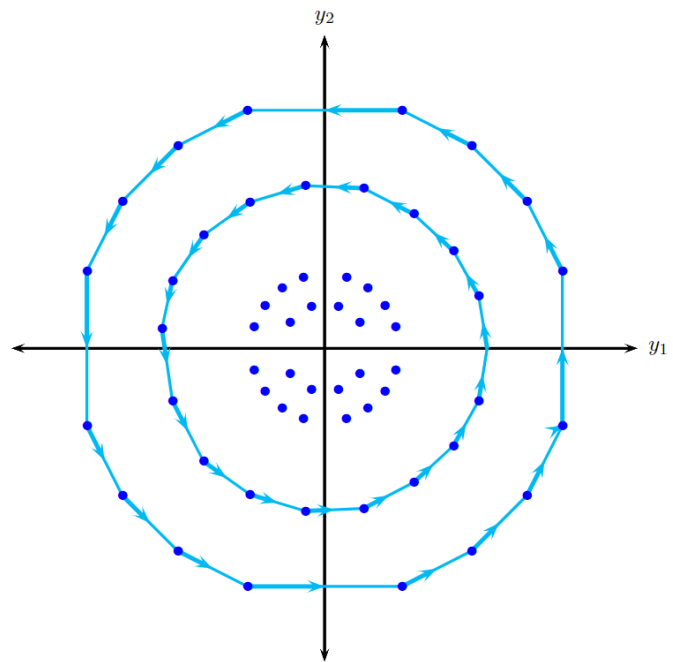
Notemos que hasta ahora únicamente se han realizado los diagramas del espacio fase para el sistema de ecuaciones en diferencias (2.4.3) en el plano  $y_1 y_2$ . Sin embargo, utilizando (2.4.2) se pueden realizar los correspondientes diagramas del espacio fase en el plano  $x_1 x_2$  para el sistema de ecuaciones en diferencias (2.4.1). En los ejemplos mostrados a continuación se ilustra este método.

**Ejemplo 2.4.5.** Realicemos el diagrama del espacio fase del sistema de ecuaciones en diferencias (2.4.1) con:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de  $A$  son  $\lambda_1 = \frac{3}{2}$  y  $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ . Luego, los vectores propios correspondientes a  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son  $\xi_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $\xi_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ , respectivamente. Esto significa que:

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{donde } P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Figura 2.18:  $|\lambda_1| < 1$ , foco asintóticamente estable.Figura 2.19:  $|\lambda_1| = 1$ , centro estable.

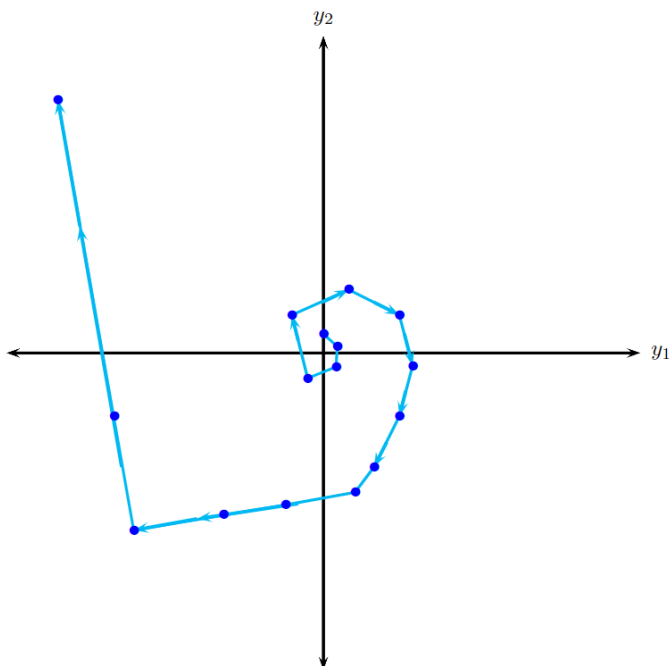


Figura 2.20:  $|\lambda_1| > 1$ , foco inestable.

Notemos que los valores propios de  $J$  son reales y distintos, tal que uno de ellos es mayor que 1 y el otro es menor que 1. Por esto, el diagrama del espacio fase de  $y(n+1) = Jy(n)$  es similar al de la Figura 2.14, por lo que el punto de equilibrio es un punto silla. En la Figura 2.21 podemos observar el diagrama del espacio fase del sistema canónico de este ejemplo.

Como ya se había mencionado, para hallar el diagrama del espacio fase correspondiente en el plano  $x_1x_2$ , utilizamos el hecho de que  $x(n) = Py(n)$ . Podemos establecer la relación entre el sistema  $y_1-y_2$  y el sistema  $x_1-x_2$  observando que  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  en el sistema  $y_1-y_2$  corresponde a  $P\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  en el sistema  $x_1-x_2$  y  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  en el sistema  $y_1-y_2$  corresponde a  $P\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  en el sistema  $x_1-x_2$ . Notemos que el eje  $y_1$  se rota mediante  $\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$  hacia el eje  $x_1$  y el eje  $y_2$  se rota con  $\theta_2 = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$  hacia el eje  $x_2$ . Adicionalmente, el punto inicial  $\begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  en el sistema  $y_1-y_2$  corresponde al punto inicial  $\begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  en el sistema  $x_1-x_2$ .

En la Figura 2.22, se muestra el diagrama del espacio fase del sistema de ecuaciones en diferencias original. Notemos que el eje  $x_1$  está dado por  $c\xi_1 = \begin{pmatrix} 2c \\ c \end{pmatrix}$  y el eje  $x_2$  es de la forma  $c\xi_2 = \begin{pmatrix} 2c \\ -c \end{pmatrix}$  con  $c \in \mathbb{R}$ .

**Ejemplo 2.4.6.** Realicemos el diagrama del espacio fase del sistema de ecuaciones en diferencias (2.4.1) con:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.4.5}$$

Los valores propios de  $A$  son  $\lambda_1 = 1 + \sqrt{3}i$  y  $\lambda_2 = 1 - \sqrt{3}i$ . De aquí que el vector propio



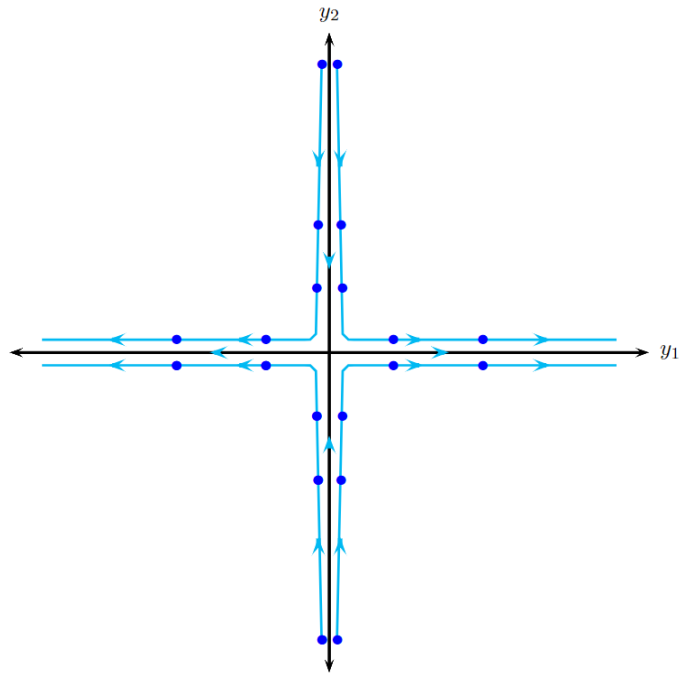


Figura 2.21: Punto silla en el sistema canónico.

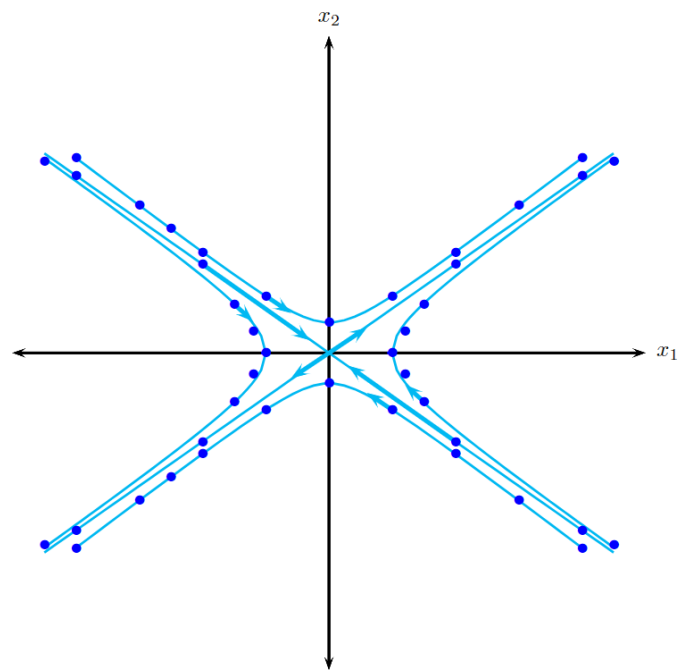


Figura 2.22: Punto silla en el sistema original.

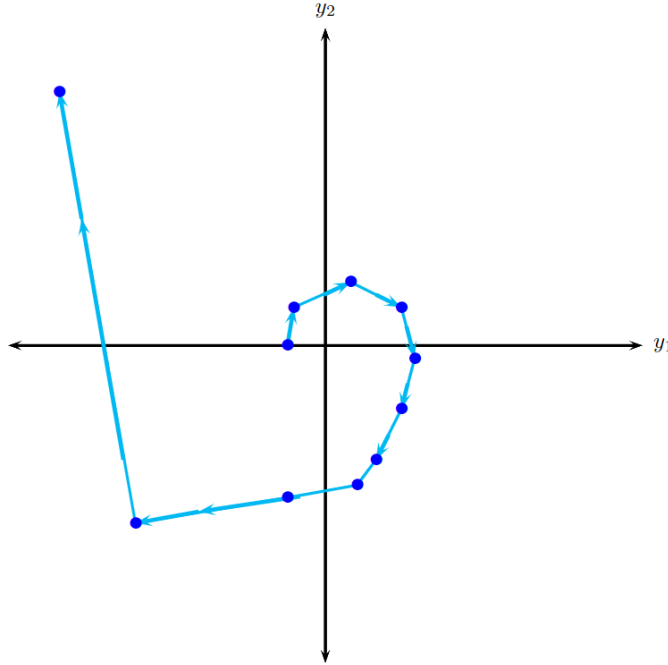


Figura 2.23: Foco inestable en el sistema canónico.

correspondiente a  $\lambda_1$  es  $\xi_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Lo que quiere decir que:

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{donde } P = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Consideremos que  $\begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{16} \\ 0 \end{pmatrix}$ . En la Figura 2.23 se muestra la órbita del punto inicial. Notemos que por la forma de los valores propios y por ende, de la matriz  $J$ , nos encontramos en el Subcaso 3.3. De donde,  $r_0 = \sqrt{y_{10}^2 + y_{20}^2} = \frac{1}{16}$ ,  $|\lambda_1| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ ,  $\omega = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$  y  $\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{y_{20}}{y_{10}}\right) = \pi$ . Lo que quiere decir que la solución del sistema de ecuaciones en diferencias es la siguiente:

$$r(n) = r_0 |\lambda_1|^n = \frac{1}{16} (2^n) = 2^{n-4}$$

$$\theta(n) = \gamma - n\omega = \pi - \frac{n\pi}{3}.$$

De forma similar al ejemplo anterior, se tiene que el punto inicial  $\begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{16} \\ 0 \end{pmatrix}$  en el sistema  $y_1$ - $y_2$  corresponde al punto inicial  $\begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -\frac{1}{16} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{16} \\ 0 \end{pmatrix}$ , como podemos observar en la Figura 2.24. En contraste con el Ejemplo 2.4.5, aquí no se necesita realizar una rotación en los ejes.

**Ejemplo 2.4.7.** Realicemos el diagrama del espacio fase del sistema de ecuaciones en diferencias (2.4.1) con:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

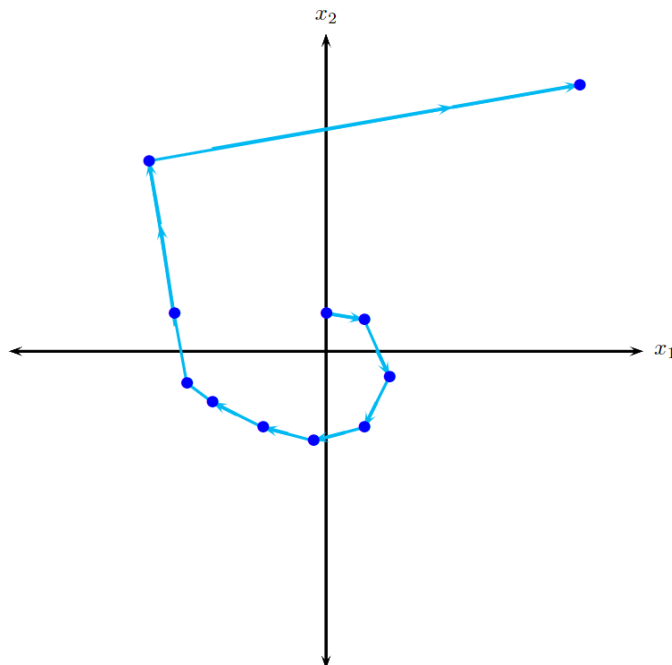


Figura 2.24: Foco inestable en el sistema original.

Los valores propios de  $A$  son  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \frac{1}{2}$  de multiplicidad 2. Luego, los vectores propios correspondientes a  $\lambda$  son  $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Lo que quiere decir que:

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{donde } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.4.6)$$

Consideremos que  $\begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Observemos que los valores propios de  $J$  son iguales y menores que 1, por lo que nos encontramos en el Caso 2 y el diagrama del espacio fase de  $y(n+1) = Jy(n)$  se muestra en la Figura 2.25. Ahora, para pasar al sistema  $x_1$ - $x_2$  nuevamente podemos utilizar el hecho de que  $x(n) = Py(n)$ . Sin embargo, debido a que  $P$  es la matriz identidad, el diagrama del espacio fase del sistema de ecuaciones en diferencias original es el mismo que el del sistema canónico.

## 2.5. Método directo o segundo método de Liapunov

El método directo de Liapunov fue presentado por primera vez por Aleksandr Liapunov en 1892 en su obra titulada “Problème général de la stabilité du mouvement”. En este trabajo, Liapunov introdujo un nuevo método para investigar la estabilidad de ecuaciones diferenciales no lineales. En su publicación, Liapunov formuló el concepto de la función de Liapunov y demostró cómo se podía utilizar para determinar la estabilidad asintótica de un sistema sin necesidad de resolver las ecuaciones diferenciales del mismo. Este enfoque revolucionó el análisis de estabilidad al proporcionar un criterio general basado en la teoría de funciones escalar. Por todo esto, es considerado como una de las principales herramientas de la teoría de la estabilidad. El método depende de encontrar ciertas funciones con

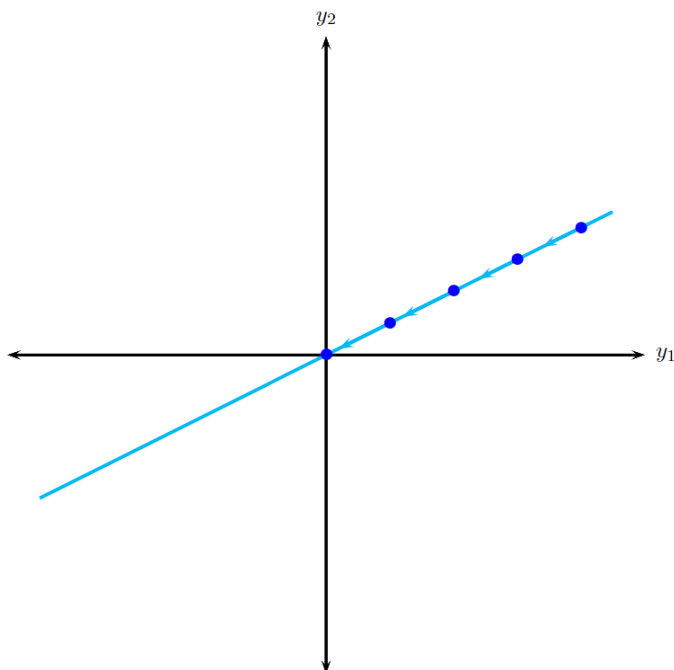


Figura 2.25: Nodo asintóticamente estable en el sistema canónico.

valores reales, llamadas funciones de Liapunov. Sin embargo, el principal inconveniente del método directo reside en determinar la función de Liapunov correcta para una ecuación dada. Entonces, surge el problema de crear algún procedimiento formal que conduzca, a la forma explícita de varias funciones de Liapunov y, como consecuencia de esto, a las correspondientes condiciones de estabilidad. Una vez obtenidos los resultados que establezcan las condiciones de estabilidad, podemos elegir la más útil para el sistema de ecuaciones en diferencias en cuestión.

Por todo lo anterior, en esta sección, estudiamos varios tipos de estabilidad de un sistema de ecuaciones en diferencias autónomo mediante el segundo método de Liapunov, adaptándola al caso discreto.

Adicionalmente, se utiliza lo referente al método directo de Liapunov para analizar la estabilidad de las ecuaciones en diferencias de Volterra. En la actualidad, esta teoría es prácticamente inexistente, debido a que sólo existen unos pocos artículos que tratan de la teoría de la estabilidad para la solución numérica de ecuaciones integrales e integrales diferenciales generales de Volterra y la mayoría de ellos están dedicados al análisis de estabilidad de ecuaciones en diferencias lineales de Volterra con coeficientes constantes o de tipo de convolución [8].

Sea  $x \in \mathcal{S}_k(\mathbb{Z}_+)$ . Consideremos la ecuación en diferencias autónoma siguiente:

$$x(n + 1) = f(x(n)), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \tag{2.5.1}$$

donde  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^k$  es continua y  $G \subseteq \mathbb{R}^k$  tal que  $G$  es continuo (compacto y conexo).

**Definición 2.5.1.** Sean  $k \in \mathbb{N}$  y  $V : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  una función. La *variación de  $V$  relativa a*

(2.5.1) es definida como  $\Delta V(x) = V(f(x)) - V(x)$ . Observemos que:

$$\begin{aligned}\Delta V(x(n)) &= V(f(x(n))) - V(x(n)) \\ &= V(x(n+1)) - V(x(n)), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.\end{aligned}$$

Notemos que si  $\Delta V(x) \leq 0$ , entonces  $V$  es monótona decreciente en el conjunto de soluciones de (2.5.1).

**Definición 2.5.2.** Sean  $k \in \mathbb{N}$ ,  $H \subseteq \mathbb{R}^k$  y  $V : H \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Se dice que  $V$  es una *función de Liapunov en  $H$*  de (2.5.1) si se cumplen las condiciones siguientes:

- (a) La función  $V$  es continua en  $H$ .
- (b) Si  $x, f(x) \in H$ , entonces  $\Delta V(x) \leq 0$ .

**Definición 2.5.3.** Sean  $k \in \mathbb{N}$ ,  $V : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  una función y  $x^* \in \mathbb{R}^k$  un punto de equilibrio de (2.5.1). Se dice que  $V$  es *definida positiva en  $x^*$*  si:

- (a)  $V(x^*) = 0$ .
- (b)  $V(x) > 0$ , para cada  $x \in B(x^*, \gamma)$  con  $x \neq x^*$ , para algún  $\gamma > 0$ .

A continuación se analiza el Teorema de estabilidad de Liapunov. Sin embargo, antes se proporciona un esquema geométrico de la prueba y la explicación del mismo. Por simplicidad, asumimos que el sistema (2.5.1) es plano y que  $x^* = 0$  es el único punto de equilibrio.

Supongamos que (2.5.1) tiene una función de Liapunov definida positiva  $V$  que está definida en la bola  $B(\eta)$ . La Figura 2.26 ilustra la gráfica de  $V$  en un sistema de coordenadas tridimensional, mientras que en la Figura 2.27 se observan las curvas de nivel  $V(x_1, x_2) = c$  de  $V$  en el plano.

Sea  $\epsilon > 0$ . Se tiene que  $B(\epsilon)$  contiene algunas de las curvas de nivel de  $V$ , digamos  $V(x) = \tilde{c}_2$ . Luego, existe  $0 < \delta \leq \epsilon$  tal que la curva de nivel  $V(x) = \tilde{c}_2$  contiene a la bola  $B(\delta)$ . De aquí, si una solución  $x(n, 0, x_0)$  inicia en  $x_0 \in B(\delta)$ , entonces  $V(x_0) \leq \tilde{c}_2$ . Debido a que  $\Delta V(x) \leq 0$ , se tiene que  $V$  es una función monótona decreciente a lo largo de las soluciones de (2.5.1). Lo que quiere decir que  $V(x(n)) \leq V(x_0) \leq \tilde{c}_2$  para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ . De esta forma, la solución  $x(n, 0, x_0)$  siempre permanecerá dentro de la bola  $B(\epsilon)$ . Esto significa que  $x^* = 0$  es estable.

**Teorema 2.5.4** (Estabilidad de Liapunov). Sean  $k \in \mathbb{N}$ ,  $H \subseteq \mathbb{R}^k$ ,  $x^*$  un punto de equilibrio de (2.5.1) y  $V : H \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Si  $V$  es una función de Liapunov para (2.5.1) en una vecindad  $H$  de  $x^*$  y  $V$  es definida positiva con respecto a  $x^*$ , entonces  $x^*$  es estable. Adicionalmente, si  $\Delta V(x) < 0$ , cuando  $x, f(x) \in H$  y  $x \neq x^*$ , se tiene que  $x^*$  es asintóticamente estable. Además, si  $G = H = \mathbb{R}^k$  y  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$ , entonces  $x^*$  es asintóticamente estable global.

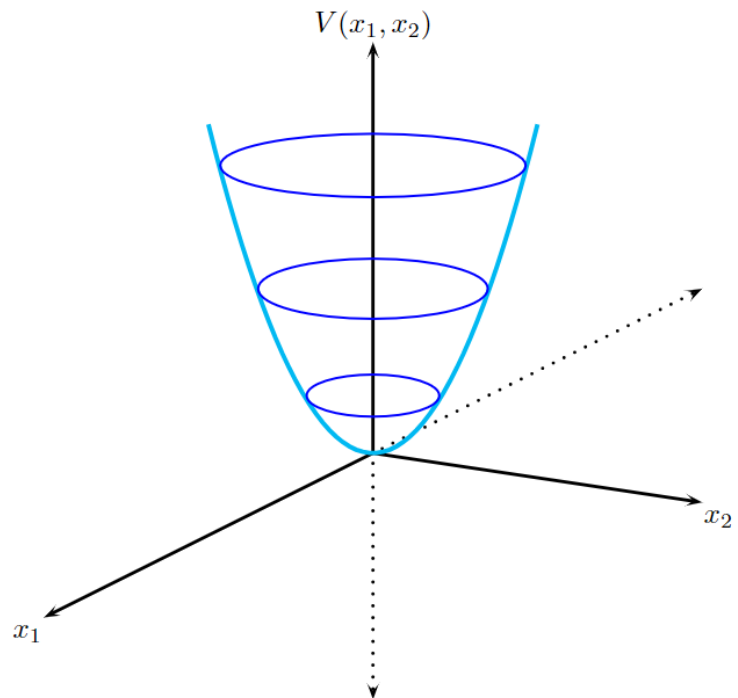


Figura 2.26: Función de Liapunov cuadrática.

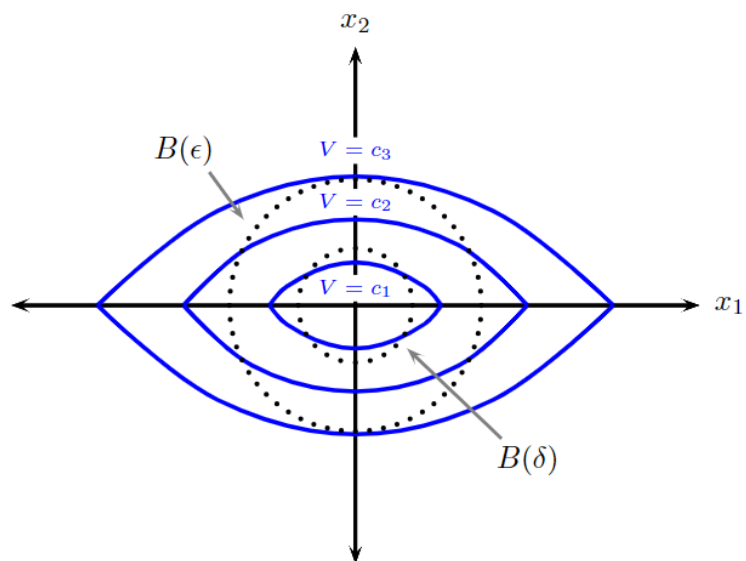


Figura 2.27: Curvas de nivel.

*Demostración.* Supongamos que  $V$  es una función de Liapunov para (2.5.1) en una vecindad  $H$  de  $x^*$  y  $V$  es definida positiva con respecto a  $x^*$ . Veamos que  $x^*$  es estable.

Sea  $\alpha_1 > 0$  tal que  $B(x^*, \alpha_1) \subset G \cap H$ . Debido a que  $f$  es continua, se tiene que:

$$\text{existe } \alpha_2 > 0 \text{ tal que si } x \in B(x^*, \alpha_2) \text{ entonces } f(x) \in B(x^*, \alpha_1). \quad (2.5.2)$$

Sea  $\epsilon > 0$  tal que  $\epsilon \leq \alpha_2$ . Sea  $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

$$\Psi(\epsilon) = \text{mín}\{V(x) : \epsilon \leq \|x - x^*\| \leq \alpha_1\}. \quad (2.5.3)$$

Notemos que  $\Psi$  es continua y  $\Psi(0) < \Psi(\epsilon)$ . De aquí, por el Teorema del valor intermedio, existe  $0 < \delta < \epsilon$  tal que  $\Psi(0) < \Psi(\delta) < \Psi(\epsilon)$ . Luego, si  $\|x - x^*\| < \delta$ , entonces  $V(x) < \Psi(\epsilon)$ .

Veamos que para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para cada  $x_0 \in \mathbb{R}^k$ , si  $\|x_0 - x^*\| < \delta$ , entonces  $\|x(n) - x^*\| < \epsilon$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Para probar esto, supongamos lo contrario. Esto es, existen  $x_0 \in \mathbb{R}^k$  tal que  $\|x_0 - x^*\| < \delta$  y  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\|x(m) - x^*\| \geq \epsilon$ . debido a que  $\|x_0 - x^*\| < \delta$ , se sigue que  $x_0 \in B(x^*, \delta)$ . Por esto y por el hecho de que  $\delta < \epsilon \leq \alpha_2$ , se tiene que  $x_0 \in B(x^*, \alpha_2)$ . Por (2.5.2), obtenemos  $f(x_0) = x(1) \in B(x^*, \alpha_1)$ . Esto es,  $\|x_1 - x^*\| < \alpha_1$ . Por otra parte, sólo es posible que  $\|x_1 - x^*\| < \epsilon$  o  $\|x_1 - x^*\| \geq \epsilon$ . Supongamos que  $\|x_1 - x^*\| \geq \epsilon$ . Lo que quiere decir que  $\epsilon \leq \|x_1 - x^*\| < \alpha_1$ . Por (2.5.3), se tendría que  $\Psi(\epsilon) \leq V(x_1)$ . Pero como la función  $V$  es monótona decreciente se sigue que  $V(x_1) \leq V(x_0)$ . De aquí que  $\Psi(\epsilon) \leq V(x_0)$ . Por otra parte, debido a que  $x_0 \in B(x^*, \delta)$  y  $V(x) < \Psi(\epsilon)$ , obtenemos que  $V(x_0) < \Psi(\epsilon)$ , contradicción. Por lo tanto, si  $\|x_1 - x^*\| < \epsilon$ , entonces  $x_1 \in B(x^*, \epsilon)$ . De forma similar, se puede verificar que para cada  $r \in \{1, \dots, m-1\}$ ,  $x(r) \in B(x^*, \epsilon)$ , o bien  $\|x(r) - x^*\| < \epsilon$ . Luego, debido a que  $x(m-1) \in B(x^*, \epsilon) \subset B(x^*, \alpha_1)$ , se sigue que  $x(m) \in B(x^*, \alpha_1)$ . De aquí que,  $\Psi(\epsilon) \leq V(x(m))$ . Sin embargo,  $V(x(m)) \leq V(x(m-1)) \leq \dots \leq V(x_1) \leq V(x_0) < \Psi(\epsilon)$ , contradicción. Lo que quiere decir que  $x^*$  es estable.

Ahora, veamos que  $x^*$  es asintóticamente estable. Esto es,  $x^*$  es estable y es atractor. Resta probar que  $x^*$  es atractor. Supongamos que si  $x, f(x) \in H$  y  $x \neq x^*$ , entonces  $\Delta V(x) < 0$ . Pongamos  $\eta = \delta$ . Sea  $x_0 \in \mathbb{R}^k$  tal que  $\|x_0 - x^*\| < \eta$ . Debemos demostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = x^*$ . La prueba se hará por contradicción. Para esto, supongamos que  $\{x(n)\}$  no converge a  $x^*$ . Como  $\|x_0 - x^*\| < \eta$ , se sigue que  $x_0 \in B(x^*, \eta)$ . De donde  $x(n) \in B(x^*, \eta)$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Puesto que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) \neq x^*$  y  $\{x(n)\}$  es convergente, existe  $y \in \mathbb{R}^k$  con  $y \neq x^*$ , tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = y$ . Luego, existe una subsucesión  $\{x(n_i)\}$  que converge a  $y$ . Dado que  $y \neq x^*$ , existe  $E \subset B(x^*, \alpha_1)$  tal que  $E$  es una vecindad abierta de  $y$  tal que  $x^* \notin E$ , para cada  $x \in E$ . Luego, definimos una función  $h : E \rightarrow \mathbb{R}$  como  $h(x) = \frac{V(f(x))}{V(x)}$ . Notemos que  $h$  es continua y  $h(x) < 1$  para cada  $x \in E$ . Ahora, si  $\gamma \in (h(y), 1)$ , entonces existe  $\alpha > 0$  tal que si  $x \in B(y, \alpha)$ , entonces  $h(x) \geq \gamma$ . De aquí que, para  $n_i$  suficientemente grande, se sigue que:

$$V(f(x(n_i))) \leq \gamma V(x(n_i - 1)) \leq \gamma^2 V(x(n_i - 2)) \leq \dots \leq \gamma^{n_i} V(x_0).$$

Lo que quiere decir que  $\lim_{n_i \rightarrow \infty} V(x(n_i)) = 0$ . Como  $V$  es continua,  $\lim_{n \rightarrow \infty} V(x(n)) = V(y)$ . Se sigue que  $V(y) = 0$ . Así,  $y = x^*$ , contradicción. Por lo tanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = x^*$ .

Finalmente demostremos que  $x^*$  es asintóticamente estable global. A las hipótesis anteriores agregamos los supuestos de que  $G = H = \mathbb{R}^k$  y  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$ . Resta probar que  $x^*$  es atractor global. Para esto, basta demostrar que todas las soluciones son acotadas y repetir el argumento anterior. Nuevamente se buscará llegar a una contradicción.

Supongamos que existe una solución  $x(n)$  tal que no es acotada. De aquí que,  $x(n)$  contiene una subsucesión  $\{x(n_i)\}$  tal que  $\lim_{n_i \rightarrow \infty} x(n_i) = \infty$ . Como  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$ , se sigue que  $\lim_{n_i \rightarrow \infty} V(x(n_i)) = \infty$ . Esto es una contradicción, debido a que  $V(x_0) > V(x(n_i))$ , para cada  $i \in \mathbb{Z}_+$ . Con lo que se concluye que  $x^*$  es asintóticamente estable global. ■

Otro resultado relevante es el que se presenta a continuación, el cual involucra a soluciones acotadas y es necesario escribirlo como un teorema distinto.

**Teorema 2.5.5.** Sean  $k \in \mathbb{N}$  y  $V : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Si  $V$  es una función de Liapunov en el conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| > \alpha\}$ , para algún  $\alpha > 0$  y  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$ , entonces todas las soluciones de (2.5.1) son acotadas.

*Demostración.* Supongamos que  $V$  es una función de Liapunov en el conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| > \alpha\}$ , para algún  $\alpha > 0$  y  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$ . Veamos que todas las soluciones de (2.5.1) son acotadas.

Debido a que  $V(x(n+1))$  es no creciente y no es definida negativa, existe  $L > 0$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} V(x(n)) = L$ . Realizaremos la prueba por contradicción. Supongamos que existe una sucesión  $\{x(n)\}$  tal que no es acotada. De aquí que existe una subsucesión  $\{x(n_i)\}$  tal que  $\lim_{n_i \rightarrow \infty} x(n_i) = \infty$ . Lo que quiere decir que  $\lim_{n_i \rightarrow \infty} V(x(n_i)) = \infty$ , que es una contradicción, debido a que  $\lim_{n \rightarrow \infty} V(x(n)) = L$ . Por lo tanto, todas las soluciones de la ecuación (2.5.1) son acotadas. ■

A continuación analizamos un sistema de ecuaciones en diferencias en el que, con algunas condiciones, es posible utilizar los dos teoremas anteriores para determinar la estabilidad del mismo.

Sea  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ . Consideremos la siguiente ecuación en diferencias de segundo orden:

$$x(n+1) = \frac{\alpha x(n-1)}{1 + \beta x^2(n)}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{con } n \geq n_0, \quad (2.5.4)$$

donde  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $\beta > 0$ . Esta ecuación es conocida como ecuación con retraso y es común en ciertas aplicaciones donde se modelan procesos dinámicos con memoria o dependencia temporal, como en sistemas biológicos, económicos o en teoría de control.

Calculando los puntos de equilibrio de (2.5.4), obtenemos  $x_1^* = 0$  y  $x_{2,3}^* = \pm \sqrt{\frac{\alpha-1}{\beta}}$ . Recordemos que podemos transformar la ecuación (2.5.4) en un sistema de ecuaciones en



diferencias bidimensional [19, pág. 137]. De aquí que, realizando los cambios de variable  $y_1(n) = x(n-1)$  y  $y_2(n) = x(n)$ , se sigue que:

$$\begin{aligned} y_1(n+1) &= y_2(n) \\ y_2(n+1) &= \frac{\alpha y_1(n)}{1 + \beta y_2^2(n)}. \end{aligned}$$

Consideremos la estabilidad del punto de equilibrio  $y_1^* = (0, 0)$ . La primera elección de una función de Liapunov podría ser  $V(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$ . Notemos que  $V$  es continua y definida positiva en  $\mathbb{R}^2$ . Se tiene que:

$$\begin{aligned} \Delta V(y_1(n), y_2(n)) &= y_1^2(n+1) + y_2^2(n+1) - y_1^2(n) - y_2^2(n) \\ &= y_2^2(n) + \left( \frac{\alpha y_1(n)}{1 + \beta y_2^2(n)} \right)^2 - y_1^2(n) - y_2^2(n) \\ &= \left( \frac{\alpha y_1(n)}{1 + \beta y_2^2(n)} \right)^2 - y_1^2(n) \\ &= \left( \frac{\alpha^2}{(1 + \beta y_2^2(n))^2} - 1 \right) y_1^2(n) \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

$$\leq (\alpha^2 - 1) y_1^2(n). \tag{2.5.6}$$

Debido a que  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$ , por el Teorema 2.5.5 todas las soluciones son acotadas.

Notemos que si  $\alpha^2 > 1$ , el origen no es el único punto de equilibrio. Adicionalmente, de (2.5.6) no se puede garantizar que  $\Delta V < 0$ . Por todo esto, no podemos utilizar el Teorema de Estabilidad de Liapunov para concluir algo acerca de la estabilidad de (2.5.4).

Por otra parte, supongamos que  $\alpha^2 \leq 1$ . Observemos que en este caso, el origen es el único punto de equilibrio de (2.5.4). Luego, por (2.5.6),  $\Delta V \leq 0$ . Si  $\Delta V < 0$ , por el Teorema de Estabilidad de Liapunov (Teorema 2.5.4), se sigue que el punto de equilibrio es asintóticamente estable, como se muestra en la Figura 2.28. En cambio, si  $\Delta V = 0$ , nuevamente no se puede concluir nada de la estabilidad del sistema de ecuaciones en diferencias utilizando el Teorema de Estabilidad de Liapunov (Teorema 2.5.4).

Esta situación es común que ocurra en problemas de Ingeniería y Ciencias, por lo que se necesita realizar un análisis más detallado. Esto se puede lograr mediante el Principio de Invarianza de LaSalle. Antes de realizar esto, veamos la siguiente:

**Definición 2.5.6.** Un conjunto  $A$  es *positivamente invariante* si  $\mathcal{O}(x_0) \subset A$ , para cada  $x_0 \in A$ .

Debido a que este documento sólo se consideran conjuntos positivamente invariantes, nos referimos a ellos únicamente como invariantes. Notemos que  $\mathcal{O}(x_0)$  y  $\Omega(x_0)$  son invariantes.

El siguiente lema responde a la pregunta de bajo qué condiciones  $\Omega(x_0)$  es no vacío para un  $x_0 \in \mathbb{R}^k$  dado.

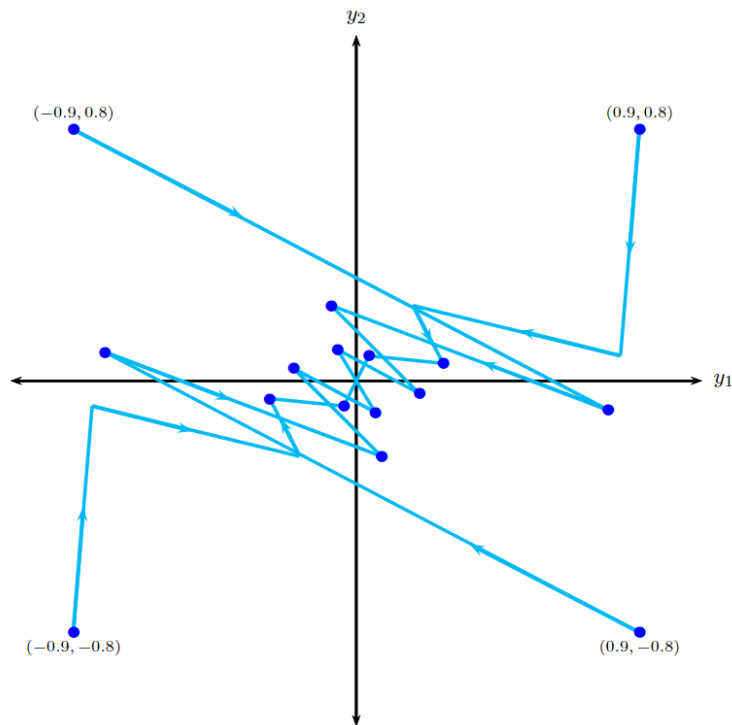


Figura 2.28: Punto de equilibrio asintóticamente estable.

**Lema 2.5.7.** Consideremos la ecuación (2.5.1). Sean  $x_0 \in \mathbb{R}^k$  y  $\Omega(x_0)$  el conjunto de todos los puntos de acumulación de  $x_0$ . Los siguientes argumentos son ciertos:

- (a)  $\Omega(x_0) = \bigcap_{i=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=i}^{\infty} \{f^n(x_0)\}} = \bigcap_{i=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=i}^{\infty} \{x(n)\}}$ .
- (b) Si  $f^j(x_0) = y_0$  con  $j \in \mathbb{N}$ , entonces  $\Omega(y_0) = \Omega(x_0)$ .
- (c)  $\Omega(x_0)$  es cerrado y es invariante.
- (d) Si la órbita  $\mathcal{O}(x_0)$  es acotada, entonces  $\Omega(x_0)$  es no vacía y es acotada.

*Demostración.* (a) Sea  $y \in \Omega(x_0)$ . Se sigue que existe una subsucesión  $\{n_i\}$  de  $\mathbb{N}$  tal que  $\lim_{n_i \rightarrow \infty} f^{n_i} = y$ . De donde,  $y \in \overline{\bigcup_{n=i}^{\infty} \{f^n(x_0)\}}$ , para cada  $i \in \mathbb{Z}_+$ . Lo que quiere decir que  $y \in \bigcap_{i=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=i}^{\infty} \{f^n(x_0)\}}$ .

Sea  $y \in \bigcap_{i=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=i}^{\infty} \{f^n(x_0)\}}$ . Se tiene que  $y \in \overline{\bigcup_{n=i}^{\infty} \{f^n(x_0)\}}$ , para cada  $i \in \mathbb{Z}_+$ . Luego, existe una subsucesión  $\{n_i\} \subset \mathbb{N}$  tal que  $n_i < n_{i+1}$ , para cada  $i \in \mathbb{N}$  y  $\|y - f^{n_i}(x_0)\| < \frac{1}{i}$ . Se sigue que  $\lim_{i \rightarrow \infty} \|y - f^{n_i}(x_0)\| \leq 0$ . De aquí que  $\lim_{n_i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x_0) = y$ . Por lo tanto  $y \in \Omega(x_0)$ .

- (b) Supongamos que  $f^j(x_0) = y_0$  con  $j \in \mathbb{N}$ .

Sea  $y \in \Omega(y_0)$ . Por definición, existe una subsucesión  $\{n_i\}$  de  $\mathbb{N}$  tal que  $\lim_{n_i \rightarrow \infty} f^{n_i}(y_0) = y$ . Debido a que  $y_0 = f^j(x_0)$ , podemos escribir  $f^{n_i}(y_0) = f^{n_i}(f^j(x_0)) = f^{n_i+j}(x_0)$ . De

aquí que  $\lim_{n_i \rightarrow \infty} f^{n_i+j}(x_0) = y$ . Esto implica que  $y$  es un punto de acumulación de la sucesión  $\{f^n(x_0)\}$ , lo que quiere decir que,  $y \in \Omega(x_0)$ .

Sea  $y \in \Omega(x_0)$ . Se sigue que existe una subsucesión  $\{n_i\}$  de  $\mathbb{N}$  que cumple que  $\lim_{n_i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x_0) = y$ . Queremos mostrar que  $y \in \Omega(y_0)$ . Para ello, podemos expresar  $n_i$  como  $n_i = m_i + j$ , tal que  $\lim_{i \rightarrow \infty} m_i = \infty$ . Entonces,  $f^{n_i}(x_0) = f^{m_i+j}(x_0) = f^{m_i}(f^j(x_0)) = f^{m_i}(y_0)$ . Esto implica que  $\lim_{m_i \rightarrow \infty} f^{m_i}(y_0) = y$  y por lo tanto  $y \in \Omega(y_0)$ .

- (c) Por el inciso (a) de este lema, se tiene que  $\Omega(x_0) = \bigcap_{i=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=i}^{\infty} \{f^n(x_0)\}}$ . Luego, como la cerradura de un conjunto es cerrada y la intersección arbitraria de cerrados es cerrada, se sigue que  $\Omega(x_0)$  es cerrado.

Veamos que  $\Omega(x_0)$  es invariante. Sea  $y \in \Omega(x_0)$ . De aquí que existe una subsucesión  $\{n_i\}$  de  $\mathbb{N}$  tal que  $\lim_{n_i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x_0) = y$ . Debido a que  $f$  es continua, tenemos  $\lim_{n_i \rightarrow \infty} f(f^{n_i}(x_0)) = \lim_{n_i \rightarrow \infty} f^{n_i+1}(x_0) = f(y)$ . Lo que quiere decir que  $f(y) \in \Omega(x_0)$ . Por lo tanto,  $\Omega(x_0)$  es invariante.

- (d) Supongamos que  $\mathcal{O}(x_0)$  es acotada. De aquí que existe una constante  $M > 0$  tal que:

$$\|f^n(x_0)\| \leq M \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Luego,  $\overline{\mathcal{O}(x_0)}$  es acotado. Como  $\Omega(x_0) \subset \overline{\mathcal{O}(x_0)}$ , se sigue que  $\Omega(x_0)$  es acotado.

Para verificar que  $\Omega(x_0)$  es no vacía, es posible utilizar el Teorema de Bolzano-Weierstrass, el cual establece que cualquier conjunto acotado en  $\mathbb{R}^k$  tiene al menos un punto de acumulación. En este caso, como  $\mathcal{O}(x_0)$  es acotado, la sucesión  $\{f^n(x_0)\}$  también es acotada, lo que implica que existe una subsucesión  $\{f^{n_i}(x_0)\}$  que converge a algún punto  $y \in \mathbb{R}^k$ . Luego,  $y$  por definición es un punto de acumulación de  $\{f^n(x_0)\}$ , lo que significa que  $y \in \Omega(x_0)$ . Por lo tanto,  $\Omega(x_0)$  es no vacío.

De los incisos (a), (b), (c) y (d) se sigue la prueba del lema. ■

**Definición 2.5.8.** Sean  $k \in \mathbb{N}$ ,  $G \subset \mathbb{R}^k$  y  $V : G \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Liapunov definida positiva en  $G$ . Definimos los siguientes conjuntos:

(a)  $E = \{x \in \overline{G} : \Delta V(x) = 0\}$ .

(b)  $M = \cup D$ , tal que  $D \subset E$  es invariante.

**Teorema 2.5.9** (Pincipio de Invarianza de LaSalle). Sean  $k \in \mathbb{N}$ ,  $G \subset \mathbb{R}^k$  y  $V : G \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Liapunov definida positiva para (2.5.1). Se tiene que para cualquier solución acotada  $x$  de (2.5.1) tal que  $x(n) \in G$  para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ , existe una constante  $c$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) \in M \cap V^{-1}(c)$ .

*Demostración.* Sea  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  una solución de (2.5.1) con  $x(0) = x_0$ , tal que  $x$  es acotada y  $x(n) \in G$  para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Como la solución  $x$  es acotada,  $\mathcal{O}(x_0)$  es acotada. Luego,

por el Lema 2.5.7-(a),  $\Omega(x_0)$  es no vacía. Además,  $\Omega(x_0) \subset \overline{G}$ . Lo que quiere decir que existe  $y \in \Omega(x_0)$ , tal que  $\lim_{n_i \rightarrow \infty} x(n_i) = y$ , para alguna subsucesión  $n_i \in \mathbb{N}$ . Debido a que  $V$  es una función de Liapunov y es definida positiva, se sigue que es decreciente y es acotada inferiormente, esto implica que  $\lim_{n \rightarrow \infty} V(x(n)) = c$ , para alguna constante  $c$ . Ahora, por la continuidad de  $V$ , se sigue que  $\lim_{n_i \rightarrow \infty} V(x(n_i)) = V(y)$  y por ende,  $V(y) = c$ . De aquí que  $V(\Omega(x_0)) = \{c\}$ . Luego,  $\Omega(x_0) \subset V^{-1}(c)$ .

Por otra parte, como  $V(y) = c$ ,  $\Delta V(y) = 0$  para cada  $y \in \Omega(x_0)$ . Lo que quiere decir que  $\Omega(x_0) \subset E$ . Por el Lema 2.5.7-(c),  $\Omega(x_0)$  es invariante, entonces  $\Omega(x_0) \subset M$ .

Por lo tanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) \in \Omega(x_0) \subset M \cap V^{-1}(c)$ . ■

Nuevamente analicemos la ecuación (2.5.4), ahora con el Principio de Invarianza de LaSalle (Teorema 2.5.9). Se tiene que  $E = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \Delta V(y_1, y_2) = 0\}$ . Luego, consideremos los casos siguientes:

- Caso 1:  $\alpha^2 = 1$ . De la ecuación (2.5.5), se tiene que:

$$\Delta V(y_1(n), y_2(n)) = \left( \frac{1}{(1 + \beta y_2^2(n))^2} - 1 \right) y_1^2(n).$$

Notemos que cuando  $y_1 = 0$ ,  $\Delta V(y_1, y_2) = 0$ , para cada valor de  $y_2 \in \mathbb{R}$ . Ahora, cuando  $y_2 = 0$ ,  $\Delta V(y_1, y_2) = 0$ , para cada valor de  $y_1 \in \mathbb{R}$ . Se tiene que estas dos situaciones ocurren en los puntos ubicados en los ejes  $x$  y  $y$  del plano  $xy$ . De aquí que  $E$  consiste en todos los puntos en los ejes  $x$  y  $y$ . Consideremos que  $(y_1(0), y_2(0)) = (a, 0)$ . Se derivan dos subcasos:

- Subcaso 1.1:  $\alpha = 1$ . Se sigue que  $y_1(1) = 0$  y  $y_2(1) = a$ , luego  $y_1(2) = a$  y  $y_2(2) = 0$ . Lo que quiere decir que todas las soluciones que inicien en cualesquiera de los ejes son de período 2 y  $M = E$ .
- Subcaso 2.2:  $\alpha = -1$ . Se sigue que  $\mathcal{O}(a, 0) = \{(a, 0), (0, -a), (-a, 0), (0, a)\}$ . Esto es, cada solución que inicie en alguno de los ejes es de período 4 y  $M = E$ .

Debido a que  $M = E$  en ambos subcasos, el Principio de Invarianza de LaSalle (Teorema 2.5.9) confirma que las soluciones no se alejan de  $E$ . Sin embargo, no necesariamente convergen a un punto específico dentro de este conjunto, puesto que el sistema exhibe un comportamiento periódico. De aquí que todas las soluciones oscilan entre  $(a, 0)$ ,  $(-a, 0)$ ,  $(0, a)$  o  $(0, -a)$ . Lo que quiere decir que el origen no es asintóticamente estable.

- Caso 2:  $\alpha^2 < 1$ . En este caso se tiene que  $E$  es igual al eje  $y$  y  $M = \{(0, 0)\}$ . Luego, debido a que  $M$  es un solo punto, todas las soluciones convergen al origen. Como ya se había mencionado en el análisis anterior, el origen es asintóticamente estable. En la Figura 2.28 se muestra el diagrama del espacio fase para  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

- Caso 3:  $\alpha^2 > 1$ . Nuevamente, bajo este supuesto tampoco se puede concluir nada acerca de la estabilidad de la solución mediante el Principio de Invarianza de LaSalle. Esto significa que la estabilidad es indeterminable.

Es preciso mencionar que en ocasiones, algunas observaciones intuitivas simples hacen que sea más sencillo verificar que un punto de equilibrio no es asintóticamente estable. Veamos el siguiente:

**Ejemplo 2.5.10.** Sean  $x_1, x_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ . Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias:

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= 2x_2(n) - 2x_2(n)x_1^2(n) \\ x_2(n+1) &= \frac{1}{2}x_1(n) + x_1(n)x_2^2(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{con } n \geq n_0. \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

Calculando los puntos de equilibrio del sistema (2.5.7), hallamos que son  $(0, 0)$ ,  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  y  $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .

Analicemos la estabilidad del origen. Consideremos a  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2$  como la función de Liapunov para este ejemplo. Se tiene que:

$$\begin{aligned} \Delta V(x_1(n), x_2(n)) &= x_1^2(n+1) + 4x_2^2(n+1) - x_1^2(n) - 4x_2^2(n) \\ &= [2x_2(n) - 2x_2(n)x_1^2(n)]^2 + 4 \left[ \frac{1}{2}x_1(n) + x_1(n)x_2^2(n) \right]^2 - x_1^2(n) - 4x_2^2(n) \\ &= 4x_2^2(n) - 8x_1^2(n)x_2^2(n) + 4x_1^4(n)x_2^2(n) + x_1^2(n) + 4x_1^2(n)x_2^2(n) \\ &\quad + 4x_1^2(n)x_2^4(n) - x_1^2(n) - 4x_2^2(n) \\ &= 4x_1^4(n)x_2^2(n) + 4x_1^2(n)x_2^4(n) - 4x_1^2(n)x_2^2(n) \\ &= 4x_1^2(n)x_2^2(n)(x_1^2(n) + x_2^2(n) - 1). \end{aligned}$$

Notemos que si  $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ , entonces  $\Delta V(x_1, x_2) \leq 0$ . Consideremos que  $x_0 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ , para cada  $a \in \mathbb{R}$ . En este caso, todas las soluciones que inicien en  $x_0$  son periódicas de período 2 y  $\mathcal{O}(x_0) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix} \right\}$ . Ahora, si  $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$ , para cada  $a \in \mathbb{R}$ , nuevamente todas las soluciones son periódicas de período 2. Lo que quiere decir que el origen no puede ser asintóticamente estable. Sin embargo, como  $\Delta V(x_1, x_2) \leq 0$ , por el Teorema de Estabilidad de Liapunov, este punto de equilibrio es estable, como podemos observar en la Figura 2.29.

Por otro lado, si  $x_1^2 + x_2^2 > 1$ , la estabilidad es indeterminable.

Ya hemos estudiado resultados y ejemplos que analizan la estabilidad y estabilidad asintótica de las soluciones, ahora nos enfocamos en hallar las condiciones en las funciones de Liapunov bajo las cuales el equilibrio es inestable.

**Teorema 2.5.11.** Sean  $x^* = 0$  un punto de equilibrio de (2.5.1),  $B(\eta)$  una bola de radio  $\eta > 0$  y  $V : B(\eta) \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Liapunov. Si  $\Delta V$  es definida positiva en  $B(\eta)$  y

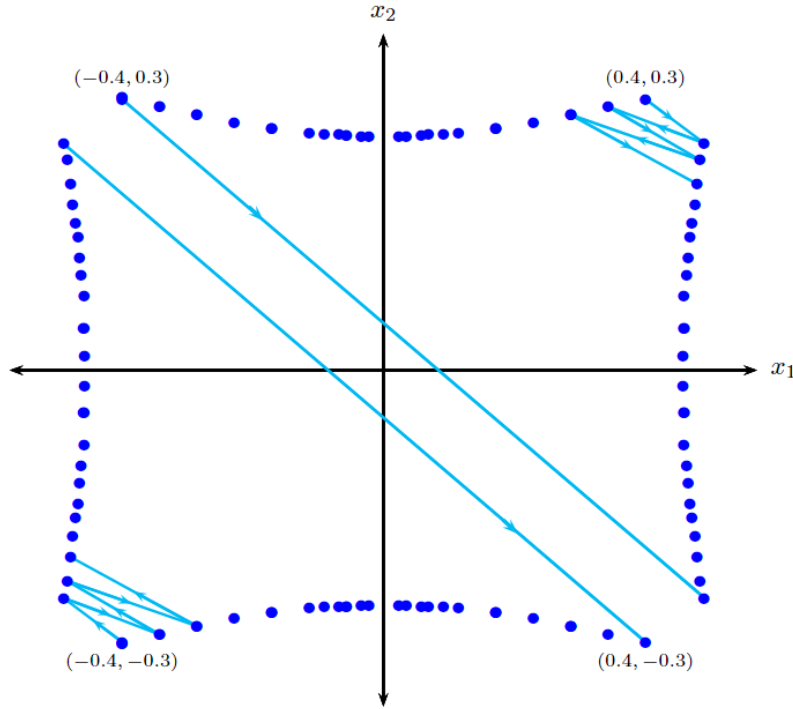


Figura 2.29: Punto de equilibrio estable.

existe una sucesión  $\{a_i\}$  en  $B(\eta)$  tal que  $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0$  y  $V(a_i) > 0$ , para cada  $i \in \mathbb{N}$ , entonces  $x^* = 0$  es inestable.

*Demostración.* La prueba se realiza por contradicción. Supongamos que  $\Delta V$  es definida positiva en  $B(\eta)$  y existe una sucesión  $\{a_i\}$  tal que  $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0$  y  $V(a_i) > 0$  y  $x^* = 0$  es estable.

Debido a que  $\Delta V$  es definida positiva en  $B(\eta)$ , por definición, se sigue que  $\Delta V(x) > 0$ , para cada  $x \in B(\eta)$  con  $x \neq 0$  y  $\Delta V(0) = 0$ . Sea  $\epsilon > 0$  con  $\epsilon < \eta$ . Luego, como  $x^* = 0$  es estable, existe  $\delta > 0$  con  $\delta < \epsilon$  tal que para cada  $x_0 \in B(\eta)$ :

$$\text{Si } \|x_0\| < \delta, \text{ entonces } \|x(n, 0, x_0)\| < \epsilon, \text{ para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.5.8)$$

Como  $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0$ , sea  $x_0 = a_j$ , para algún  $j \in \mathbb{N}$ , tal que  $x_0 \in B(\delta)$ . Adicionalmente, notemos que  $\Delta V(x_0) > 0$  y  $\|x_0\| < \delta$ . Luego, por (2.5.8), se tiene que  $\mathcal{O}(x_0) \subset B(\epsilon)$ , así  $\overline{\mathcal{O}(x_0)} \subset B(\epsilon) \subset B(\eta)$ . De donde,  $\mathcal{O}(x_0)$  es cerrado y acotado y así compacto. Luego,  $V(\overline{\mathcal{O}(x_0)})$  es compacto, en particular es acotado. Esto implica que  $V(x(n))$  es acotado superiormente. Además, como  $V(x(n))$  es creciente, se sigue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} V(x(n)) = c$ , para algún  $c \in \mathbb{R}$ . Dado que  $\Delta V > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} V(x(n)) > V(x_0)$ . Como  $V(x_0) > 0$ , se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} V(x(n)) > 0$ .

Por otra parte, de forma similar que en la prueba del Principio de Invarianza de LaSalle (Teorema 2.5.9), se puede demostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = 0$ . Por la continuidad de  $V$ ,

$\lim_{n \rightarrow \infty} V(x(n)) = 0$ , contradicción. De aquí que el supuesto de que  $x^* = 0$  sea estable es falso.

Por lo tanto,  $x^* = 0$  es inestable. ■

**Ejemplo 2.5.12.** Sean  $x_1, x_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ . Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias:

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= 4x_2(n) - 2x_2(n)x_1^2(n) \\ x_2(n+1) &= \frac{1}{2}x_1(n) + x_1(n)x_2^2(n). \end{aligned}$$

Analicemos la estabilidad del punto de equilibrio  $x^* = (0, 0)$ . Consideremos a  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + 16x_2^2$  como la función de Liapunov. Se sigue que:

$$\begin{aligned} \Delta V(x_1(n), x_2(n)) &= x_1^2(n+1) + 16x_2^2(n+1) - x_1^2(n) - 16x_2^2(n) \\ &= [4x_2(n) - 2x_2(n)x_1^2(n)]^2 + 16 \left[ \frac{1}{2}x_1(n) + x_1(n)x_2^2(n) \right]^2 \\ &\quad - x_1^2(n) - 16x_2^2(n) \\ &= 3x_1^2(n) + 16x_1^2x_2^4(n) + 4x_1^4(n)x_2^2(n) \\ &> 0, \quad \text{con } x_1(n) \neq 0. \end{aligned}$$

De aquí,  $\Delta V$  es definida positiva. Por el Teorema 2.5.11, el origen es inestable.

### Desarrollo del método directo de Liapunov

Sean  $k \in \mathbb{N}$  y  $V : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Consideremos la forma cuadrática [18, pág. 11] siguiente:

$$V(x) = x^T B x = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k b_{ij} x_i x_j, \quad (2.5.9)$$

para cada  $x \in \mathbb{R}^k$  con  $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)^T$ , donde  $B \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{R})$  es simétrica.

**Definición 2.5.13.** Sean  $k \in \mathbb{N}$  y  $B \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{R})$  una matriz simétrica. Se dice que  $B$  es *definida positiva* si para cada  $x \in \mathbb{R}^k$ , se tiene que  $x^T B x > 0$  si  $x \neq 0$  y  $x^T B x = 0$  si  $x = 0$ .

**Definición 2.5.14.** Sean  $k \in \mathbb{N}$  y  $B \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{R})$  una matriz simétrica. La matriz  $B$  es *semidefinida positiva* si para cada  $x \in \mathbb{R}^k$ , se cumple que  $x^T B x \geq 0$ .

Notemos que la matriz  $B$  es definida positiva si y sólo si para cada  $x \in \mathbb{R}^k$  se tiene que:

- (a) Si  $x \neq 0$ , entonces  $V(x) > 0$ .

(b) Si  $x = 0$ , entonces  $V(x) = 0$ .

El Criterio de Sylvester es la prueba más sencilla para determinar si una matriz es definida positiva. Antes, veamos la siguiente:

**Definición 2.5.15.** Sean  $k \in \mathbb{R}^k$  y  $B \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{R})$ . Para cada  $m \in \mathbb{R}^k$  con  $1 \leq m \leq k$ , la  $m$ -ésima submatriz principal de  $B$  es la submatriz de tamaño  $m \times m$  formada a partir sólo de las primeras  $m$  filas y las primeras  $m$  columnas de  $B$ . El determinante de esta submatriz se conoce como el  $m$ -ésimo menor principal.

La demostración del siguiente teorema puede hallarse en [14, pág. 3].

**Teorema 2.5.16** (Criterio de Sylvester). Sea  $B \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{R})$  una matriz simétrica. Se dice que  $B$  es definida positiva si y sólo si todos sus menores principales son positivos.

**Ejemplo 2.5.17.** Sean  $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Consideremos la forma cuadrática  $V(x) = x^T Bx$ , donde  $B \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  y está dada de la forma siguiente:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En este caso, las submatrices principales de  $B$  son  $(3)$ ,  $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$  y  $B$ . Sus menores principales son  $\det(3) = 3$ ,  $\det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 11$  y  $\det B = 8$ . Notemos que todos los menores principales son positivos, de aquí que por el Criterio de Sylvester (Teorema 2.5.16),  $B$  es definida positiva. Luego, para  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ , se sigue que:

$$V(x) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3 > 0,$$

para cada  $x \neq 0$  y  $V(0) = 0$ .

Observemos que para  $k = 3$ , se tiene que dado  $V$  de la forma  $V(x) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_1x_2 + ex_1x_3 + fx_2x_3$ , podemos escribir  $V(x) = x^T Bx$ , donde:

$$B = \begin{pmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{f}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{f}{2} & c \end{pmatrix}.$$

De aquí que un resultado útil es el siguiente:

**Teorema 2.5.18.** [12] Sean  $k \in \mathbb{N}$  y  $B \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{R})$  una matriz simétrica. Se tiene que  $B$  es definida positiva si y sólo si todos sus valores propios son positivos.

**Proposición 2.5.19.** Sea  $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida como:

$$V(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2, \tag{2.5.10}$$

con  $4ac - b^2 > 0$ . Se tiene que:



(a)  $V$  es definida positiva si y sólo si  $a > 0$ .

(b)  $V$  es definida negativa si y sólo si  $a < 0$ .

*Demostración.* La función  $V$  se puede asociar con la forma cuadrática  $V = x^T Q x$ , donde  $x = (x_1, x_2)$  y  $Q$  está dada por la matriz simétrica:

$$Q = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}.$$

En este caso, las submatrices principales de  $Q$  son  $(a)$  y  $Q$ . En consecuencia, sus menores principales son  $\det(a) = a$  y  $\det(Q) = ac - \frac{b^2}{4}$ . Como  $4ac - b^2 > 0$ , se sigue que  $ac - \frac{b^2}{4} > 0$ . Esto implica que  $\det(Q) > 0$ .

(a) Supongamos que  $V$  es definida positiva. Es decir,  $Q$  es definida positiva. Luego, según el criterio de Sylvester (Teorema 2.5.16),  $Q$  es definida positiva si y solo si todos sus menores principales son positivos. De aquí,  $\det(a) > 0$ . Por lo tanto,  $a > 0$ .

Recíprocamente, supongamos que  $a > 0$ . En consecuencia, todos los menores principales de  $Q$  son positivos. Por el Criterio de Sylvester (Teorema 2.5.16),  $Q$  es definida positiva. Así,  $V$  es definida positiva.

(b) La prueba se demuestra con un procedimiento similar al del inciso (a).

De los incisos (a) y (b) se sigue el resultado. ■

**Ejemplo 2.5.20.** Sean  $x_1, x_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ . Consideremos el sistema de ecuaciones en diferencias siguiente:

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= -\frac{1}{2}x_1(n), \\ x_2(n+1) &= -\frac{1}{3}x_2(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

Analicemos la estabilidad del punto de equilibrio  $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ .

Proponemos la función candidata de Liapunov de la forma (2.5.10). Se sigue que:

$$\begin{aligned} \Delta V(x_1(n), x_2(n)) &= a \left( -\frac{1}{2}x_1(n) \right)^2 + b \left( -\frac{1}{2}x_1(n) \right) \left( -\frac{1}{3}x_2(n) \right) + c \left( -\frac{1}{3}x_2(n) \right)^2 \\ &\quad - (ax_1^2(n) + bx_1(n)x_2(n) + cx_2^2(n)) \\ &= \frac{a}{4}x_1^2(n) + \frac{b}{6}x_1(n)x_2(n) + \frac{c}{9}x_2^2(n) - ax_1^2(n) - bx_1(n)x_2(n) - cx_2^2(n) \\ &= \left( \frac{1}{4} - 1 \right) ax_1^2(n) + \left( \frac{1}{6} - 1 \right) bx_1(n)x_2(n) + \left( \frac{1}{9} - 1 \right) cx_2^2(n) \\ &= -\frac{3a}{4}x_1^2(n) - \frac{5b}{6}x_1(n)x_2(n) - \frac{8c}{9}x_2^2(n) \end{aligned}$$

$$= - \left( \frac{3a}{4}x_1^2(n) + \frac{5b}{6}x_1(n)x_2(n) + \frac{8c}{9}x_2^2(n) \right). \quad (2.5.11)$$

Notemos que si elegimos  $a, c > 0$  y  $b = 0$ , por la Proposición 2.5.19,  $V$  es definida positiva. Adicionalmente, por (2.5.11),  $\Delta V < 0$ . Por lo tanto, hemos podido hallar una función candidata  $V(x_1, x_2) = ax_1^2 + cx_2^2$  que cumple las condiciones del Teorema de Estabilidad de Liapunov (Teorema 2.5.4) garantizando con esto que el punto de equilibrio  $(0, 0)$  es asintóticamente estable.

**Teorema 2.5.21.** [20] Sean  $k \in \mathbb{N}$ ,  $B \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{R})$  una matriz simétrica y  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  sus valores propios. Si definimos:

$$\begin{aligned} \lambda_{\min} &= \min\{|\lambda_i| : 1 \leq i \leq k\} \\ \lambda_{\max} &= \rho(B), \end{aligned}$$

se sigue que  $\lambda_{\min}\|x\|^2 \leq V(x) \leq \lambda_{\max}\|x\|^2$ , donde  $V(x) = x^T Bx$  y  $\|\cdot\|$  es la norma euclidiana.

Sean  $B \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{R})$  una matriz simétrica definida positiva y  $V : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  con  $V(x) = x^T Bx$  una función de Liapunov de (2.3.2), se tiene que:

$$\begin{aligned} \Delta V(x(n)) &= V(x(n+1)) - V(x(n)) \\ &= (Ax(n))^T B(Ax(n)) - x^T(n)Bx(n) \\ &= x^T(n)A^T B A x(n) - x^T(n)Bx(n) \\ &= x^T(n)(A^T B A - B)x(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

Esto significa que  $\Delta V < 0$  si y sólo si:

$$A^T B A - B = -C, \quad (2.5.12)$$

donde  $C \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{R})$  es definida positiva.

A la ecuación (2.5.12) se le conoce como *ecuación de Liapunov* del sistema de ecuaciones en diferencias (2.3.2). El argumento anterior establece una condición suficiente para la estabilidad asintótica de la solución cero de (2.3.2). También es una condición necesaria, como se puede ver en el siguiente resultado:

**Teorema 2.5.22.** Sea  $x^*$  un punto de equilibrio de (2.3.2) tal que  $x^* = 0$ . Se tiene que  $x^*$  es asintóticamente estable si y sólo si para cada  $C \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{R})$  simétrica y definida positiva, la ecuación (2.5.12), tiene únicamente una solución  $B \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{R})$  que también es simétrica y definida positiva.

*Demostración.* Supongamos que  $x^* = 0$  es asintóticamente estable. Sea  $C \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{R})$  una matriz simétrica y definida positiva. Veamos que la ecuación de Liapunov (2.5.12) tiene únicamente una solución  $B$ . Para esto, multipliquemos la ecuación (2.5.12) por  $(A^T)^r$  por la izquierda y por  $A^r$  por la derecha, donde  $r \in \mathbb{N}$ , con lo que obtenemos:

$$(A^T)^{r+1} B A^{r+1} - (A^T)^r B A^r = -(A^T)^r C A^r.$$

Estamos tratando de obtener una expresión explícita para  $B$ , por lo que realizamos lo siguiente:

$$\sum_{r=0}^n [(A^T)^{r+1}BA^{r+1} - (A^T)^rBA^r] = - \sum_{r=0}^n (A^T)^rCA^r. \quad (2.5.13)$$

Notemos que en el lado izquierdo de la ecuación (2.5.13) tenemos una suma telescópica, de aquí que:

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^n [(A^T)^{r+1}BA^{r+1} - (A^T)^rBA^r] &= [A^TBA - B] + [(A^T)^2BA^2 - A^TBA] \\ &\quad + \cdots + [(A^T)^{n+1}BA^{n+1} - (A^T)^nBA^n] \\ &= (A^T)^{n+1}BA^{n+1} - B. \end{aligned}$$

Con lo que la ecuación (2.5.13) se reduce a:

$$(A^T)^{n+1}BA^{n+1} - B = - \sum_{r=0}^n (A^T)^rCA^r.$$

Tomando el límite en ambos lados de la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} [(A^T)^{n+1}BA^{n+1} - B] &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^n (A^T)^rCA^r \\ \lim_{n \rightarrow \infty} [B - (A^T)^{n+1}BA^{n+1}] &= \sum_{r=0}^{\infty} (A^T)^rCA^r. \end{aligned} \quad (2.5.14)$$

Por otra parte, del Teorema 2.3.6-(b), se tiene que  $\rho(A) < 1$ . De aquí que  $\rho(A^T) < 1$ . Luego,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (A^T)^{n+1}BA^{n+1} = 0$ . Lo que quiere decir que la ecuación (2.5.14) queda de la forma:

$$B = \sum_{r=0}^{\infty} (A^T)^rCA^r. \quad (2.5.15)$$

Notemos que  $B$  es simétrica y definida positiva. Veamos que  $B = \sum_{r=0}^{\infty} (A^T)^rCA^r$  está bien definida, es decir, la serie de la ecuación (2.5.15) converge. Debido a que  $\rho(A) < 1$ , existe una norma inducida por un vector en  $\mathbb{R}^k$  tal que  $\|A^T\| < 1$  y  $\|A\| < 1$  ([15, Pág. 345]). Se tiene que:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{r=0}^{\infty} (A^T)^rCA^r \right\| &\leq \sum_{r=0}^{\infty} \|(A^T)^rCA^r\| \\ &\leq \sum_{r=0}^{\infty} \|(A^T)^r\| \cdot \|C\| \cdot \|A^r\| \\ &\leq \sum_{r=0}^{\infty} \|A^T\|^r \cdot \|C\| \cdot \|A\|^r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{r=0}^{\infty} \|C\| \cdot (\|(A^T)\| \cdot \|A\|)^r \\
 &= \|C\| \sum_{r=0}^{\infty} (\|(A^T)\| \cdot \|A\|)^r.
 \end{aligned}$$

Debido a que  $\|(A^T)\| \cdot \|A\| < 1$ , la serie del lado derecho de la ecuación anterior es una serie geométrica, de aquí que:

$$\left\| \sum_{r=0}^{\infty} (A^T)^r C A^r \right\| \leq \|C\| \cdot \frac{1}{1 - \|(A^T)\| \cdot \|A\|}.$$

Lo que quiere decir que la serie  $B = \sum_{r=0}^{\infty} (A^T)^r C A^r$  converge. Notemos que (2.5.15) es una solución de (2.5.12). Demostremos que esta solución es única. Supongamos que existen  $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{R})$  que satisfacen la ecuación de Liapunov:

$$A^T B_1 A - B_1 = -C \quad \text{y} \quad A^T B_2 A - B_2 = -C.$$

De aquí que:

$$\begin{aligned}
 A^T B_1 A - B_1 - (A^T B_2 A - B_2) &= 0 \\
 A^T (B_1 - B_2) A - (B_1 - B_2) &= 0 \\
 A^T (B_1 - B_2) A &= B_1 - B_2.
 \end{aligned}$$

Esto implica que  $B_1 - B_2 = 0$ . Por lo tanto,  $B_1 = B_2$ .

La prueba del recíproco es inmediata. ■

Notemos que según el teorema anterior, el punto de equilibrio  $x^* = 0$  de (2.3.2) es asintóticamente estable si (2.5.12) tiene una solución  $B$  única, simétrica y definida positiva para algunas matrices definidas positivas  $C$ . De hecho, puede ocurrir que  $C = I$ , donde  $I$  es la matriz identidad de tamaño  $k \times k$ . En este caso, una solución de (2.5.12) es de la forma siguiente:

$$B = \sum_{r=0}^{\infty} (A^T)^r A^r.$$

**Corolario 2.5.23.** Consideremos la ecuación (2.3.2). Si  $\rho(A) > 1$ , entonces existe una matriz  $B \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{R})$  simétrica que no es semidefinida positiva tal que (2.5.12) se cumple para alguna matriz  $C \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{R})$  definida positiva.

## 2.6. Estabilidad mediante aproximaciones lineales

El método de linealización es uno de los enfoques más antiguos de la teoría de la estabilidad. Su utilidad es ampliamente reconocida en Ingeniería y Ciencias, especialmente en el diseño

y análisis de sistemas de control y mecanismos de retroalimentación, debido a que este método permite simplificar el estudio de sistemas no lineales, facilitando así su análisis de estabilidad. El método de linealización fue desarrollado inicialmente por los matemáticos Aleksandr Liapunov y Oskar Perron, quienes aportaron sus propias perspectivas a la teoría de la estabilidad de ecuaciones diferenciales [11].

En esta sección, nos enfocamos en adaptar el enfoque de Perron para abordar el análisis de sistemas no lineales descritos por ecuaciones en diferencias. Este enfoque nos permite explorar cómo la linealización puede utilizarse en situaciones que requieren la utilización del tiempo discreto.

Sea  $y \in \mathcal{S}_k(\mathbb{Z}_+)$ . Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias no lineal:

$$y(n+1) = A(n)y(n) + g(n, y(n)), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \quad (2.6.1)$$

utilizando su componente lineal:

$$z(n+1) = A(n)z(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \quad (2.6.2)$$

donde  $A \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathcal{S}(\mathbb{Z}_+))$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$  y  $g : \mathbb{N} \times G \rightarrow \mathbb{R}^k$  es una función continua, tal que  $G \subset \mathbb{R}^k$ . El sistema de ecuaciones en diferencias (2.6.1) puede ser interpretado como una perturbación de (2.6.2), donde la función  $g$  de (2.6.1) puede representar la perturbación ocasionada por el ruido, la imprecisión en las medidas y otras perturbaciones externas, dependiendo de la situación.

El sistema (2.6.1) puede surgir cuando se linealizan ecuaciones en diferencias no lineales de la forma:

$$x(n+1) = f(n, x(n)), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \quad (2.6.3)$$

donde  $f : \mathbb{N} \times G \rightarrow \mathbb{R}^k$ , tal que  $G \subset \mathbb{R}^k$ , es continuamente diferenciable en el punto de equilibrio  $y^* \in \mathbb{R}^k$ , es decir,  $\left. \frac{\partial f}{\partial y_i} \right|_{y^*}$  existe y es continua en una vecindad abierta de  $y^*$  con  $1 \leq i \leq k$ .

## Linealización

Ahora, describimos el método de linealización aplicado al sistema (2.6.3). Antes de desarrollarlo, mencionamos la siguiente definición que es necesaria a lo largo de esta sección.

**Definición 2.6.1.** Sea  $g : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ . Se dice que  $\lim_{\|y\| \rightarrow 0} g(n, y) = o(\|y\|)$  si para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para cada  $y \in \mathbb{R}^k$ , si  $\|y\| < \delta$ , entonces  $g(n, y) \leq \epsilon \|y\|$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ .

**Definición 2.6.2.** Sea  $g : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ . Se dice que  $\lim_{\|y\| \rightarrow 0} g(n, y) = o(\|y\|)$  de manera uniforme si para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para cada  $y \in \mathbb{R}^k$ , si  $\|y\| < \delta$ , entonces  $g(n, y) < \epsilon \|y\|$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ .

Escribamos a la función  $f$  dada en (2.6.3) de la forma  $f = (f_1, f_2, \dots, f_k)^T$ . Se tiene que:

$$\frac{\partial f(n, y)}{\partial y} \Big|_{y^*=0} = \frac{\partial f(n, 0)}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(n, 0)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1(n, 0)}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_1(n, 0)}{\partial y_k} \\ \frac{\partial f_2(n, 0)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2(n, 0)}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_2(n, 0)}{\partial y_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k(n, 0)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_k(n, 0)}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_k(n, 0)}{\partial y_k} \end{pmatrix}.$$

Por simplicidad,  $\frac{\partial f(n, x^*)}{\partial x}$  se denota como  $Df(n, x^*)$ . Pongamos  $y(n) = x(n) - x^*$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ , de aquí que, si lo sustituimos en (2.6.3), se tiene que:

$$y(n+1) = f(n, y(n) + x^*) - x^*. \quad (2.6.4)$$

Luego, la función  $f(n, y(n) + x^*)$  se expande en torno a  $x^*$  utilizando la serie de Taylor:

$$\begin{aligned} f(n, y(n) + x^*) &\approx f(n, x^*) + Df(n, x^*) \cdot y(n) + \dots \\ &\approx x^* + Df(n, x^*) \cdot y(n) + \dots \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (2.6.4), se sigue que:

$$y(n+1) \approx Df(n, x^*) \cdot y(n),$$

lo que quiere decir que:

$$y(n+1) = Df(n, x^*)y(n) + g(n, y(n)),$$

donde  $g(n, y(n)) = f(n, y(n) + x^*) - x^* - Df(n, x^*)y(n)$ .

Notemos que si ponemos  $A(n) = Df(n, x^*)$ , entonces obtenemos (2.6.1). De los supuestos de  $f$ , podemos concluir que si  $\|y\| \rightarrow 0$ , entonces  $g(n, y) = o(\|y\|)$ .

Observemos que en caso de que  $x^* = 0$ , se sigue que:

$$\begin{aligned} g(n, y(n)) &= f(n, y(n)) - Df(n, 0)y(n) \\ &= f(n, y(n)) - A(n)y(n). \end{aligned}$$

Es preciso mencionar que un caso relevante del sistema de ecuaciones en diferencias (2.6.3), es cuando este es autónomo, es decir:

$$y(n+1) = f(y(n)), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.6.5)$$

Este sistema lo podemos escribir como:

$$y(n+1) = Ay(n) + g(y(n)), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \quad (2.6.6)$$

donde  $A = f'(0)$  es la matriz Jacobiana de  $f$  en 0 y  $g(y) = f(y) - Ay$ . Dado que  $f$  es derivable en 0, se sigue que si  $\|y\| \rightarrow 0$ , entonces  $g(y) = o(y)$ . De forma equivalente:

$$\lim_{\|y\| \rightarrow 0} \frac{\|g(y)\|}{\|y\|} = 0.$$

**Observación 2.6.3.** Tengamos en cuenta lo siguiente:

- (a) Ya sea que la linealización se trate de un punto de equilibrio no trivial  $x^* \neq 0$  o de un equilibrio trivial  $x^* = 0$ , se sigue que  $g(n, 0) = 0$  ( $g(0) = 0$ ) para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Por tanto, la solución cero de (2.6.1) corresponde al punto de equilibrio  $x^*$  alrededor del cual linealizamos.
- (b) Si se desea estudiar un punto de equilibrio no trivial  $x^* \neq 0$ , entonces, por el inciso (a), tenemos dos opciones. La primera opción es linealizar con respecto a  $x^*$ . La segunda opción es hacer el cambio de variable  $y(n) = x(n) - x^*$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ , como se realizó anteriormente. En el nuevo sistema,  $y^* = 0$  corresponde a  $x^*$ . Luego linealizamos el nuevo sistema alrededor de  $y^* = 0$ . Los cálculos en la última opción son sencillos ya que generalmente se utiliza si  $x^*$  se da explícitamente. La primera opción se ocupa comúnmente si  $x^*$  está dado implícitamente o tenemos multiequilibrios.

Previo a comenzar con el análisis de estabilidad debemos considerar el resultado que se presenta a continuación. Este lema es el análogo discreto de la desigualdad de Gronwall, que es utilizada, junto con sus variaciones, ampliamente en la teoría de ecuaciones diferenciales.

**Lema 2.6.4** (Desigualdad de Gronwall: Caso discreto). Sean  $z, h \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  con  $n \geq n_0 \geq 0$  y  $h(n) \geq 0$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Si,

$$z(n) \leq M \left[ z(n_0) + \sum_{j=n_0}^{n-1} h(j)z(j) \right],$$

para algún  $M > 0$ , entonces:

$$z(n) \leq z(n_0) \prod_{j=n_0}^{n-1} [1 + Mh(j)], \quad \text{con } n \geq n_0 \quad (2.6.7)$$

$$z(n) \leq z(n_0) \exp \left[ \sum_{j=n_0}^{n-1} Mh(j) \right], \quad \text{con } n \geq n_0. \quad (2.6.8)$$

*Demostración.* Sea  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  tal que:

$$u(n) = M \left[ u(n_0) + \sum_{j=n_0}^{n-1} h(j)u(j) \right], \quad \text{con } u(n_0) = z(n_0). \quad (2.6.9)$$

Debido a que  $h(j) \geq 0$ , para cada  $j \geq n_0$ , se tiene que  $z(n) \leq u(n)$  para cada  $n \geq n_0$ . De (2.6.9), se sigue que:

$$u(n+1) - u(n) = M \left[ u(n_0) + \sum_{j=n_0}^n h(j)u(j) \right] - M \left[ u(n_0) + \sum_{j=n_0}^{n-1} h(j)u(j) \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= M \left[ \sum_{j=n_0}^n h(j)u(j) - \sum_{j=n_0}^{n-1} h(j)u(j) \right] \\
 &= Mh(n)u(n),
 \end{aligned}$$

o bien  $u(n+1) = [1 + Mh(n)]u(n)$ . Podemos resolver esta última ecuación y obtenemos lo siguiente [19]:

$$u(n) = \prod_{j=n_0}^{n-1} [1 + Mh(j)]u(n_0), \quad \text{con } n \geq n_0. \quad (2.6.10)$$

Como  $z(n) \leq u(n)$ , para cada  $n \geq n_0$ , se sigue que:

$$z(n) \leq \prod_{j=n_0}^{n-1} [1 + Mh(j)]u(n_0) = z(n_0) \prod_{j=n_0}^{n-1} [1 + Mh(j)], \quad \text{con } n \geq n_0.$$

Esto demuestra la ecuación (2.6.7). Ahora, para obtener (2.6.8) se parte del hecho de que  $1 + Mh(j) \leq \exp(Mh(j))$  [3, Lema 9]:

$$\prod_{j=n_0}^{n-1} [1 + Mh(j)] \leq \prod_{j=n_0}^{n-1} \exp(Mh(j)) = \exp \left[ \sum_{j=n_0}^{n-1} Mh(j) \right],$$

sustituyendo en la ecuación (2.6.10):

$$u(n) \leq \exp \left[ \sum_{j=n_0}^{n-1} Mh(j) \right] u(n_0).$$

Nuevamente, debido a que  $z(n) \leq u(n)$ , para cada  $n \geq n_0$ :

$$z(n) \leq \exp \left[ \sum_{j=n_0}^{n-1} Mh(j) \right] u(n_0) = z(n_0) \exp \left[ \sum_{j=n_0}^{n-1} Mh(j) \right].$$

Con esto, se han probado ambas desigualdades. ■

**Teorema 2.6.5.** Si  $\lim_{\|y\| \rightarrow 0} g(n, y) = o(\|y\|)$  uniformemente y la solución cero del sistema de ecuaciones en diferencias lineal (2.6.2) es uniformemente asintóticamente estable, entonces la solución cero del sistema de ecuaciones en diferencias no lineal (2.6.1) es exponencialmente estable.

*Demostración.* Suponga que  $\lim_{\|y\| \rightarrow 0} g(n, y) = o(\|y\|)$  uniformemente y que la solución cero de (2.6.2) es uniformemente asintóticamente estable. Veamos que existen  $\delta, M > 0$  y  $\eta \in (0, 1)$  tales que para cada  $y_0 \in \mathbb{R}^k$ , si  $\|y_0\| < \delta$ , entonces  $\|y(n)\| \leq M\|y_0\|\eta^{n-n_0}$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Por el Teorema 2.3.1-(d), se sigue que existen  $M_1 > 0$  y  $0 < \eta_1 < 1$  tales que



$\|\Phi(n, m)\| \leq M_1 \eta_1^{n-m}$ , para cada  $n \geq m \geq n_0$ . Por la fórmula de variación de constantes [19, pág. 124], la solución de (2.6.6) es de la forma siguiente:

$$y(n, n_0, y_0) = \Phi(n, n_0)y_0 + \sum_{j=n_0}^{n-1} \Phi(n, j+1)g(j, y(j)),$$

lo que quiere decir que:

$$\begin{aligned} \|y(n, n_0, y_0)\| &= \left\| \Phi(n, n_0)y_0 + \sum_{j=n_0}^{n-1} \Phi(n, j+1)g(j, y(j)) \right\| \\ &\leq \|\Phi(n, n_0)y_0\| + \left\| \sum_{j=n_0}^{n-1} \Phi(n, j+1)g(j, y(j)) \right\| \\ &\leq M_1 \eta_1^{n-n_0} \|y_0\| + \sum_{j=n_0}^{n-1} \|\Phi(n, j+1)\| \|g(j, y(j))\| \\ &\leq M_1 \eta_1^{n-n_0} \|y_0\| + \sum_{j=n_0}^{n-1} M_1 \eta_1^{n-j-1} \|g(j, y(j))\| \\ &= M_1 \eta_1^{n-n_0} \|y_0\| + M_1 \eta_1^{-1} \sum_{j=n_0}^{n-1} \eta_1^{n-j} \|g(j, y(j))\|. \end{aligned} \quad (2.6.11)$$

Sea  $\epsilon_p > 0$  tal que  $\epsilon_p < \frac{1-\eta_1}{M_1}$ . Se sigue que  $\eta_1 + \epsilon_p M_1 < \eta_1 + \frac{1-\eta_1}{M_1} \cdot M_1 = \eta_1 + (1 - \eta_1) = 1$ . Así,  $\eta_1 + \epsilon_p M_1 < 1$ . Pongamos  $M = 1$  y  $\eta = \eta_1 + \epsilon_p M_1$ . Por la hipótesis de que  $\lim_{\|y\| \rightarrow 0} g(n, y) = o(\|y\|)$  de manera uniforme, se tiene que existe  $\delta > 0$  tal que si  $\|y\| < \delta$ , entonces  $\|g(j, y)\| < \epsilon_p \|y\|$ . Veamos que para cada  $y_0 \in \mathbb{R}^k$ , si  $\|y_0\| < \delta$ , entonces  $\|y(n)\| \leq M \|y_0\| \eta^{n-n_0}$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Sea  $y_0 \in \mathbb{R}^k$  tal que  $\|y_0\| < \delta$ .

De la ecuación (2.6.11), se sigue que:

$$\begin{aligned} \|y(n, n_0, y_0)\| &\leq M_1 \eta_1^{n-n_0} \|y_0\| + M_1 \eta_1^{-1} \sum_{j=n_0}^{n-1} \eta_1^{n-j} \epsilon_p \|y(j)\| \\ \eta_1^{-n} \|y(n, n_0, y_0)\| &\leq M_1 \eta_1^{-n_0} \|y_0\| + M_1 \sum_{j=n_0}^{n-1} \epsilon_p \eta_1^{-(j+1)} \|y(j)\| \\ &= M_1 \left[ \eta_1^{-n_0} \|y_0\| + \sum_{j=n_0}^{n-1} \epsilon_p \eta_1^{-j-1} \|y(j)\| \right]. \end{aligned} \quad (2.6.12)$$

Pongamos  $z(n) = \eta_1^{-n} \|y(n)\|$ . Notemos que  $z(n_0) = \eta_1^{-n_0} \|y_0\|$ . Luego, utilizando la Desigualdad de Gronwall (Lema 2.6.4) (2.6.7):

$$\eta_1^{-n} \|y(n)\| \leq \eta_1^{-n_0} \|y_0\| \prod_{j=n_0}^{n-1} [1 + \epsilon_p \eta_1^{-1} M_1].$$

Lo que quiere decir que:

$$\begin{aligned}
 \eta_1^{-n} \|y(n)\| &\leq \eta_1^{-n_0} \|y_0\| [1 + \epsilon \eta_1^{-1} M_1]^{(n-n_0)} \\
 \|y(n)\| &\leq \eta_1^{n-n_0} \|y_0\| [1 + \epsilon \eta_1^{-1} M_1]^{(n-n_0)} \\
 &= \|y_0\| [\eta_1 (1 + \epsilon \eta_1^{-1} M_1)]^{(n-n_0)} \\
 &= \|y_0\| (\eta_1 + \epsilon M_1)^{(n-n_0)} \\
 &= M \|y_0\| \eta^{n-n_0}.
 \end{aligned} \tag{2.6.13}$$

Por lo tanto, de la ecuación (2.6.13), se concluye que la solución cero de (2.6.1) es exponencialmente estable. ■

**Corolario 2.6.6.** Sea  $y^*$  la solución cero del sistema de ecuaciones en diferencias autónomo no homogéneo (2.6.6). Si  $\rho(A) < 1$ , entonces  $y^*$  es exponencialmente estable.

*Demostración.* Utilizando el Teorema 2.3.6-(b), se sigue que  $y^*$  es asintóticamente estable. Luego, por el Teorema 2.1.9-(b),  $y^*$  es uniformemente asintóticamente estable. Finalmente, del Teorema 2.6.5, se tiene que  $y^*$  es exponencialmente estable. ■

**Corolario 2.6.7.** Sea  $y^*$  la solución cero de (2.6.5). Si  $\|f'(0)\| < 1$ , entonces  $y^*$  es exponencialmente estable.

*Demostración.* Supongamos que  $\|f'(0)\| < 1$ . Recordemos que  $f'(0) = A$ , lo que quiere decir que  $\|A\| < 1$ . Como  $\rho(A) \leq \|A\|$ , la demostración se sigue del Corolario 2.6.6. ■

**Observación 2.6.8.** Sea  $A \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{R})$ . Es posible que exista una norma  $\|\cdot\|$  tal que  $\|A\| \geq 1$ , pero  $\rho(A) < 1$ .

**Ejemplo 2.6.9.** Sea  $x \in \mathcal{S}_2(\mathbb{Z}_+)$ . Consideremos el sistema de ecuaciones en diferencias  $x(n+1) = Ax(n) + g(x(n))$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$  con  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ .

Calculando los valores propios de  $A$ , se sigue que  $\rho(A) = \frac{1}{2} < 1$ . Por otra parte:

$$\begin{aligned}
 \|A\|_1 &= \|A\|_\infty = \frac{3}{2} > 1 \\
 \|A\|_2 &\approx 1.2071 > 1.
 \end{aligned}$$

Debido a que  $\rho(A) < 1$ , la solución cero del sistema de ecuaciones en diferencias es exponencialmente estable, siempre que  $g(x) = o(x)$  cuando  $\|x\| \rightarrow 0$ . Sin embargo, dado que  $\|A\| = \|f'(0)\| \not< 1$ , si quisiéramos utilizar el Corolario 2.6.7, éste no nos ayudaría a determinar la estabilidad del sistema. A pesar de esto, incluso con todas sus deficiencias, el Corolario 2.6.7 es muy utilizado entre ingenieros y científicos.

Adicionalmente, es preciso mencionar lo siguiente:

**Observación 2.6.10.** Si  $\rho(A) < 1$ , existe una matriz  $Q \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{R})$  no singular tal que  $\|Q^{-1}AQ\| < 1$ . Por lo que se puede definir una nueva norma, digamos  $\|\cdot\|'$  sobre  $A$ , con lo que  $\|A\|' = \|Q^{-1}AQ\|'$  [15, Teorema 5.6.7]. De esta forma, ahora sí se cumple que  $\|A\|' < 1$ . Luego, se puede aplicar el Corolario 2.6.7 de una manera más útil.

Retomando el Ejemplo 2.6.9, sea  $Q \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  tal que  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ . Se sigue que  $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}$ . Lo que quiere decir que  $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \alpha \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ . Utilizando la norma  $\|\cdot\|_1$ , se sigue que  $\|Q^{-1}AQ\|_1 = \alpha + \frac{1}{2}$ . Por lo que si tomamos  $\alpha < \frac{1}{2}$ , entonces  $\|Q^{-1}AQ\|_1 < 1$ .

El procedimiento anterior puede ser generalizado a cualquier bloque de Jordan:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}.$$

En este caso, definimos  $Q = \text{diag}(1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^k)$ , donde  $k \in \mathbb{N}$  es el orden de  $A$ . De aquí que:

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix},$$

de donde  $\|Q^{-1}AQ\|_1 = |\lambda| + |\alpha|$ . En consecuencia, si  $|\lambda| < 1$ , podemos elegir  $\alpha$  tal que  $|\lambda| + |\alpha| < 1$ , de tal forma que bajo la norma  $\|A\| = \|Q^{-1}AQ\|_1$ ,  $\|A\| < 1$ .

**Ejemplo 2.6.11.** Sean  $y_1, y_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ . Analicemos la estabilidad de la solución cero del siguiente sistema de ecuaciones en diferencias:

$$\begin{aligned} y_1(n+1) &= \frac{ay_2(n)}{1+y_1^2(n)} \\ y_2(n+1) &= \frac{by_1(n)}{1+y_2^2(n)}. \end{aligned} \quad (2.6.14)$$

Sea  $f = (f_1, f_2)^T$ , donde  $f_1(n) = \frac{ay_2(n)}{1+y_1^2(n)}$  y  $f_2(n) = \frac{by_1(n)}{1+y_2^2(n)}$ . Se tiene que la matriz jacobiana es la siguiente:

$$A = \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, como el punto de equilibrio es  $(0, 0)$ , se sigue que:

$$g(y(n)) = f(y(n)) - Ay(n) = \begin{pmatrix} \frac{ay_2(n)}{1+y_1^2(n)} \\ \frac{by_1(n)}{1+y_2^2(n)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{ay_2(n)y_1^2(n)}{1+y_1^2(n)} \\ -\frac{by_2^2(n)y_1(n)}{1+y_2^2(n)} \end{pmatrix}.$$

Lo que quiere decir que el sistema de ecuaciones en diferencias (2.6.14) se puede reescribir de la forma siguiente:

$$\begin{pmatrix} y_1(n+1) \\ y_2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{ay_2(n)y_1^2(n)}{1+y_1^2(n)} \\ -\frac{by_2^2(n)y_1(n)}{1+y_2^2(n)} \end{pmatrix}$$

$$y(n+1) = Ay(n) + g(y(n)). \quad (2.6.15)$$

Los valores propios de  $A$  son  $\lambda_1 = \sqrt{ab}$  y  $\lambda_2 = -\sqrt{ab}$ . De aquí, si  $|ab| < 1$ , entonces la solución cero de la parte lineal  $x(n+1) = Ax(n)$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$  de (2.6.15) es asintóticamente estable. Debido a que  $g(y)$  es continuamente derivable en  $(0,0)$ , se tiene que  $g(y) = o(y)$ . Luego, por el Teorema 2.6.5, se sigue que la solución cero de (2.6.14) es exponencialmente estable.

**Teorema 2.6.12.** Consideremos el sistema de ecuaciones en diferencias (2.6.6). Las siguientes afirmaciones son válidas:

- (a) Si  $\rho(A) = 1$ , entonces la solución cero de (2.6.6) podría ser estable o inestable.
- (b) Si  $\rho(A) > 1$  y  $g(x) = o(x)$  siempre que  $\|x\| \rightarrow 0$ , entonces la solución cero de (2.6.6) es inestable.

*Demostración.* (a) La prueba se realiza por contradicción. Supongamos que  $\rho(A) = 1$  y que la solución cero de (2.6.6) no es *solamente* estable y no es inestable. De aquí que la solución cero de (2.6.6) sólo tendría la posibilidad de ser asintóticamente estable. Esto contradice el Teorema 2.3.6-(b). Por lo tanto, la solución cero de (2.6.6) podría ser estable o inestable.

- (b) Supongamos que  $\rho(A) > 1$ . Por el Corolario 2.5.23, existe una matriz  $B \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{R})$  simétrica que no es semidefinida positiva para la que  $B^T A B - B = -C$  es definida negativa. Luego, la función de Liapunov  $V : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  con  $V(x) = x^T B x$  es negativa en los puntos arbitrariamente cercanos al origen. Adicionalmente,  $\Delta V(x) = -x^T C x + 2x^T A^T B g(x) + V(g(x))$ . Ahora, nos permite elegir  $\gamma > 0$  tal que  $x^T C x \geq 4\gamma \|x\|^2$ , para cada  $x \in \mathbb{R}^k$ . Se tiene que existe  $\delta > 0$  tal que si  $\|x\| < \delta$ , entonces  $\|B g(x)\| \leq \gamma \|x\|$  y  $V(g(x)) \leq \gamma \|x\|$ . De aquí que  $\Delta V(x(n)) \leq -\gamma \|x(n)\|^2$ . Lo que quiere decir que, por el Teorema 2.5.11, la solución cero es inestable.

De (a) y (b) se tiene la prueba. ■

## 2.7. Aplicaciones

### 2.7.1. Ecuación Logística de Pielou con Retraso

En [19, pág. 101] se analizó la ecuación logística de Pielou:

$$x(n+1) = \frac{\alpha x(n)}{1 + \beta x(n)}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{con } \alpha > 1, \beta > 0.$$

Si ahora suponemos que existe un retraso en el tiempo de período 1 en la respuesta de la tasa de crecimiento por individuo al cambio de densidad, entonces obtenemos la ecuación en diferencias con retraso:

$$y(n+1) = \frac{\alpha y(n)}{1 + \beta y(n-1)}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{con } \alpha > 1, \beta > 0. \quad (2.7.1)$$

El estudio de esta ecuación con retraso es de gran importancia, debido a que permite estudiar de forma más realista algunos modelos de sistemas biológicos, económicos, etc. Un ejemplo de una población que puede modelarse mediante (2.7.1) es la mosca azul (*Lucilia cuprina*). Hallemos condiciones en  $\alpha$  y  $\beta$  para que el punto de equilibrio  $y^* = \frac{\alpha-1}{\beta}$  sea asintóticamente estable. Esto se puede realizar mediante dos métodos:

- **Método 1:** Haciendo el cambio de variable  $\bar{y}(n) = y(n) - y^* = y(n) - \frac{\alpha-1}{\beta}$  en (2.7.1), se sigue que:

$$\bar{y}(n+1) = \frac{\alpha \bar{y}(n) - (\alpha-1)\bar{y}(n-1)}{\alpha + \beta \bar{y}(n-1)}. \quad (2.7.2)$$

Como ya se ha mencionado, esto se realiza debido a que ahora el punto de equilibrio de (2.7.2) es  $\bar{y}^* = 0$  y corresponde a  $y^* = \frac{\alpha-1}{\beta}$ . Notemos que (2.7.2) es una ecuación en diferencias de segundo orden, por lo que podemos transformarla en un sistema de ecuaciones en diferencias bidimensional haciendo los cambios  $x_1(n+1) = \bar{y}(n-1)$  y  $x_2(n) = \bar{y}(n)$ , obteniendo:

$$\begin{pmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(n) \\ \frac{\alpha x_2(n) - (\alpha-1)x_1(n)}{\alpha + \beta x_1(n)} \end{pmatrix}. \quad (2.7.3)$$

Ahora, linealizamos la ecuación (2.7.3) alrededor de  $(0, 0)$ , que corresponde a  $\bar{y}^* = 0$ . Por lo que se debe aproximar el sistema no lineal por un sistema lineal más un término no lineal residual  $g(x(n))$ , esto utilizando la expansión de Taylor alrededor de la solución cero. Para esto, calculamos la matriz jacobiana:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1(n+1)}{\partial x_1(n)} & \frac{\partial x_1(n+1)}{\partial x_2(n)} \\ \frac{\partial x_2(n+1)}{\partial x_1(n)} & \frac{\partial x_2(n+1)}{\partial x_2(n)} \end{pmatrix}_{(0,0)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\alpha x_2 - (\alpha-1)x_1}{\alpha + \beta x_1} \right) & \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\alpha x_2 - (\alpha-1)x_1}{\alpha + \beta x_1} \right) \end{pmatrix}_{(0,0)} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-(\alpha-1)(\alpha + \beta x_1) - (\alpha x_2 - (\alpha-1)x_1)\beta}{(\alpha + \beta x_1)^2} & \frac{\alpha}{\alpha + \beta x_1} \end{pmatrix}_{(0,0)} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1-\alpha}{\alpha} & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Además, el término no lineal residual  $g(x(n))$  corresponde a los términos de orden superior en la expansión de Taylor:

$$\begin{aligned}
 g(x(n)) &= f(x(n)) - Ax(n) \\
 &= \begin{pmatrix} x_2(n) \\ \frac{\alpha x_2(n) - (\alpha-1)x_1(n)}{\alpha + \beta x_1(n)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1-\alpha}{\alpha} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\beta(\alpha-1)x_1^2(n) - \alpha\beta x_1(n)x_2(n)}{\alpha(\alpha + \beta x_1(n))} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

De aquí que, linealizando la ecuación (2.7.3) alrededor de  $(0,0)$ , se tiene que la ecuación es de la forma  $x(n+1) = Ax(n) + g(x(n))$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ , donde:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1-\alpha}{\alpha} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\beta(\alpha-1)x_1^2 - \alpha\beta x_1 x_2}{\alpha(\alpha + \beta x_1)} \end{pmatrix}.$$

Como  $\alpha > 1$ , notemos que siempre se cumple que  $0 < \frac{\alpha-1}{\alpha} < 1$ , o bien,  $1 < 1 + \frac{\alpha-1}{\alpha} < 2$ . Por otra parte,  $\text{tr } A = 1$  y  $\det A = \frac{\alpha-1}{\alpha}$ . Esto es,  $|\text{tr } A| < 1 + \det(A) < 2$ . Por la Observación 2.3.8, se tiene que la solución cero es asintóticamente estable. En consecuencia, también obtenemos que los valores propios de  $A$  están dentro del disco unitario. Lo que quiere decir que  $\rho(A) < 1$ , para cada  $\alpha > 1$ . Debido a que  $g(x)$  es continuamente derivable en  $(0,0)$ , por el Teorema 2.5.22, la solución cero de (2.7.3) es uniformemente asintóticamente estable. De aquí, el punto de equilibrio  $y^* = \frac{\alpha-1}{\beta}$  de (2.7.1) es exponencialmente estable.

- **Método 2:** Pongamos  $y(n) = \frac{\alpha-1}{\beta \exp(x(n))}$  en (2.7.1). Con esto, obtenemos:

$$\frac{\alpha - 1}{\beta \exp(x(n+1))} = \frac{\alpha \cdot \frac{\alpha-1}{\beta \exp(x(n))}}{1 + \beta \cdot \frac{\alpha-1}{\beta \exp(x(n-1))}},$$

de forma equivalente:

$$\exp(x(n+1)) = \frac{\exp(x(n))}{\frac{1 + (\alpha-1) \exp(x(n-1))}{\alpha}}.$$

Tomando el logaritmo natural en ambos lados de la ecuación anterior:

$$x(n+1) - x(n) + \frac{\alpha - 1}{\alpha} f[x(n-1)] = 0,$$

que es equivalente a:

$$x(n+2) - x(n+1) + \frac{\alpha - 1}{\alpha} f[x(n)] = 0, \quad (2.7.4)$$

donde  $f(x) = \frac{\alpha}{\alpha-1} \ln \left[ \frac{(\alpha-1)e^x + 1}{\alpha} \right]$ .

La expansión de Taylor de  $f$  alrededor de 0 está dada por  $f(x) = x + g(x)$ , donde  $g(x)$  es un polinomio en  $x$  que contiene términos de grado mayor o igual a 2. De aquí que  $g(x) = o(x)$ . Luego, la ecuación linealizada de (2.7.4) se denota por:

$$x(n+2) - x(n+1) + \frac{\alpha - 1}{\alpha} x(n) = 0. \quad (2.7.5)$$

Debido a que las raíces características de (2.7.5) son las mismas que los valores propios de  $A$ , se deduce que la solución cero de (2.7.5) es asintóticamente estable. Por el Corolario 2.6.6 se tiene que la solución cero de (2.7.4) es asintóticamente estable. Como el punto de equilibrio  $y^* = \frac{\alpha-1}{\beta}$  corresponde a la solución cero de (2.7.4), se sigue que  $y^* = \frac{\alpha-1}{\beta}$  es un punto de equilibrio exponencialmente estable de (2.7.2).

De los dos casos obtuvimos que el punto de equilibrio  $y^* = \frac{\alpha-1}{\beta}$  de la ecuación logística de Pielou con retraso es exponencialmente estable. Esto implica que la población modelada, no solo tiende a estabilizarse en  $y^*$ , sino que lo hace de manera rápida y eficiente, con una tasa de convergencia exponencial. Esto significa que, incluso si la población experimenta fluctuaciones iniciales debido a ciertos factores como pueden ser cambios en las condiciones ambientales o demográficas, la población retornará de forma acelerada a su valor de equilibrio  $y^*$ , sin grandes desviaciones a lo largo del tiempo. Por todo esto, la población no crecerá indefinidamente ni se extinguirá si las condiciones son favorables, es decir, si se comienza cerca del punto de equilibrio.

### 2.7.2. Una variación del Modelo SI

Sean  $I \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  tal que  $I(n)$  es el número de infecciosos de una población en el momento  $n$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$  y  $S \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  tal que  $S(n)$  es el número de susceptibles de dicha población en el momento  $n$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Adicionalmente, sean  $d > 0$  la tasa de mortalidad natural per cápita de la población y  $\alpha \geq 0$  la tasa de mortalidad relacionada con enfermedades infecciosas. El siguiente modelo fue propuesto por Elaydi y Jang [11] y utiliza una ley de acción de masas  $\beta SI$  para modelar la transmisión de enfermedades. Se tienen los siguientes parámetros:

- $d > 0$ : Tasa de mortalidad natural per cápita de la población.

- $\alpha \geq 0$ : Tasa de mortalidad relacionada con la enfermedad.
- $\beta > 0$ : Tasa de transmisión de la enfermedad.
- $\gamma \geq 0$ : Tasa de recuperación de los individuos infecciosos.
- $A > 0$ : Ingreso de nuevos susceptibles.

Luego, el sistema de ecuaciones en diferencias es el siguiente:

$$\begin{aligned} S(n+1) &= \frac{S(n) + A + \gamma I(n)}{1 + \beta h I(n) + dh} \\ I(n+1) &= \frac{I(n) + \beta S(n) I(n)}{1 + (d + \gamma + \alpha)}, \end{aligned} \quad (2.7.6)$$

$$S(0), I(0) \geq 0.$$

La expresión  $\omega = \beta A - d(d + \gamma + \alpha)$  es la diferencia entre la tasa de infección introducida a la población  $\beta A$  y la tasa de eliminación de la infección, que incluye la mortalidad natural  $d$  y la mortalidad debida a la enfermedad  $\gamma + \alpha$ . De aquí que se debe suponer que:

$$\omega = \beta A - d(d + \gamma + \alpha) > 0, \quad (2.7.7)$$

para garantizar que el sistema tenga un punto de equilibrio no trivial donde la enfermedad esté presente en la población. En consecuencia, bajo el supuesto anterior, (2.7.6) tiene dos puntos de equilibrio  $x_1^* = \left(\frac{A}{d}, 0\right)$  y  $x_2^* = \left(\frac{d + \gamma + \alpha}{\beta}, \frac{\beta A - d(d + \gamma + \alpha)}{(d + \alpha)\beta}\right)$ .

Realizamos la linealización de (2.7.6) alrededor de  $x_2^* = (S^*, I^*)$ , donde  $S^* = \frac{d + \gamma + \alpha}{\beta}$  e  $I^* = \frac{\beta A - d(d + \gamma + \alpha)}{(d + \alpha)\beta}$ , por lo que calculamos la matriz jacobiana:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial S(n+1)}{\partial S(n)} & \frac{\partial S(n+1)}{\partial I(n)} \\ \frac{\partial I(n+1)}{\partial S(n)} & \frac{\partial I(n+1)}{\partial I(n)} \end{pmatrix}_{(S^*, I^*)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1 + \beta I^* + d} & \frac{\gamma + d\gamma - S^* \beta - A\beta}{(1 + \beta I^* + d)^2} \\ \frac{\beta I^*}{1 + d + \gamma + \alpha} & 1 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia:

$$\det J = \frac{1}{1 + \beta I^* + d} - \frac{\beta I^* (\gamma + d\gamma - S^* \beta - A\beta)}{(1 + d + \gamma + \alpha)(1 + \beta I^* + d)^2} > 0,$$

adicionalmente:

$$\text{tr } J = 1 + \frac{1}{1 + \beta I^* + d} > 0.$$

De aquí,  $|\text{tr } J| < 1 + \det J < 2$ . Luego, se cumple la condición de la Observación 2.3.8. Lo que quiere decir que el punto de equilibrio  $x_2^*$  es asintóticamente estable.

Este punto de equilibrio refleja una situación en la que la enfermedad persiste de forma endémica, con una proporción de la población infectada y otra susceptible. El hecho de que



este punto sea asintóticamente estable indica que si la población alcanza este equilibrio, tenderá a permanecer en él a lo largo del tiempo. Incluso si hay fluctuaciones, el sistema volverá a este punto de equilibrio. Biológicamente, este equilibrio es más realista en cuanto a las enfermedades infecciosas de largo plazo que se vuelven endémicas. Esto significa que la enfermedad se mantiene en la población sin desaparecer ni causar una epidemia explosiva, estableciéndose un balance entre la transmisión de la enfermedad y la eliminación de los individuos infecciosos. Este tipo de comportamiento refleja lo que ocurre con muchas enfermedades que no se erradican completamente, sino que persisten a niveles manejables.

Por otra parte, realizamos la linealización de (2.7.6) alrededor de  $x_1^* = (\frac{A}{d}, 0)$  calculando la matriz jacobiana:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial S(n+1)}{\partial S(n)} & \frac{\partial S(n+1)}{\partial I(n)} \\ \frac{\partial I(n+1)}{\partial S(n)} & \frac{\partial I(n+1)}{\partial I(n)} \end{pmatrix}_{(\frac{A}{d}, 0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+d} & \frac{\gamma+d\gamma-\frac{A}{d}\beta-AB}{(1+d)^2} \\ 0 & \frac{1+\beta\frac{A}{d}}{1+d+\gamma+\alpha} \end{pmatrix}.$$

Se sigue que los valores propios de  $J$  son  $\lambda_1 = \frac{1}{1+d}$  y  $\lambda_2 = \frac{1+\beta\frac{A}{d}}{1+d+\gamma+\alpha}$ . Bajo el supuesto (2.7.7), se tiene que  $\rho(J) = \lambda_2 > 1$ . Luego, por el Teorema 2.6.12-(b), el punto de equilibrio  $x_1^*$  es inestable.

Este punto representa un escenario donde no hay individuos infectados en la población. Por otra parte, el número de susceptibles  $\frac{A}{d}$ , se interpreta como el equilibrio natural de la población susceptible sin intervención de la enfermedad. En el sentido biológico, este equilibrio refleja una situación ideal en la que la enfermedad ha sido erradicada. Sin embargo, este punto es inestable. Esto implica que cualquier introducción de individuos infectados, causaría una reaparición de la enfermedad. En términos epidemiológicos, aunque es posible alcanzar un estado libre de enfermedad, dicho estado no puede sostenerse de manera indefinida a menos que no haya ninguna reintroducción de la infección.

### 2.7.3. Una especie con dos edades

Consideremos un sistema que involucra una sola especie con dos clases de edad: jóvenes y adultos. Sean  $X \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  tal que  $X(n)$  es el número de jóvenes en el  $n$ -ésimo intervalo de tiempo, para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$  y  $Y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  tal que  $Y(n)$  es el número de adultos en el  $n$ -ésimo intervalo de tiempo. El sistema de ecuaciones en diferencias es de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} X(n+1) &= bY(n) \\ Y(n+1) &= cX(n) + sY(n) - DY^2(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned} \quad (2.7.8)$$

donde  $b > 0$ ,  $c > 0$ ,  $s > 0$  y  $D > 0$  son parámetros que describen la dinámica poblacional y  $a = cb > 0$ , tales que:

- $b$ : Tasa de fecundidad de los adultos.
- $c$ : Proporción de jóvenes que sobreviven y se convierten en adultos en el siguiente intervalo de tiempo.

- $s$ : Tasa de supervivencia de los adultos.
- $D$ : Competencia intraespecífica entre los adultos.

Notemos que en el sistema (2.7.8), una proporción  $c$  de los jóvenes se convierte en adulto, mientras que el resto morirá antes de llegar a la edad adulta. Adicionalmente, los adultos tienen una tasa de fecundidad  $b$  y una tasa de supervivencia dependiente de la densidad  $sY(n) - DY^2(n)$ . Luego, para simplificar la ecuación (2.7.8) eliminando el parámetro  $D$ , podemos reescribirla convenientemente haciendo el cambio de variables  $\tilde{X}(n) = \frac{DX(n)}{b}$  y  $\tilde{Y}(n) = DY^2(n)$ . Esto nos lleva al sistema siguiente:

$$\begin{aligned}\tilde{X}(n+1) &= \tilde{Y}(n) \\ \tilde{Y}(n+1) &= a\tilde{X}(n) + s\tilde{Y}(n) - \tilde{Y}^2(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned} \quad (2.7.9)$$

con  $a = bc > 0$ .

De aquí que los puntos de equilibrio son  $(0, 0)$  y  $(\tilde{X}^*, \tilde{Y}^*)$ , con  $\tilde{X}^* = \tilde{Y}^*$  y  $\tilde{Y}^* = a + s - 1$ . El punto de equilibrio trivial representa la extinción de la población, donde no hay ni jóvenes ni adultos. En este caso, si las tasas de supervivencia y fecundidad son insuficientes, la población tiende a desaparecer. Así,  $\tilde{X}^*$  y  $\tilde{Y}^*$  deben ser positivos para que el modelo tenga sentido biológicamente. En consecuencia  $a + s - 1 > 0$ . Esta condición asegura que la suma de la tasa de fecundidad efectiva  $a$  y la tasa de supervivencia de los adultos  $s$  es lo suficientemente alta como para mantener una población viable (si  $a + s \leq 1$ , la población eventualmente colapsaría, ya que no habría suficientes jóvenes que alcanzaran la madurez para compensar las pérdidas en la población adulta).

Debido a que es más sencillo realizar un análisis de estabilidad en el punto de equilibrio cero, trasladamos el punto de equilibrio  $(\tilde{X}^*, \tilde{Y}^*)$  al origen, mediante las sustituciones  $x(n) = \tilde{X}(n) - \tilde{X}^*$  y  $y(n) = \tilde{Y}(n) - \tilde{Y}^*$ , obteniendo el sistema siguiente:

$$\begin{aligned}x(n+1) &= y(n) \\ y(n+1) &= ax(n) + ry(n) - y^2(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned} \quad (2.7.10)$$

donde  $r = 2 - 2a - s$ . La estabilidad local puede analizarse mediante la linealización de (2.7.10) alrededor del origen, resultando en el sistema lineal:

$$\begin{aligned}x(n+1) &= y(n) \\ y(n+1) &= ax(n) + ry(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned}$$

cuya ecuación característica es  $\lambda^2 - r\lambda - a = 0$ . Luego, por la Observación 2.3.8, se tiene que la solución trivial es asintóticamente estable si y sólo si:

- $1 - r - a > 0$ , o bien  $a + s > 1$ .
- $1 + r - a > 0$ , o bien  $3a + s < 3$ .
- $1 + a > 0$ , o bien  $2 - r - s > -\frac{1}{2}$ .

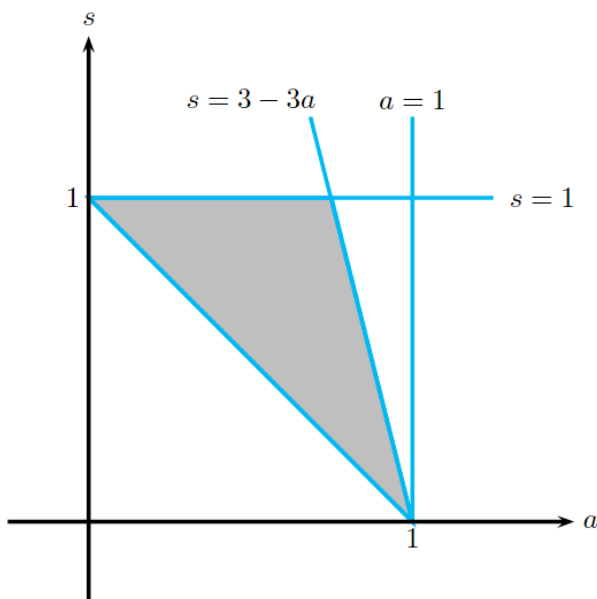


Figura 2.30: Región en la que  $(0, 0)$  es asintóticamente estable.

Así, el rango de valores de  $a$  y  $s$  para los que la solución trivial es asintóticamente estable está acotado por la región definida por las curvas  $a = 1$ ,  $s = 1$ ,  $a + s = 1$  y  $3a + s = 3$ , como podemos observar en la Figura 2.30.

Para hallar la región de estabilidad de la solución trivial utilizamos el método de Liapunov. Sea  $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $V(x, y) = a^2x^2 + \frac{2arxy}{1-a} + y^2 = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = D$ , donde  $A = a^2$ ,  $B = \frac{ar}{1-a}$  y  $C = 1$ . Recordemos que esta ecuación representa una elipse si se cumple que  $AC - B^2 > 0$ , es decir  $a^2 - \frac{(ar)^2}{(1-a)^2} > 0$ , o bien,  $a - 1 < r < 1 - a$ . Lo que quiere decir que  $s + a > 1$  y  $s < 3 - 3a$ , que es precisamente la región sombreada en la Figura 2.30.

Para simplificar el análisis, podemos eliminar el término mixto  $xy$ . De aquí, se aplica una rotación del sistema de coordenadas  $(x, y)$  a un nuevo sistema de coordenadas  $(x', y')$  mediante un ángulo  $\theta$ . Esta rotación se puede expresar como:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo estas expresiones en la función original  $V(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ , se obtiene una nueva función  $V(x', y')$  que tiene la forma:

$$V(x', y') = A'x'^2 + C'y'^2 = D',$$

donde  $A'$  y  $C'$  son los nuevos coeficientes después de la rotación. Luego, el ángulo  $\theta$  se determina a partir de la condición  $\tan 2\theta = \frac{2B}{A-C}$ . Con esta elección de  $\theta$ , los nuevos coeficientes  $A'$  y  $C'$  son  $A' = \frac{A+C}{2} + \sqrt{\left(\frac{A-C}{2}\right)^2 + B^2}$  y  $C' = \frac{A+C}{2} - \sqrt{\left(\frac{A-C}{2}\right)^2 + B^2}$ . Notemos que  $A' + C' = a^2 + 1 > 0$ . Además,  $A'C' > 0$ . Por tanto, tanto  $A'$  y  $C'$  son positivos y

en consecuencia,  $D'$  es positivo. Así, en la región sombreada de la Figura 2.30,  $V(x, y)$  es definida positiva. Adicionalmente, se tiene que:

$$\Delta V(x, y) = y^2 W(x, y),$$

con  $W(x, y) = (y - r)^2 - 2ax - \frac{2ar(r-y)}{1-a} + a^2 - 1$ . De aquí que, si  $W(x, y) < 0$ , esto es, si  $(x, y) \in G$ , donde:

$$G = \left\{ (x, y) : (y - r)^2 - 2ax - \frac{2ar(r - y)}{1 - a} + a^2 - 1 > 0 \right\}.$$

Así,  $\Delta V(x, y) \leq 0$ . Notemos que  $G$  está acotada por la parábola  $W(x, y) = 0$ . Luego, en la región  $G$ , se sigue que  $\Delta V(x, y) = 0$  en el eje  $x$ . Así, el conjunto  $E$  es el eje  $x$ . Suponiendo que  $(x_0, y_0) = (c, 0)$ , se tiene que  $(x(1), y(1)) = (0, ac)$ . Lo que quiere decir que el conjunto invariante más grande  $M$  en  $E$  es el origen. De aquí que, por el Principio de Invarianza de LaSalle (Teorema 2.5.9), toda solución acotada  $x(n)$  que cumpla que  $x(n) \in G$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$  convergerá al origen.

Ahora, damos una estimación aproximada de la cuenca de atracción, es decir, el conjunto de todos los puntos en  $G$  que convergen al origen. Definimos  $V_{\min} = \min\{V(x_0, y_0) : (x_0, y_0) \in \partial G\}$ <sup>1</sup>,  $J_m = \{\tilde{X}, \tilde{Y}\} : \tilde{X} = x_0 + \tilde{X}^*, \tilde{Y} = y_0 + \tilde{Y}^*$  y  $V(x(m), y(m)) < V_{\min}$ , para cada  $m \in \mathbb{Z}_+$ . Luego, si  $(x_0, y_0) \in J_0$  entonces  $V(x(1), y(1)) \leq V(x_0, y_0) < V_{\min}$  y por lo tanto  $((x(1), y(1)) \in J_0$ . De modo similar, se puede demostrar que  $(x(n), y(n)) \in J_0$  para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$  y en consecuencia,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x(n), y(n)) = (0, 0)$ . Ahora bien, si  $(x_0, y_0) \in J_m$ , entonces:

$$V(x(m+1), y(m+1)) \leq V(x(m), y(m)) < V_{\min},$$

continuando con el argumento anterior,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x(n), y(n)) = (0, 0)$ . Por lo tanto, los conjuntos  $J_m$  son estimaciones de la cuenca de atracción de  $(\tilde{X}^*, \tilde{Y}^*)$ . Es decir, estos conjuntos ayudan a identificar las regiones del espacio fase desde las cuales las trayectorias del sistema convergen al punto de equilibrio.

En esta región, tanto los jóvenes como los adultos coexisten adecuadamente. Este equilibrio representa un balance entre la fecundidad, la supervivencia de los adultos y la competencia intraespecífica.

### 2.7.4. Sistemas Huesped-Parasitoides

Consideremos un modelo que involucra dos especies en el que ambas tienen múltiples etapas en su ciclo de vida: huevos, larvas, pupas y adultos. Sean  $H \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  tal que  $H(n)$  es la densidad de especies hospedadoras en la generación  $n$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ ,  $P \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  tal que  $P(n)$  es la densidad de parasitoides en la generación  $n$  y  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(H(n), P(n))$  es fracción de huéspedes no parasitados. Además, definimos los siguientes parámetros:

<sup>1</sup> $\partial G$  es la frontera del conjunto  $G$ .

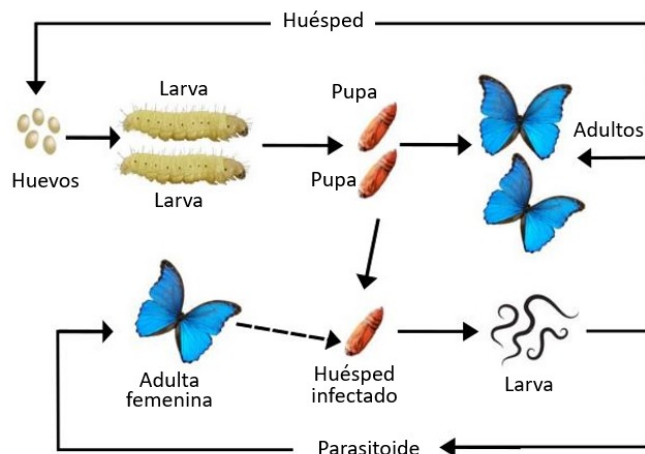


Figura 2.31: Representación esquemática de un sistema huésped-parasitoide.

- $\lambda > 0$ : Tasa de crecimiento intrínseco de los huéspedes.
- $c > 0$ : Número promedio de huevos viables puestos por un parasitoide en un sólo huésped parasitado.

Un parasitoide hembra adulta halla un huésped en el que depositar sus huevos. Luego, las larvas de parasitoides consumen y eventualmente matan a su huésped. El ciclo de vida de ambas especies se muestra en la Figura 2.31. De aquí:

- $H(n+1) =$  número de huéspedes en la generación  $n \times$  fracción no parasitada  $\times$  tasa de reproducción  $\lambda$ .
- $P(n+1) =$  número de huéspedes parasitados en la generación  $n \times$  fecundidad de los parasitoides  $c$ .

Lo que quiere decir que:

$$H(n+1) = \lambda H(n) f(H(n), P(n)) \quad (2.7.11)$$

$$P(n+1) = cH(n)[1 - f(H(n), P(n))]. \quad (2.7.12)$$

### El modelo de Nicholson-Bailey

El modelo de tiempo discreto más familiar e influyente, fue desarrollado por A.J. Nicholson y V.A. Bailey en 1935. Los ataques de parasitoides ocurren al azar entre los individuos huéspedes, como en el modelo de Thompson [25], pero la tasa de ataque promedio depende completamente del número de parasitoides en lugar de la limitación de huevos [29].

En [16], la función  $f$  se especificó bajo dos supuestos:

1. El número de encuentros  $H_e$  entre huéspedes y parasitoides en el tiempo  $n$  es proporcional al producto de sus densidades, es decir:

$$H_e = aH(n)P(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \quad (2.7.13)$$

donde  $a$  refleja la eficiencia o frecuencia con la que los parasitoides encuentran y atacan a los huéspedes.

2. El primer encuentro entre un huésped y un parasitoide es el único encuentro significativo. Dado que se supone que los encuentros son aleatorios, es apropiado utilizar la distribución de probabilidad de Poisson para describir estos encuentros.

Si  $\mu$  es el número promedio de eventos en un intervalo de tiempo dado, entonces la probabilidad de que ocurran  $r$  eventos (como encuentros entre el huésped y su parasitoide), es de la forma siguiente:

$$p(r) = \frac{e^{-\mu} \mu^r}{r!}, \quad (2.7.14)$$

con  $\mu = \frac{H_e}{H(n)}$ . De la ecuación (2.7.13), se sigue que:

$$\mu = \frac{aH(n)P(n)}{A(n)} = aP(n). \quad (2.7.15)$$

Como la probabilidad de que un huésped escape del parasitismo es la misma que la probabilidad de no hallar encuentros durante la vida del huésped, esto es, se tiene que  $r = 0$  en la distribución de Poisson. Luego, para  $r = 0$ , por (2.7.14), se sigue que:

$$p(0) = \frac{e^{-\mu} \mu^0}{0!} = e^{-\mu}. \quad (2.7.16)$$

De (2.7.15), la probabilidad de que un huésped no sea atacado es la siguiente:

$$p(0) = e^{-aP(n)}. \quad (2.7.17)$$

Por lo tanto, la probabilidad de que un huésped escape del parasitismo, es decir, que no sea atacado por ningún parasitoide, es exactamente  $e^{-aP(n)}$ . Esta probabilidad se denota como  $f(H(n), P(n))$  y se define por:

$$f(H(n), P(n)) = e^{-aP(n)}.$$

Con esto, las ecuaciones (2.7.11) y (2.7.12) se convierten en:

$$H(n+1) = \lambda H(n) e^{-aP(n)} \quad (2.7.18)$$

$$P(n+1) = cH(n)(1 - e^{-aP(n)}). \quad (2.7.19)$$

Los puntos de equilibrio no triviales del sistema de ecuaciones en diferencias anterior están dados por  $(H^*, P^*)$ , donde  $H^* = \frac{\lambda \ln(\lambda)}{(\lambda-1)} ac$  y  $P^* = \frac{1}{a} \ln(\lambda)$ .

Se puede demostrar mediante linealización que  $(H^*, P^*)$  es inestable, lo que implica que las poblaciones podrían experimentar oscilaciones divergentes e incluso los parasitoides podrían llegar a extinguirse. Por lo tanto, este modelo es demasiado simple para cualquier aplicación práctica, excepto posiblemente en condiciones artificiales de laboratorio.

De aquí que es razonable modificar la ecuación  $H(n)$  en la ecuación (2.7.11) para incorporar cierta saturación de la población de presas o, en términos de encuentros con depredadores, un modelo limitante de presas. Por lo tanto, un modelo más realista está dado por:

$$\begin{aligned} H(n+1) &= H(n) \exp \left[ r \left( 1 - \frac{H(n)}{k} \right) - aP(n) \right] \\ P(n+1) &= cH(n)(1 - \exp(-aP(n))), \end{aligned}$$

donde:

- $k > 0$  es la capacidad de carga del ambiente.
- $r > 0$  es la tasa de crecimiento intrínseco de la población de presas, que mide cómo crece la población de presas cuando hay pocos depredadores y recursos abundantes.

Los puntos de equilibrio son soluciones de:

$$H^* = H^* \exp \left[ r \left( 1 - \frac{H^*}{k} \right) - aP^* \right] \quad \text{y} \quad P^* = cH^*(1 - \exp(-aP^*)).$$

Por lo que obtenemos  $P^* = \frac{r}{a} \left[ 1 - \frac{H^*}{K} \right] = \frac{r}{a}(1 - q)$ , donde  $q = \frac{H^*}{K}$  y  $H^* = \frac{P^*}{1 - e^{-aP^*}}$ . De aquí que:

$$\frac{r(1 - \frac{H^*}{K})}{acH^*} = 1 - \exp \left[ -r \left( 1 - \frac{H^*}{K} \right) \right].$$

Notemos que  $H_1^* = K$  y  $P_1^* = 0$  es un punto de equilibrio. En este escenario, la población de huéspedes se mantiene en su capacidad máxima sin la intervención de los parasitoides, reflejando un ecosistema sin control biológico por parte de los parasitoides. El otro punto de equilibrio se puede obtener graficando los lados izquierdo y derecho de (2.7.18) contra  $H^*$ . En la Figura 2.32 vemos que hay otro punto de equilibrio con  $0 < H_2^* < K$ . Luego, podemos hallar  $P_2^*$  a partir de (2.7.15).

Para realizar el análisis de estabilidad del punto de equilibrio  $(H_2^*, P_2^*)$ , pongamos  $H(n) = x(n) + H_2^*$ ,  $P(n) = y(n) + P_2^*$ . Por lo tanto obtenemos:

$$\begin{aligned} x(n+1) &= -H_2^* + (x(n) + H_2^*) \exp \left[ r \left( 1 - \frac{x(n) + H_2^*}{K} \right) - a(y(n) + P_2^*) \right] \\ y(n+1) &= -P_2^* + c(x(n) + H_2^*)[1 - \exp(-a(y(n) + P_2^*))]. \end{aligned} \quad (2.7.20)$$

Linealizando alrededor de  $(0, 0)$  obtenemos el siguiente sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} x(n+1) \\ y(n+1) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(n) \\ y(n) \end{pmatrix}. \quad (2.7.21)$$

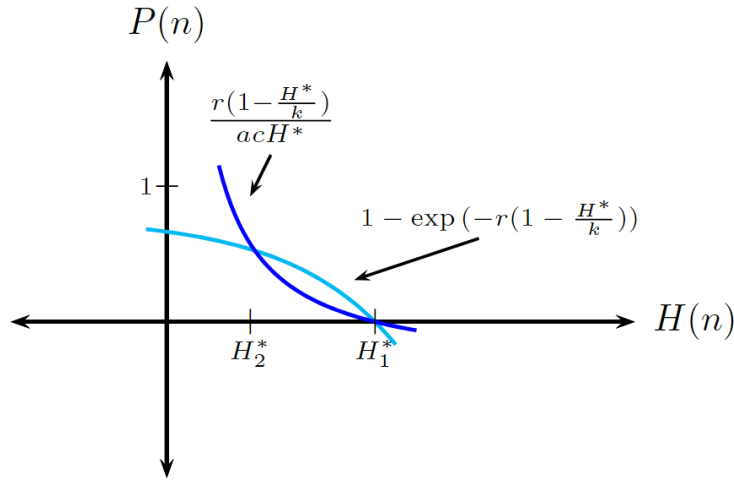


Figura 2.32: Puntos de equilibrio.

con:

$$A = \begin{pmatrix} 1 - rq & -arq \\ c(1 - \exp(-r(1 - q))) & \phi - r(1 - q) \end{pmatrix},$$

donde  $\phi = \frac{r(1-q)}{1 - \exp(-r(1-q))}$ .

Notemos que el valor de  $q = \frac{H_2^*}{K}$  es una medida del grado en que el depredador puede hundir a la presa por debajo de su capacidad de carga.

La ecuación característica de  $A$  es de la forma siguiente:

$$\lambda^2 - \lambda(1 - r + \phi) + (1 - rq)\phi + r^2q(1 - q) = 0.$$

Por la Observación 2.3.8, los valores propios de  $A$  están dentro del disco unitario si y sólo si cumplen que:

$$|q - r + \phi| < 1 + (1 - rq)\phi + r^2q(1 - q) < 2.$$

Lo que quiere decir que:

$$\begin{aligned} (1 - rq)\phi + r^2q(1 - q) &< 1 \\ 1 + (1 - rq)\phi + r^2q(1 - q) &> |1 - r + \phi|. \end{aligned}$$

Graficando (2.7.20) y (2.7.21) obtenemos la región de estabilidad asintótica indicada por el área sombreada en la Figura 2.33. En esta región los parasitoides ejercen un control sobre la población de huéspedes, manteniéndola bajo el nivel de la capacidad de carga  $K$ , pero sin exterminarla. Además, se garantiza que la población huésped no explote, lo cual sería perjudicial para los parasitoides, ni sea eliminada completamente, lo que haría que los parasitoides se extinguieran.



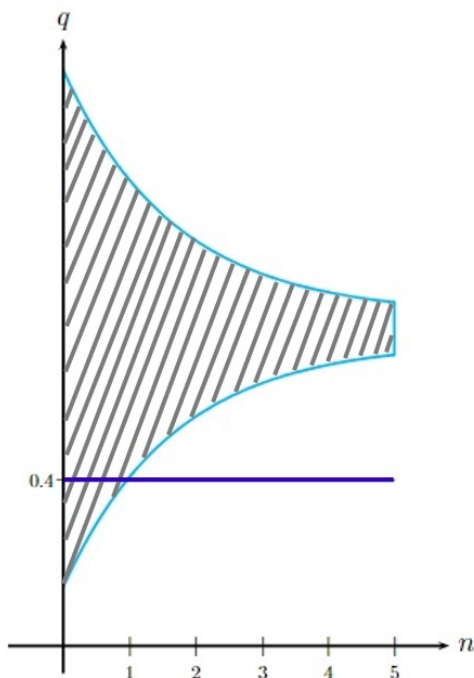


Figura 2.33: Región de estabilidad asintótica.

El origen es asintóticamente estable dentro del área sombreada. Notemos que el área de estabilidad se estrecha a medida que  $r$  aumenta.

En [4], Beddington y sus colaboradores realizaron una simulación numérica para el valor específico  $q = 0.4$ . A medida que  $r$  crece más allá de un cierto valor, el punto de equilibrio se vuelve inestable y aparece una jerarquía de ciclos límite estables de período creciente y no integral, que en última instancia se descompone en ciclos de período 5. A estos les siguen ciclos de período  $2 \times 5, 2^2 \times 5, \dots, 2^n \times 5, \dots$ . Por ejemplo, un ciclo de un solo período se convierte en uno de dos períodos, luego en cuatro y así sucesivamente. Como en este caso los ciclos son de período 5, la población del huésped y del parasitoide no se mantiene constante, sino que se repite un patrón en el que, después de 5 generaciones, las poblaciones regresan a valores similares. En general, estos ciclos implican que las poblaciones de huéspedes y parasitoides pueden no estabilizarse en niveles fijos, en cambio pueden experimentar fluctuaciones, que pueden llevar a extinciones locales o a dinámicas cíclicas persistentes, dependiendo de las condiciones ambientales y las características biológicas de las especies involucradas.

### 2.7.5. Un modelo de ciclo económico

Uno de los primeros modelos matemáticos formales para los ciclos económicos se le atribuye a Paul Samuelson (1939), que fue modificado posteriormente por Sir John Hicks (1950).

Sean  $I \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  tal que  $I(n)$  es la inversión en el período  $n$  y  $Y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  tal que  $Y(n)$  es el ingreso en el período  $n$ . El modelo de Samuelson-Hicks, asume que la inversión es

proporcional al cambio en el ingreso:

$$I(n) = v(Y(n-1) - Y(n-2)), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \quad (2.7.22)$$

donde  $v$  es el *multiplicador de inversión*, que mide la sensibilidad de la inversión al cambio en el ingreso.

Adicionalmente, el consumo  $C(n)$  en el período  $n$  es proporcional al ingreso  $Y(n-1)$  en el período anterior:

$$C(n) = (1-s)Y(n-1), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \quad (2.7.23)$$

donde  $0 \leq s \leq 1$  representa la *propensión marginal al ahorro*, es decir, la fracción del ingreso que no se consume y se ahorra en el período actual. Si  $s = 0$ , todo el ingreso se consume. Si  $s = 1$ , todo el ingreso se ahorra y no hay consumo.

Presentamos la identidad contable <sup>2</sup> para una economía cerrada:

$$Y(n) = C(n) + I(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.7.24)$$

Sustituyendo (2.7.22) y (2.7.23) en (2.7.24) obtenemos la siguiente ecuación en diferencias de segundo orden:

$$Y(n) = (1+v-s)Y(n-1) - vY(n-2), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.7.25)$$

El modelo lineal (2.7.25) no representa adecuadamente un negocio ya que no produce soluciones oscilatorias (o ciclos periódicos) excepto en casos especiales (como  $v = 1$ ). Por lo que Puu y Sushko [22] propusieron el siguiente modelo no lineal cúbico:

$$I(n) = v(Y(n-1) - Y(n-2)) - v(Y(n-1) - Y(n-2))^3 \quad (2.7.26)$$

$$C(n) = (1-s)Y(n-1) + \epsilon s Y(n-1), \quad (2.7.27)$$

donde  $0 \leq \epsilon \leq 1$  es una fracción de los ahorros que se gastó después de ahorrar durante un período. Notemos que, si  $\epsilon = 0$ , entonces ninguno de los ahorros se gasta en el siguiente período, además, se tiene el modelo original de Hicks (2.7.23).

Agreguemos una nueva variable  $\bar{Z} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  tal que capta el cambio en el ingreso entre dos períodos consecutivos:

$$\bar{Z}(n-1) = \frac{I(n)}{n} = Y(n-1) - Y(n-2), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.7.28)$$

Sustituyendo (2.7.26) y (2.7.27) en (2.7.24), se sigue que:

$$\begin{aligned} Y(n+1) &= I(n+1) + C(n+1) \\ &= v(Y(n) - Y(n-1)) + (1-s)Y(n) + \epsilon s Y(n-1) - v(Y(n) - Y(n-1))^3. \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Una ecuación que siempre se cumple por definición en un sistema económico.

Restando  $Y(n)$  de ambos lados de la ecuación anterior, obtenemos:

$$\bar{Z}(n) = (v - \epsilon s)\bar{Z}(n-1) - v\bar{Z}^3(n-1) + (\epsilon - 1)sY(n-1), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Pongamos  $\bar{Z}(n) = \sqrt{\frac{1+v-\epsilon s}{v}}Z(n)$ . De aquí que:

$$Z(n) = (v - \epsilon s)Z(n-1) - (1 - v - \epsilon s)Z^3(n-1) + (\epsilon - 1)sY(n-1).$$

Si definimos  $a = v - \epsilon s$ ,  $(\epsilon - 1)s = b$ , de la ecuación anterior, se sigue que:

$$Z(n+1) = aZ(n) - (1+a)Z^3(n) + bY(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+ \quad (2.7.29)$$

donde  $a = v - \epsilon s$  es la tasa de cambio de inversión neta en función del consumo y el ahorro y  $b = (1 - \epsilon)s$  representa una especie de tasa de ahorro eterna. Utilizando (2.7.28) y (2.7.29), ahora tenemos el sistema de ecuaciones en diferencias bidimensional siguiente:

$$\begin{aligned} Y(n+1) &= Y(n) + Z(n) \\ Z(n+1) &= aZ(n) - (a+1)Z^3(n) - bY(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned} \quad (2.7.30)$$

El sistema (2.7.30) tiene solamente un punto de equilibrio  $X^* = (Y^*, Z^*) = (0, 0)$  y el análisis de estabilidad local puede realizarse examinando el sistema linealizado:

$$\begin{pmatrix} Y(n+1) \\ Z(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y(n) \\ Z(n) \end{pmatrix}.$$

Luego, los valores propios son  $\lambda_{1,2} = \frac{a+1 \pm \sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{2}$ . En consecuencia, por el criterio de la Observación 2.3.8, la solución trivial es asintóticamente estable si y sólo si:

- $2 + 2a + b > 0$ ,
- $1 - a - b > 0$ ,
- $b > 0$ .

Teniendo en cuenta que  $a > 0$  y  $0 < b < 1$ , la región de estabilidad  $S$  está dada por:

$$S = \{(b, a) : 0 < b < 1, 0 < a < 1 - b\}$$

y se muestra en la Figura 2.34.

De aquí que si  $(b, a) \in S$ , entonces el punto de equilibrio  $X^* = (0, 0)$  es asintóticamente estable. Sin embargo, en este caso no es deseable encontrarse en la región en la que  $(0, 0)$  tiene estabilidad asintótica, ya que económicamente hablando, el punto de equilibrio trivial es un equilibrio en el cual tanto el ingreso como el cambio en el ingreso se estabilizan en cero. Esto indica que, la economía se mantiene en un estado sin producción ni ingresos. En términos generales, el punto  $(0, 0)$  puede reflejar una situación en la cual la economía

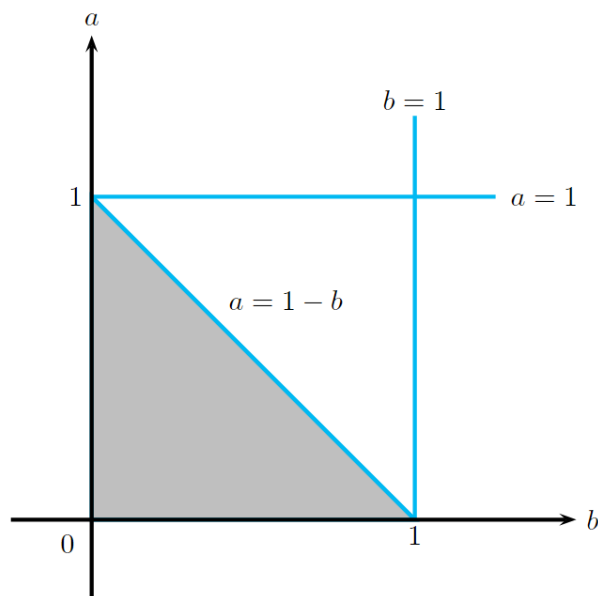


Figura 2.34: Región en la que  $(0, 0)$  es asintóticamente estable.

está en una recesión o en un estado de estancamiento prolongado, donde ni la inversión ni el consumo están impulsando el crecimiento económico.

Respecto a los valores propios, notemos que si  $1 - 2\sqrt{b} < a < 1 + 2\sqrt{b}$ , entonces  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ . Pero esto se cumple si  $(b, a) \in S$ . Así, si  $(b, a) \in S$ , el punto de equilibrio  $X^* = (0, 0)$  es un foco estable. Con esto se representa una economía en la que, después de una perturbación, se observan fluctuaciones tanto en la inversión como en el ingreso, pero estas fluctuaciones disminuyen a medida que el tiempo avanza. La economía no entra en ciclos indefinidos, sino que, tras un período de ajuste, el sistema se estabiliza en el equilibrio, en el que no hay más fluctuaciones significativas.

En  $a = 1 - b$ , el punto de equilibrio  $X^* = (0, 0)$  pierde su estabilidad y posiblemente surgen ciclos. Por ejemplo, para  $a = 0, b = 1$ , aparece un ciclo atractor de período 6 y un ciclo de silla de período 7. En  $a = \sqrt{2} - 1, b = 2 - \sqrt{2}$  aparecen ciclos atractores y de silla de período 8 y así sucesivamente [22]. Estos ciclos reflejan la recurrencia de crisis económicas o fluctuaciones periódicas en la economía.

### 2.7.6. Estudio del caso del escarabajo de la harina

El equipo de Constantino, Cushing, Dennis, Desharnais y Henson [9] ha estudiado extensamente los escarabajos de la harina, realizando tanto estudios teóricos como estudios experimentales en el laboratorio. Para comprender adecuadamente su modelo, damos una breve descripción del ciclo de vida de los escarabajos de la harina.

El ciclo de vida consta de etapas larvales y pupales, cada una de las cuales dura aproximadamente dos semanas, seguidas de una etapa adulta.

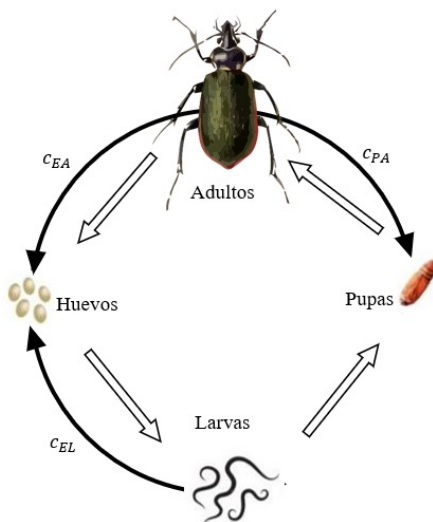


Figura 2.35: Las flechas  $\rightarrow$  indican canibalismo.

Como se muestra en la Figura 2.35, el canibalismo ocurre entre los distintos grupos. Los adultos comen pupas y huevos, las larvas comen huevos. Ni las larvas ni los adultos comen adultos maduros. Además, las larvas no se alimentan de larvas. El canibalismo de larvas por adultos y de pupas por larvas se supone insignificante ya que normalmente ocurre a tasas mucho más reducidas.

Sean  $L \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  tal que  $L(n)$  es la población de larvas en el período  $n$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ ,  $P \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  tal que  $P(n)$  es la población de pupas en el período  $n$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$  y  $A \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  tal que  $A(n)$  es la población de adultos en el momento  $n$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Luego, el modelo larva-pupa-adulto (LPA) está dado por:

$$\begin{aligned} L(n+1) &= bA(n) \exp(-c_{EA}A(n) - c_{EL}L(n)) \\ P(n+1) &= (1 - \mu_L)L(n) \\ A(n+1) &= P(n) \exp(-c_{PA}A(n)) + (1 - \mu_A)A(n), \end{aligned} \tag{2.7.31}$$

donde  $L(0) \geq 0$ ,  $P(0) \geq 0$  y  $A(0) \geq 0$ .

Las constantes  $\mu_L, \mu_A$  son la probabilidad de que las larvas y los adultos mueran por causas distintas al canibalismo, respectivamente. Lo que quiere decir que,  $0 \leq \mu_L \leq 1$  y  $0 \leq \mu_A \leq 1$ . El término  $\exp(-c_{EA}A(n))$  representa la probabilidad de que un huevo no sea comido en presencia de  $A(n)$  adultos,  $\exp(-c_{EL}L(n))$  representa la probabilidad de que un huevo no sea comido en presencia de  $L(n)$  larvas y  $\exp(-c_{PA}A(n))$  es la probabilidad de supervivencia de una pupa en presencia de  $A(n)$  adultos. Las constantes  $c_{EA} \geq 0$ ,  $c_{EL} \geq 0$ ,  $c_{PA} \geq 0$  se denominan coeficientes de canibalismo. Se asume que el canibalismo en adultos es la única causa importante de mortalidad de pupas.

Hay dos puntos de equilibrio  $(0, 0, 0)$  y  $(L^*, P^*, A^*) \in \mathbb{R}^3$ ,  $L^* > 0$ ,  $P^* > 0$ ,  $A^* > 0$ . Notemos que el punto de equilibrio trivial representa un estado de extinción de la población.

Por otra parte, el punto de equilibrio positivo se puede obtener resolviendo las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} L \exp(C_{EL}L) &= bA \exp(-c_{EAA}) \\ P &= (1 - \mu_L)L \\ \mu_A \exp(c_{PAA}) &= P. \end{aligned} \tag{2.7.32}$$

Eliminando  $P$ , se sigue que:

$$\begin{aligned} (1 - \mu_L)L &= \mu_A A \exp(c_{PAA}) \\ L \exp(c_{EL}L) &= bA \exp(-c_{EAA}). \end{aligned}$$

Dividiendo la segunda ecuación entre la primera, obtenemos:

$$\exp(c_{EL}L) = \frac{b(1 - \mu_L)}{\mu_A} \exp[(-c_{EAA} - c_{PAA})A]. \tag{2.7.33}$$

El número:

$$N = \frac{b(1 - \mu_L)}{\mu_A},$$

se llama *número reproductivo neto inherente*. Este número juega un papel importante en nuestro análisis de estabilidad. Notemos que si  $N < 1$ , la ecuación (2.7.33) no tiene solución y no tenemos un punto de equilibrio positivo. Por otro lado, si  $N > 1$ , entonces la ecuación (2.7.33) tiene una solución, que es la intersección de la curva  $(1 - \mu_L)L = \mu_A \exp(c_{PAA})$  y la recta desde  $(0, \frac{\ln N}{C_{EL}})$  a  $(\frac{\ln N}{c_{EAA} + c_{PAA}}, 0)$  en el plano  $(A, L)$  representado por la ecuación (2.7.33). Para investigar la estabilidad local del punto de equilibrio  $(L^*, P^*, A^*)$  de la ecuación (2.7.31), calculamos el jacobiano  $J$ :

$$J = \begin{pmatrix} -c_{EL}bA \exp(-c_{EAA} - c_{EL}L) & 0 & b \exp(-c_{EL}L - c_{EAA}) (1 - c_{EAA}) \\ 1 - \mu_L & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-c_{PAA}) & 1 - \mu_A - c_{PAA}P \exp(-c_{PAA}) \end{pmatrix}.$$

En el punto de equilibrio  $(0, 0, 0)$ , se tiene que:

$$J_1 = J|_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 1 - \mu_L & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 - \mu_A \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de  $J_1$  está dado por:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - (1 - \mu_A)\lambda^2 - b(1 - \mu_L) = 0,$$

que es de la forma:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3 = 0,$$

con  $p_1 = -(1 - \mu_A)$ ,  $p_2 = 0$ ,  $p_3 = -b(1 - \mu_L)$ . Luego, los valores propios de  $J_1$  están dentro del círculo unitario si y sólo si [11]:

$$|p_3 + p_1| < 1 + p_2 \quad \text{y} \quad |p_2 - p_3 p_1| < 1 - p_3^2.$$

Utilizando la primera condición, se sigue que:

$$\begin{aligned} | -b(1 - \mu_L) - (1 - \mu_A) | &< 1 \\ b(1 - \mu_L) + (1 - \mu_A) &< 1, \end{aligned}$$

o bien:

$$N = \frac{b(1 - \mu_L)}{\mu_A} < 1. \tag{2.7.34}$$

De la segunda desigualdad:

$$\begin{aligned} | -(1 - \mu_A)(1 - \mu_L)b | &< 1 - b^2(1 - \mu_L)^2 \\ b^2(1 - \mu_L)^2 + (1 - \mu_A)(1 - \mu_L)b &< 1, \end{aligned}$$

pero esta desigualdad se satisface si asumimos (2.7.34). Debido a que si  $N < 1$ , se tiene que:

$$b^2(1 - \mu_L)^2 + (1 - \mu_A)(1 - \mu_L)b < \mu_A^2 + \mu_A(1 - \mu_A) = \mu_A \leq 1.$$

Concluimos que el equilibrio trivial es asintóticamente estable si y sólo si  $N < 1$  y por lo tanto, atrae todas las órbitas en el cono no negativo (conjunto en el que  $L \geq 0, P \geq 0$  y  $A \geq 0$ ). En esta región, si la población se encuentra en un estado de extinción, permanecerá en ese estado a menos que se introduzcan cambios significativos en el sistema. A medida que  $N$  aumenta más allá de 1, se produce una “bifurcación” que resulta en la inestabilidad del equilibrio trivial y la creación del equilibrio positivo. De hecho, para  $N > 1$  existe uno y sólo un equilibrio positivo. El jacobiano en el equilibrio positivo  $(L^*, P^*, A^*)$  que satisface (2.7.32) es de la forma siguiente:

$$J_2 = J|_{(L^*, P^*, A^*)} = \begin{pmatrix} -c_{EL}L^* & 0 & \frac{L^*}{A^*} - c_{EA}L^* \\ 1 - \mu_L & 0 & 0 \\ 0 & A^* \exp(c_{PA}) & 1 - \mu_A - A^* \mu_A c_{PA} \end{pmatrix}.$$

De aquí que su ecuación característica está dada por:

$$\begin{aligned} \lambda^3 + (-c_{EL}L^* + \mu_A c_{PA} A^* - (1 - \mu_A))\lambda^2 - c_{EL}L^*(1 - \mu_A)\lambda \\ - \left( \frac{L^*}{A^*} - c_{EA}L^* \right) (1 - \mu_L) \exp(-c_{PA}A^*) = 0. \end{aligned}$$

Una condición para la estabilidad del equilibrio positivo sólo se conoce en casos específicos [11]:

- Caso 1: Si  $c_{EL} = 0$  y  $1 < N < e \min \left\{ 1, \left( \frac{c_{EA}}{c_{PA}} \right) \left( \frac{1 - \mu_A}{\mu_A} \right) \right\}$ , entonces el punto de equilibrio positivo es atractor global.

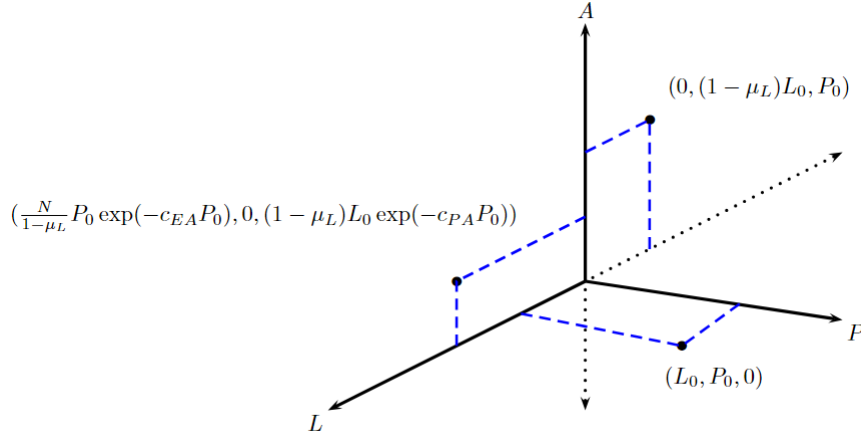


Figura 2.36: Caso del escarabajo de la harina.

- Caso 2: En varios experimentos a largo plazo informados en [9], la tasa de mortalidad de adultos se manipuló para igualar el 96 % y por lo tanto,  $\mu_A = 0.96$ . Motivado por estos datos, Cushing asumió que  $\mu_A = 1$ . En este caso  $N = b(1 - \mu_L)$  y el sistema (2.7.31) se convierte en:

$$\begin{aligned} L(n+1) &= \frac{N}{1 - \mu_L} A(n) \exp(-c_{EL}L(n) - c_{EA}A(n)) \\ P(n+1) &= (1 - \mu_L)L(n) \\ A(n+1) &= P(n) \exp(-c_{PA}A(n)). \end{aligned} \quad (2.7.35)$$

**Teorema 2.7.1.** [9] Consideremos el sistema de ecuaciones en diferencias (2.7.35). Si  $N > 1$ , entonces el punto de equilibrio trivial de (2.7.35) es inestable y existe únicamente un punto de equilibrio positivo. Este punto de equilibrio, que se bifurca del equilibrio trivial en  $N = 1$ , es inestable para  $N = 1 + \delta$ , donde  $\delta > 0$  es suficientemente pequeño.

Un subcaso del Caso 2 es el caso de órbitas sincrónicas.

**Definición 2.7.2.** Se dice que la terna  $(L(n), P(n), A(n))$  es:

- *Sincrónica en el tiempo  $n$*  si un componente es igual a cero y al menos un componente es distinto de cero en el instante  $n$ .
- *Completamente sincrónica en el tiempo  $n$*  si tiene dos componentes cero, es decir, sólo uno de los componentes es positivo en ese instante.

Se puede ver inmediatamente en la ecuación (2.7.35) que una órbita que es sincrónica en el tiempo  $n_0$ , es sincrónica para cada  $n \geq n_0$ . Notemos que un punto  $(L_0, P_0, 0)$  en el plano  $LP$  se asigna al punto  $(0, (1 - \mu_L)L_0, P_0)$  en el plano  $PA$ , que a su vez se asigna al punto  $\left(\frac{N}{1 - \mu_L}P_0 \exp(-c_{EA}P_0), 0, (1 - \mu_L)L_0 \exp(-c_{PA}P_0)\right)$  en el plano  $LA$ . Por lo tanto, los puntos se asignan desde un cuadrante no negativo de los planos coordenados al siguiente



en orden secuencial. Se dice que una terna sincrónica  $(L(n), P(n), A(n))$  es completamente sincrónica en el tiempo  $n$  si tiene dos componentes cero. Este es el caso de los puntos en los ejes de coordenadas positivos. Una órbita es completamente sincrónica si y sólo si su punto inicial es completamente sincrónico. Esta noción se deriva del hecho de que las tres etapas del ciclo de vida están sincronizadas temporalmente de tal manera que nunca se superponen.

Denotemos la función que determina el sistema de ecuaciones en diferencias (2.7.35) por  $F$ :

$$\begin{pmatrix} L(n+1) \\ P(n+1) \\ A(n+1) \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} L(n) \\ P(n) \\ A(n) \end{pmatrix}.$$

De aquí que  $F^3$  asigna el cuadrante no negativo de un plano coordinado a sí mismo.

Un punto fijo de  $F^3$  corresponde a un 3-ciclo de  $F$  y así sucesivamente. El mapa  $F^3$  está definido por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x(n+1) &= Nx(n) \exp[-c_{PA}y(n) \exp(-c_{PA}z(n)) \\ &\quad - c_{EA}(1 - \mu_L)x(n) \exp(-c_{PA}y(n) \exp(-c_{PA}z(n)))] \\ &\quad - c_{EL} \frac{N}{1 - \mu_L} y(n) \exp(-c_{PA}y(n) - c_{EA}y(n) \exp(-c_{EA}z(n))) \\ &\quad - c_{EL} \frac{N}{1 - \mu_L} z(n) \exp\left(-c_{EA} \frac{N}{1 - \mu_L} z(n) \exp(-c_{EA}z(n) - c_{EL}x(n))\right) \Big] \\ y(n+1) &= Ny(n) \exp[-c_{PA}z(n) - c_{EA}y(n) \exp(-c_{PA}z(n)) \\ &\quad - c_{EA} \frac{N}{1 - \mu_L} z(n) \exp(-c_{EA}z(n) - c_{EL}x(n))] \\ z(n+1) &= Nz(n) \exp[-c_{EA}z(n) - c_{EL}x(n) \\ &\quad - c_{PA}(1 - \mu_L)x(n) \exp(-c_{PA}y(n) \exp(-c_{PA}z(n)))] \Big]. \end{aligned}$$

Si  $(x_0, 0, z_0)$  es un punto en el plano  $xz$ , entonces su órbita está descrita por el sistema bidimensional:

$$x(n+1) = Nx(n) \exp(-cx(n)) \tag{2.7.36}$$

$$z(n+1) = [N \exp(-\alpha x(n))]z(n) \exp(-\beta z(n)), \tag{2.7.37}$$

donde  $c = c_{EA}(1 - \mu_L)$ ,  $\alpha = c_{EL} + c_{PA}(1 - \mu_L)$ ,  $\beta = c_{EA}$ .

La primera ecuación (2.7.36) es el conocido mapeo de Ricker, donde  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = 0$  y la convergencia es exponencial. En consecuencia, la ecuación (2.7.37) puede considerarse como una perturbación de (2.7.36). Por lo tanto, según el Corolario 8.27 [11],  $\lim_{n \rightarrow \infty} z(n) = 0$ , lo cual es consistente con lo que teníamos antes. Para  $N > 1$ , la función de Ricker tiene un equilibrio positivo único  $x^* = \frac{\ln N}{c}$ . En consecuencia, existe un 3-ciclo completamente sincrónico de la ecuación (2.7.35). A medida que  $N$  aumenta, la función de Ricker atraviesa un período que duplica la ruta de bifurcación hacia el caos. Si  $1 < N < e^2$ , entonces

$(x^*, z^*) = (\frac{1}{c} \ln N, 0)$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable de las ecuaciones (2.7.36) y (2.7.37) y atrae globalmente todas las condiciones iniciales positivas en el plano  $xz$ . Este punto fijo de  $F^*$  corresponde al 3-ciclo totalmente sincrónico del modelo LPA (2.7.35):

$$\begin{pmatrix} \frac{\ln N}{c_{EA}(1-\mu_L)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{c_{EA} \ln N} \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{c_{EA} \ln N} \end{pmatrix} \quad (2.7.38)$$

De aquí, se tiene el siguiente resultado. Por el Teorema 2.7.1 para  $1 < N < e^2$ , el modelo LPA (2.7.35) tiene un 3-ciclo completamente sincrónico, único y no trivial, dado por (2.7.38). Este 3-ciclo atrae todas las órbitas o ecuación completamente sincrónicas (2.7.35). Esto significa que el comportamiento de las poblaciones de larvas, pupas y adultos está sincronizado de tal manera que el sistema sigue un ciclo predecible y estable en el tiempo, por lo que todas las trayectorias de población en el sistema tienden a este patrón cíclico cuando se encuentran en el rango especificado. Para  $N > e^2$ , el sistema tiene una cascada de atractores de  $(3 \times 2^n)$ -ciclos completamente sincrónicos que duplican el período y para  $N$  suficientemente grande, tiene atractores “caóticos completamente sincrónicos” (solo con respecto a órbitas completamente sincrónicas). En este escenario, el sistema puede presentar atractores caóticos que, aunque son caóticos en general, mantienen una sincronización completa entre todas las fases del ciclo de vida el escarabajo de la harina. De aquí, aunque el sistema muestra un comportamiento caótico en su totalidad, las etapas del ciclo de vida siguen moviéndose de forma sincronizada.

---

---

## CAPÍTULO 3

---

# EL MÉTODO DE LA TRANSFORMADA $\mathcal{Z}$ Y ECUACIONES EN DIFERENCIAS DE VOLTERRA

En este capítulo se hallan las soluciones de las ecuaciones en diferencias y proporcionamos información acerca de su comportamiento cualitativo, al igual que se ha estudiado con anterioridad. En contraste, se utiliza un método distinto, conocido como método de la transformada, ya que en ocasiones suele ser más conveniente.

Las implementaciones informáticas de la mayoría de los sistemas de Ingeniería y Física requieren la discretización de parámetros continuos como el tiempo, la frecuencia, la temperatura, entre otros. Por lo que es conveniente utilizar sistemas en tiempo discreto. Por ejemplo, en Ingeniería, específicamente en la rama de la Electrónica, la transformada  $\mathcal{Z}$  es muy relevante en el procesamiento de señales digitales, ya que sirve para transformar un dominio de tiempo al dominio de frecuencia compleja correspondiente. Esta técnica no es nueva, debido a que se remonta a De Moivre alrededor del año 1730.

Por todo lo anterior, se introduce la transformada  $\mathcal{Z}$  y se presentan tanto su poder como sus limitaciones. Mientras que la transformada de Laplace convierte ecuaciones integro-diferenciales en ecuaciones algebraicas, la transformada  $\mathcal{Z}$  convierte las ecuaciones en diferencias en ecuaciones algebraicas. De este modo, se dice que la transformada  $\mathcal{Z}$  es la contraparte discreta de la transformada de Laplace y aunque hay muchas conexiones entre ambas, existen algunas diferencias menores. Adicionalmente, la transformada  $\mathcal{Z}$  en cierto modo es una forma generalizada de la transformada de Fourier en tiempo discreto.

### 3.1. Definiciones y ejemplos

La representación de una ecuación en diferencias por la transformada  $\mathcal{Z}$  es muy intuitiva: convierte una sucesión en un polinomio complejo, por lo que, si existe, se beneficia de los resultados de la teoría del análisis complejo y nos proporciona una herramienta muy poderosa en el análisis y diseño de tiempo discreto.

Iniciamos esta sección proporcionando la definición de la transformada  $\mathcal{Z}$ , luego, estudiamos propiedades relevantes con sus ejemplos correspondientes y finalizamos analizando algunas aplicaciones.

**Definición 3.1.1.** Sean  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  y  $A \subseteq \mathbb{C}$ . Definimos la función  $\tilde{x} : A \rightarrow \mathbb{C}$  por:

$$\tilde{x}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}, \quad \text{para cada } z \in A.$$

Sea  $A \subseteq \mathbb{C}$ . El conjunto de funciones de  $A$  en  $\mathbb{C}$  se denota por  $\mathcal{C}(A)$ , esto significa que,  $\mathcal{C}(A) = \{g|g : A \rightarrow \mathbb{C}\}$ .

**Definición 3.1.2.** La transformada  $\mathcal{Z}$ , se denota y define como  $\mathcal{Z} : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \rightarrow \mathcal{C}(A)$  tal que  $\mathcal{Z}(x) = \tilde{x}$ , para cada  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ .

En términos generales, la transformada  $\mathcal{Z}$  convierte una sucesión de tiempo discreto de valor real o complejo en una función  $\tilde{z}$  de valor complejo. Por lo que, de las Definiciones 3.1.1 y 3.1.2, se tiene que:

$$\mathcal{Z}[x(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}. \quad (3.1.1)$$

Puesto que la suma se define para  $0 \leq n < \infty$ , la ecuación (3.1.1) se conoce como la versión unilateral de la transformada. Al igual que con la transformada de Laplace unilateral, la restricción al tiempo positivo no es generalmente una desventaja. Sin embargo, en ocasiones se necesita la versión alternativa bilateral de la transformada. La principal razón por la que en este documento se analiza la transformada  $\mathcal{Z}$  unilateral es que la transformada  $\mathcal{Z}$  bilateral no es útil para resolver ecuaciones en diferencias con condiciones iniciales distintas de cero.

**Ejemplo 3.1.3.** Sea  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  tal que:

$$x(n) = \begin{cases} 3 & \text{si } n = 1, \\ 4 & \text{si } n = 5, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Hallemos la transformada  $\mathcal{Z}$ . Utilizando la ecuación (3.1.1), se sigue que:

$$\mathcal{Z}[x(n)] = 3z^{-1} + 4z^{-5} = \frac{3}{z} + \frac{4}{z^5} = \frac{3z^4 + 4}{z^5}.$$

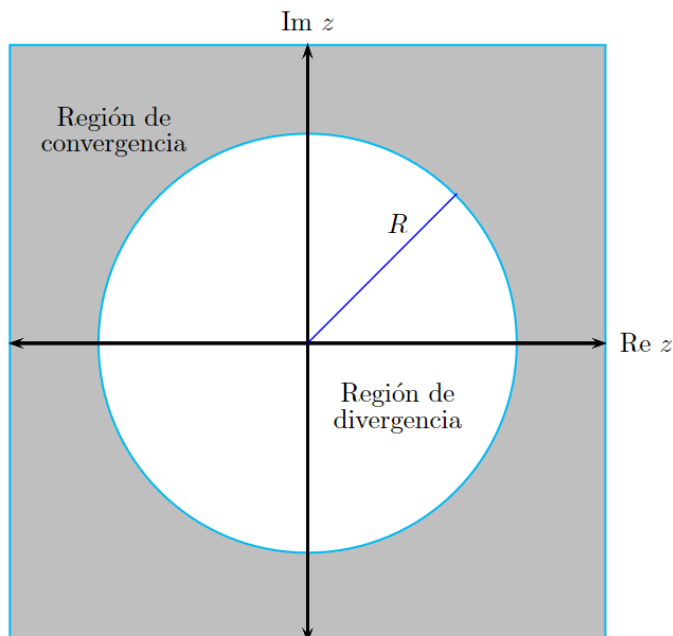


Figura 3.1: Regiones de convergencia y divergencia de  $\tilde{x}(z)$ ,  $|z| > R$ .

Para una sucesión dada  $x(n)$ , su transformada  $\mathcal{Z}$  existirá, en general, para un cierto rango de valores de la variable compleja  $z$ . La transformada  $\mathcal{Z}$  de una sucesión  $x(n)$  existe si  $|\sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)z^{-n}| < \infty$ . Este rango de valores de  $z$  sobre el cual existe la transformada  $\mathcal{Z}$ , es decir, el conjunto de números  $z$  en el plano complejo para el que converge la serie (3.1.1) se denomina *región de convergencia de  $\tilde{x}(z)$* . El método más común para hallar la región de convergencia de esta serie es el criterio del cociente. Supongamos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x(n+1)}{x(n)} \right| = R.$$

Luego, por el criterio del cociente, la ecuación (3.1.1):

- Caso 1: Converge si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x(n+1)z^{-n-1}}{x(n)z^{-n}} \right| < 1$ .
- Caso 2: Diverge si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x(n+1)z^{-n-1}}{x(n)z^{-n}} \right| > 1$ .

Lo que quiere decir que, la serie (3.1.1) converge en la región  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$  y diverge para  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ , como se muestra en la Figura 3.1.

El número  $R$  se denomina radio de convergencia de la serie (3.1.1). Si  $R = 0$ , la transformada  $\mathcal{Z}$ ,  $\tilde{x}(z)$ , converge en todas partes exceptuando tal vez el origen. Por otro lado, si  $R = \infty$ , la transformada  $\mathcal{Z}$  diverge en todas partes.

#### Transformada $\mathcal{Z}$ de algunas funciones elementales

La definición de Transformada  $\mathcal{Z}$  y el concepto de radio de convergencia se ilustran en los siguientes ejemplos, en los que se analizan algunas de las funciones elementales que son de utilidad en las secciones posteriores de este capítulo.

**Ejemplo 3.1.4.** Sea  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  con  $x(n) = a^n$ , donde  $a \in \mathbb{R}$  es fijo. Hallemos la transformada  $\mathcal{Z}$  de  $x$  y su radio de convergencia.

De la ecuación (3.1.1), se tiene que:

$$\mathcal{Z}[x(n)] = \mathcal{Z}(a^n) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n. \quad (3.1.2)$$

Luego, el radio de convergencia está determinado por:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a^{n+1}}{a^n} \right| = |a|.$$

Observemos que la suma de la ecuación (3.1.2) es una serie geométrica. Si  $\left|\frac{a}{z}\right| < 1$ , o de forma equivalente,  $|a| < |z|$ , entonces la serie converge, lo que quiere decir que:

$$\mathcal{Z}[a^n] = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z - a}, \quad \text{con } |z| > |a|. \quad (3.1.3)$$

Esto significa que la región de convergencia de la transformada  $\mathcal{Z}$  de  $x(n) = a^n$  es la región que está fuera del círculo de radio  $|a|$ .

Un caso fundamental del resultado (3.1.3) es cuando  $a = 1$ . Lo que quiere decir que:

$$\mathcal{Z}[1] = \frac{z}{z - 1}, \quad \text{con } |z| > 1.$$

**Ejemplo 3.1.5.** Sea  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  con  $x(n) = na^n$ , donde  $a \in \mathbb{R}$  es fijo. Hallemos la transformada  $\mathcal{Z}$  de  $x$  y su radio de convergencia.

Recordemos que una serie infinita  $\mathcal{Z}(a^n)$  puede diferenciarse término a término el número de veces que sea necesario en su región de convergencia. Utilizando la ecuación (3.1.1), se sigue que:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[na^n] &= \sum_{n=0}^{\infty} na^n z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{a}{z}\right)^n \\ &= \left(\frac{a}{z}\right) \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{a}{z}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= x \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}, \quad \text{con } x = \frac{a}{z} \\
 &= x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \text{con } x = \frac{a}{z} \\
 &= x \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x}, \quad \text{con } x = \frac{a}{z}, |x| < 1 \\
 &= \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \text{con } x = \frac{a}{z}, |x| < 1 \\
 &= \frac{\frac{a}{z}}{\left(1 - \frac{a}{z}\right)^2}, \quad \text{con } |x| < 1 \\
 &= \frac{az}{(z-a)^2}, \quad \text{con } |z| > |a|.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la transformada  $\mathcal{Z}$  buscada es  $\mathcal{Z}[na^n] = \frac{az}{(z-a)^2}$ , con  $|z| > |a|$ .

Para calcular la transformada  $\mathcal{Z}$  de funciones de la forma  $x(n) = n^k a^n$ , se realiza un proceso similar al del ejemplo anterior. Para  $k = 2$ , se tiene que:

$$\mathcal{Z}[n^2 a^n] = \frac{\frac{a}{z} \left(1 + \frac{a}{z}\right)}{\left(1 - \frac{a}{z}\right)^3} = \frac{az(z+a)}{(z-a)^3}, \quad \text{con } |z| > |a|. \quad (3.1.4)$$

**Ejemplo 3.1.6.** Sea  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  definida como:

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{n!} & \text{si } n \geq 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Utilizando la definición de transformada  $\mathcal{Z}$  se tiene que:

$$\mathcal{Z}[x(n)] = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{n!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!} = e^{\frac{1}{z}} \quad \text{con } |z| > 0.$$

Antes de continuar con la transformada  $\mathcal{Z}$  de otra función, recordemos la siguiente definición:

**Definición 3.1.7.** La *sucesión de impulsos de unidad* o *sucesión delta de Kronecker*, está definida de la forma siguiente:

$$\delta_k(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k, \\ 0 & \text{si } n \neq k. \end{cases}$$

**Ejemplo 3.1.8.** Calculemos la transformada  $\mathcal{Z}$  de la sucesión delta de Kronecker. Se tiene que:

$$\mathcal{Z}[\delta_k(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_k(n) z^{-n} = z^{-k} = \frac{1}{z^k}.$$

En caso de que  $k = 0$ , se sigue que:

$$\mathcal{Z}[\delta_0(n)] = 1.$$

Observemos que el radio de convergencia de  $\mathcal{Z}[\delta_k(n)]$  es  $R = 0$ .

#### 3.1.1. Propiedades de la transformada $\mathcal{Z}$

Como ya se ha mencionado, existen diversas similitudes entre la transformada  $\mathcal{Z}$  y la transformada de Laplace, una de ellas son las propiedades que cada una cumplen, por lo que vamos a enlistar algunas propiedades básicas de la transformada  $\mathcal{Z}$ . De esta forma, podemos observar diferencias y similitudes entre ambas. Utilizamos estas propiedades, principalmente para calcular transformadas  $\mathcal{Z}$  de sucesiones más complejas. Primero enunciaremos cada propiedad, luego la demostramos y finalizamos ilustrándola con ejemplos.

##### Linealidad

La linealidad es una consecuencia del hecho de que el conjunto de números complejos  $\mathbb{C}$  junto con su suma y su multiplicación forma un campo. Por esto, se tiene que la transformada  $\mathcal{Z}$  es lineal. En otras palabras, la transformada  $\mathcal{Z}$  de una combinación lineal de sucesiones es la combinación lineal de las transformadas  $\mathcal{Z}$  de cada una de ellas.

Sean  $x, y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ . Si  $\tilde{x}(z)$  es la transformada  $\mathcal{Z}$  de  $x$  con radio de convergencia  $R_1$  y  $\tilde{y}(z)$  es la transformada  $\mathcal{Z}$  de  $y$  con radio de convergencia  $R_2$ , se tiene que:

- $\mathcal{Z}[x(n) + y(n)] = \mathcal{Z}[x(n)] + \mathcal{Z}[y(n)] = \tilde{x}(z) + \tilde{y}(z)$ , donde  $|z| > \max(R_1, R_2)$ .
- $\mathcal{Z}[\alpha x(n)] = \alpha \mathcal{Z}[x(n)] = \alpha \tilde{x}(z)$ , para cada número complejo  $\alpha$ .

Lo anterior es válido debido a que:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[ax(n) + by(n)] &= \sum_{n=0}^{\infty} (ax(n) + by(n))z^{-n} \\ &= a \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} y(n)z^{-n} \\ &= a\mathcal{Z}[x(n)] + \mathcal{Z}[y(n)], \quad \text{con } |z| > \max(R_1, R_2). \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.1.9.** Hallemos la transformada  $\mathcal{Z}$  de la sucesión  $\{\sin(n\omega)\}$ .

Recordemos que  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ , para cada  $\theta \in \mathbb{R}$ . De aquí que  $e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$ . Lo que quiere decir que  $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$  y  $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ .

Se sigue que:

$$\mathcal{Z}[\sin(n\omega)] = \frac{1}{2i} (\mathcal{Z}[e^{i\omega}] - \mathcal{Z}[e^{-i\omega}]).$$



De la ecuación (3.1.3), se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}[\text{sen}(n\omega)] &= \frac{1}{2i} \left( \frac{z}{z - e^{i\omega}} - \frac{z}{z - e^{-i\omega}} \right) \\
 &= \frac{z}{2i} \left( \frac{(z - e^{-i\omega}) - (z - e^{i\omega})}{(z - e^{i\omega})(z - e^{-i\omega})} \right) \\
 &= \frac{z \text{sen}(\omega)}{(z - e^{i\omega})(z - e^{-i\omega})} \\
 &= \frac{z \text{sen}(\omega)}{z^2 - z(e^{i\omega} + e^{-i\omega}) + 1} \\
 &= \frac{z \text{sen}(\omega)}{z^2 - 2z \cos(\omega) + 1}, \quad \text{con } |z| > 1.
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.1.10.** Hallemos la transformada  $\mathcal{Z}$  de la sucesión  $\{\cos(n\omega)\}$ .

De manera similar al ejemplo anterior, tenemos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}[\cos(n\omega)] &= \frac{1}{2}(\mathcal{Z}[e^{i\omega}] + \mathcal{Z}[e^{-i\omega}]) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{z}{z - e^{i\omega}} + \frac{z}{z - e^{-i\omega}} \right) \\
 &= \frac{z}{2} \left( \frac{(z - e^{-i\omega}) + (z - e^{i\omega})}{(z - e^{i\omega})(z - e^{-i\omega})} \right) \\
 &= \frac{z}{2} \left( \frac{2z - 2 \cos(\omega)}{(z - e^{i\omega})(z - e^{-i\omega})} \right) \\
 &= \frac{z^2 - z \cos(\omega)}{(z - e^{i\omega})(z - e^{-i\omega})} \\
 &= \frac{z^2 - z \cos(\omega)}{(z - e^{i\omega})(z - e^{-i\omega})} \\
 &= \frac{z^2 - z \cos(\omega)}{z^2 - z(e^{i\omega} + e^{-i\omega}) + 1} \\
 &= \frac{z^2 - z \cos(\omega)}{z^2 - 2z \cos(\omega) + 1}, \quad \text{con } |z| > 1.
 \end{aligned}$$

### Desplazamiento

La propiedad de desplazamiento temporal relaciona la transformada  $\mathcal{Z}$  de la sucesión desplazada con la de la sucesión original sin desplazarla.

(a) **Desplazamiento a la derecha:** Si  $x(i) = 0$ , para  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , entonces:

$$\mathcal{Z}[x(n - k)] = z^{-k} \tilde{x}(z), \quad \text{con } |z| > R.$$

### 3. El método de la transformada $\mathcal{Z}$ y ecuaciones en diferencias de Volterra

---

Se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}[x(n-k)] &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n-k)z^{-n} \\
 &= \sum_{m=-k}^{\infty} x(m)z^{-(m+k)}, \quad m = n-k \\
 &= \sum_{m=-k}^{-1} x(m)z^{-(m+k)} + \sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-(m+k)} \\
 &= 0 + z^{-k} \sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-m} \\
 &= z^{-k}\tilde{x}(z), \quad \text{con } |z| > R.
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.1.11.** Sean  $x, y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  tales que  $x(n) = 0.9^n$  y  $y(n) = 0.8^n$ . Hallemos  $\mathcal{Z}[w(n)]$ , donde  $w(n) = x(n) - y(n-1)$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$  con  $n \geq n_0$  [17, pág. 510]. Se sigue que:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}[w(n)] &= \mathcal{Z}[x(n) - y(n-1)] \\
 &= \mathcal{Z}[x(n)] - \mathcal{Z}[y(n-1)] \\
 &= \tilde{x}(z) - z^{-1}\tilde{y}(z) \\
 &= \frac{z}{z-0.9} - \frac{z^{-1}z}{z-0.8} \\
 &= \frac{z^2 - 1.8z + 0.9}{(z-0.8)(z-0.9)} \\
 &= \frac{(z-0.9)^2 + 0.3^2}{(z-0.8)(z-0.9)}, \quad \text{con } |z| > 0.9.
 \end{aligned}$$

(b) **Desplazamiento a la izquierda:** Se tiene que:

$$\mathcal{Z}[x(n+k)] = z^k \tilde{x}(z) - \sum_{r=0}^{k-1} x(r)z^{k-r}, \quad |z| > R. \quad (3.1.5)$$

Los casos más comunes de la ecuación anterior son los siguientes:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}[x(n+1)] &= z\tilde{x}(z) - zx(0), \quad |z| > R \\
 \mathcal{Z}[x(n+2)] &= z^2\tilde{x}(z) - z^2x(0) - zx(1), \quad |z| > R.
 \end{aligned}$$

Para demostrar la ecuación (3.1.5), notemos que:

$$\mathcal{Z}[x(n+k)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n+k)z^{-n}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{r=k}^{\infty} x(r)z^{-(r-k)}, \quad r = n + k \\
 &= z^k \sum_{r=k}^{\infty} x(r)z^{-r} \\
 &= z^k \left( \sum_{r=0}^{\infty} x(r)z^{-r} - \sum_{r=0}^{k-1} x(r)z^{-r} \right) \\
 &= z^k \left( \tilde{x}(z) - \sum_{r=0}^{k-1} x(r)z^{-r} \right) \\
 &= z^k \tilde{x}(z) - \sum_{r=0}^{k-1} x(r)z^{k-r}, \quad |z| > R.
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.1.12.** Sea  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  tal que  $x(n) = 2^n$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$  con  $n \geq n_0$ . Hallemos la transformada  $\mathcal{Z}$  de  $x(n+2)$ :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}[2^{n+2}] &= z^2 \left( \frac{z}{z-2} \right) - \sum_{r=0}^1 2^r z^{2-r} \\
 &= \frac{z^3}{z-2} - (z^2 + 2z) \\
 &= \frac{4z}{z-2}, \quad |z| > 2.
 \end{aligned}$$

### Inversión en el tiempo

La transformada  $\mathcal{Z}$  de una sucesión invertida en el tiempo es la transformada  $\mathcal{Z}$  de la sucesión original en función de  $z^{-1}$ , por lo que:

$$\mathcal{Z}[x(-n)] = \tilde{x}\left(\frac{1}{z}\right).$$

En efecto, por la definición de la transformada  $\mathcal{Z}$  tenemos:

$$\mathcal{Z}[x(-n)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(-n)z^{-n}.$$

Sustituyendo  $-n = m$ :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}[x(-n)] &= \sum_{m=-\infty}^0 x(m)z^m \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-m}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=0}^{\infty} x(m)(z^{-1})^m \\ &= \tilde{x}\left(\frac{1}{z}\right). \end{aligned}$$

Además, la región de convergencia de  $\mathcal{Z}[x(n)]$  que es  $|z| > R$  se convierte en  $|z| > \frac{1}{R}$ .

### Valor inicial y final

(a) **Teorema del valor inicial:** Esta propiedad es útil para determinar directamente el valor inicial de  $x(n)$ ,  $x(0)$ , a partir de  $\tilde{x}(z)$ . Se tiene que:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \tilde{x}(z) = x(0).$$

Para verificar esto, se realiza lo siguiente:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \\ &= x(0) + \frac{x(1)}{z} + \frac{x(2)}{z^2} + \dots \\ \lim_{|z| \rightarrow \infty} \tilde{x}(z) &= x(0). \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.1.13.** Sea  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  tal que  $\tilde{x}(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{z^2 + 3z - 2}$ . Halleemos el valor inicial de  $x$  [27, pág. 296]. Se sigue que:

$$x(0) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{z^2 - 2z + 5}{z^2 + 3z - 2} = 1.$$

**Ejemplo 3.1.14.** Hemos calculado que  $\mathcal{Z}(\text{sen}(n\omega)) = \frac{z \text{sen}(\omega)}{z^2 - 2z \cos(\omega) + 1}$ , con  $|z| > 1$ . Halleemos el valor inicial  $x(0)$ . Se tiene que:

$$x(0) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{z \text{sen}(\omega)}{z^2 - 2z \cos(\omega) + 1} = 0.$$

(b) **Teorema del valor final:** Esta propiedad nos sirve para determinar el valor final de  $x(n)$ , esto es  $x(\infty)$ , directamente a partir de  $\tilde{x}(z)$ . Si  $x(\infty)$  existe, se sigue que:

$$\begin{aligned} x(\infty) &= \lim_{n \rightarrow \infty} x(n) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)\tilde{x}(z). \end{aligned}$$

Para probar esto, notemos que:

$$\mathcal{Z}[x(n+1) - x(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} [x(n+1) - x(n)]z^{-n}.$$

Utilizando (3.1.5) en el lado izquierdo de la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} z\tilde{x}(z) - zx(0) - \tilde{x}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} [x(n+1) - x(n)]z^{-n} \\ (z-1)\tilde{x}(z) &= zx(0) + \sum_{n=0}^{\infty} [x(n+1) - x(n)]z^{-n}. \end{aligned}$$

De aquí que:

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)\tilde{x}(z) = x(0) + \sum_{n=0}^{\infty} [x(n+1) - x(n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} x(n).$$

**Ejemplo 3.1.15.** Sea  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  tal que  $\tilde{x}(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}}$ . Hallemos el valor final de  $x$  [27, pág. 297]:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (z-1) \left( \frac{z^2 - 2z + 5}{z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}} \right) = \lim_{z \rightarrow \infty} \left( \frac{z^2 - 2z + 5}{z - \frac{1}{2}} \right) = 8.$$

## Convolución

Sean  $x, y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ . La convolución de  $x$  y  $y$  se denota mediante  $*$  y es de la forma siguiente:

$$x(n) * y(n) = \sum_{j=0}^n x(n-j)y(j) = \sum_{j=0}^n x(n)y(n-j).$$

Luego, se tiene que:

$$\mathcal{Z}[x(n) * y(n)] = \tilde{x}(z)\tilde{y}(z).$$

Para demostrar esto, podemos hacer lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[x(n) * y(n)] &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \sum_{j=0}^m x(m-j)y(j) \right] z^{-m} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} y(j) \sum_{m=j}^{\infty} x(m-j)z^{-m} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} y(j) \sum_{s=0}^{\infty} x(s)z^{-(s+j)} \quad \text{con } s = m - j \\ &= \left( \sum_{j=0}^{\infty} y(j)z^{-j} \right) \left( \sum_{s=0}^{\infty} x(s)z^{-s} \right) \quad \text{con } s = m - j \\ &= \tilde{x}(z)\tilde{y}(z). \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.1.16.** Sean  $x, y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  con  $x(n) = a^n$  y  $y(n) = b^n$ , donde  $a, b \in \mathbb{R}$  son fijos. Hallemos la transformada  $\mathcal{Z}$  de la convolución de  $x$  y  $y$ :

$$\mathcal{Z}[x(n) * y(n)] = \tilde{x}(z)\tilde{y}(z) = \left( \frac{z}{z-a} \right) \left( \frac{z}{z-b} \right) = \frac{z^2}{(z-a)(z-b)}.$$

### Multiplicación por $a^n$

Sea  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ . Si  $\tilde{x}(z)$  es la transformada  $\mathcal{Z}$  de  $x$  y  $R$  es su radio de convergencia, se tiene que:

$$\mathcal{Z}[a^n x(n)] = \tilde{x}\left(\frac{z}{a}\right), \quad |z| > |a|R.$$

La prueba es de la forma siguiente:

$$\mathcal{Z}[a^n x(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = \tilde{x}\left(\frac{z}{a}\right).$$

Si  $\tilde{x}(z)$  converge en  $|z| > R$ , entonces el radio de convergencia de  $\tilde{x}\left(\frac{z}{a}\right)$  es  $|z| > |a|R$ .

Notemos que la multiplicación de  $x(n)$  por  $a^n$  corresponde a escalar la variable  $z$ , por ejemplo  $\mathcal{Z}[1] = \frac{z}{z-1}$  con  $|z| > 1$  y  $\mathcal{Z}[2^n] = \frac{z^{\frac{z}{2}}}{z^{\frac{z}{2}}-1} = \frac{z}{z-2}$  con  $|z| > 2$ .

**Ejemplo 3.1.17.** Determinemos la transformada  $\mathcal{Z}$  de  $a^n \cos(n\omega)$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ :

$$\mathcal{Z}[a^n \cos(n\omega)] = \frac{\left(\frac{z}{a}\right)^2 - \frac{z}{a} \cos(\omega)}{\left(\frac{z}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{z}{a}\right) \cos(\omega) + 1} = \frac{z^2 - za \cos(\omega)}{z^2 - 2za \cos(\omega) + a^2} \quad \text{con } |z| > |a|.$$

### Multiplicación por $n^k$

En el Ejemplo 3.1.5 se demostró que  $\mathcal{Z}[na^n] = \frac{az}{(z-a)^2}$ , que también se puede escribir de la forma:

$$\mathcal{Z}[na^n] = -z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}[a^n].$$

Similarmente, la ecuación (3.1.4) puede escribirse:

$$\mathcal{Z}[n^2 a^n] = -z \frac{d}{dz} \left[ -z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}[a^n] \right] = \left( -z \frac{d}{dz} \right)^2 \mathcal{Z}[a^n].$$

De forma general, se tiene que:

$$\mathcal{Z}[n^k x(n)] = \left( -z \frac{d}{dz} \right)^k \mathcal{Z}[x(n)] \quad \text{con } |z| > R.$$

Demostremos esto por inducción. Para  $k = 1$ , se sigue que:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[nx(n)] &= \sum_{n=0}^{\infty} nx(n)z^{-n} \\ &= z \sum_{n=0}^{\infty} x(n)(nz^{-n-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= z \sum_{n=0}^{\infty} -x(n) \frac{d}{dz} [z^{-n}] \\
&= -z \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \\
&= -z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}[x(n)].
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Supongamos que se cumple que  $\mathcal{Z}[n^k x(n)] = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^k \mathcal{Z}[x(n)]$ . Ahora, veamos que  $\mathcal{Z}[n^{k+1} x(n)] = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^{k+1} \mathcal{Z}[x(n)]$ . Se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[n^{k+1} x(n)] &= \mathcal{Z}[n \cdot n^k x(n)] \\
&= \mathcal{Z}[ny(n)] \quad \text{con } y(n) = n^k x(n) \\
&= -z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}[y(n)] \quad \text{con } y(n) = n^k x(n) \\
&= -z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}[n^k x(n)] \\
&= \left(-z \frac{d}{dz}\right) \left( \left(-z \frac{d}{dz}\right)^k \mathcal{Z}[x(n)] \right) \\
&= \left(-z \frac{d}{dz}\right)^{k+1} \mathcal{Z}[x(n)].
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se verifica que  $\mathcal{Z}[n^k x(n)] = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^k \mathcal{Z}[x(n)]$ .

### División por $n$

Esta propiedad es similar a la anterior y puede obtenerse de (3.1.6). Sean  $x, y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  tal que  $y(n) = \frac{1}{n}x(n)$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Se tiene que la transformada  $\mathcal{Z}$  de  $y$  es de la forma siguiente:

$$\mathcal{Z}[y(n)] = - \int \frac{\mathcal{Z}[x(n)]}{z} dz.$$

Veamos que esto es cierto. Debido a que  $y(n) = \frac{1}{n}x(n)$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ , se sigue que  $x(n) = ny(n)$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Luego, por la ecuación (3.1.6):

$$\mathcal{Z}[(x(n))] = \mathcal{Z}[ny(n)] = -z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}[y(n)].$$

Reordenando e integrando en ambos lados de la ecuación anterior, obtenemos  $\mathcal{Z}[y(n)] = - \int \frac{\mathcal{Z}[x(n)]}{z} dz$ . Notemos que el radio de convergencia de  $\tilde{y}(z)$  no incluye a  $z = 0$ .

**Ejemplo 3.1.18.** Sea  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  tal que  $x(n) = \frac{a^n}{n}$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Hallemos la transformada  $\mathcal{Z}$  de  $x$ :

$$\mathcal{Z} \left[ \frac{a^n}{n} \right] = - \int \frac{\mathcal{Z}[a^n]}{z} dz = - \int \frac{1}{z} \cdot \frac{z}{z-a} dz = - \ln(z-a).$$

### 3. El método de la transformada $\mathcal{Z}$ y ecuaciones en diferencias de Volterra

---

#### Multiplicación por $e^{-an}$

Sea  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ . Se tiene que:

$$\mathcal{Z}[e^{-an}x(n)] = \tilde{x}(e^a z).$$

Esto es debido a que:

$$\mathcal{Z}[e^{-an}x(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-an}x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)(e^a z)^{-n} = \tilde{x}(e^a z).$$

#### Suma o acumulación

Sea  $y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  tal que  $y(n) = \sum_{m=0}^n x(m)$ . La propiedad de acumulación establece que:

$$\mathcal{Z}[y(n)] = \mathcal{Z}\left[\sum_{m=0}^n x(m)\right] = \frac{z}{z-1}\mathcal{Z}[x(n)].$$

Para probar la igualdad anterior, escribimos:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n-1} x(m) + x(n) = y(n-1) + x(n).$$

Utilizando las propiedades de linealidad y desplazamiento a la derecha, se sigue que:

$$\mathcal{Z}[y(n)] = \mathcal{Z}[y(n-1)] + \mathcal{Z}[x(n)] = \frac{1}{z}\mathcal{Z}[y(n)] + \mathcal{Z}[x(n)],$$

resolviendo para  $\mathcal{Z}[y(n)]$ :

$$\mathcal{Z}[y(n)] = \frac{\mathcal{Z}[x(n)]}{\frac{z-1}{z}} = \frac{z}{z-1}\mathcal{Z}[x(n)].$$

**Ejemplo 3.1.19.** Sea  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  tal que  $x(n) = (-1)^n$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Hallemos la transformada  $\mathcal{Z}$  de  $y(n) = \sum_{m=0}^n x(m)$ :

$$\mathcal{Z}[y(n)] = \mathcal{Z}\left[\sum_{m=0}^n (-1)^m\right] = \frac{z}{z-1} \frac{z}{z+1} = \frac{z^2}{z^2-1}.$$

#### Semiperiodicidad

Sea  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  tal que es periódica de período  $N \in \mathbb{N}$ , esto es,  $x(n+N) = x(n)$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Se tiene que la transformada  $\mathcal{Z}$  de una sucesión periódica de período  $N$  es de la forma siguiente:

$$\mathcal{Z}[x(n)] = \frac{z^N}{z^N-1} \sum_{k=0}^{N-1} x(k)z^{-k}. \quad (3.1.7)$$



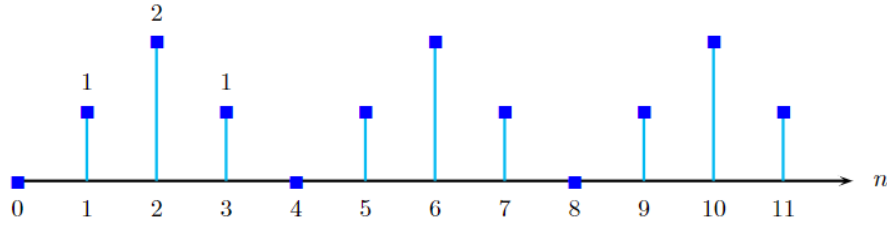


Figura 3.2: Sucesión periódica.

Recordemos que  $\mathcal{Z}[x(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$ . Dado que  $x(n)$  es periódica de período  $N$ , podemos escribir la suma en bloques de tamaño  $N$ :

$$\mathcal{Z}[x(n)] = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} x(k)z^{-(mN+k)} = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)z^{-k} \sum_{m=0}^{\infty} z^{-mN},$$

donde  $m$  representa el número de bloques completos de tamaño  $N$  y  $k$  recorre los valores dentro de un bloque de tamaño  $N$ . Notemos que en la ecuación anterior se involucra la suma geométrica,  $\sum_{m=0}^{\infty} z^{-mN} = \frac{1}{1-z^{-N}}$ . Lo que quiere decir que:

$$\mathcal{Z}[x(n)] = \frac{z^N}{z^N - 1} \sum_{k=0}^{N-1} x(k)z^{-k}.$$

**Ejemplo 3.1.20.** Determinemos la transformada  $\mathcal{Z}$  de la sucesión periódica mostrada en la Figura 3.2.

Notemos que la sucesión periódica  $x(n)$  es de período  $N = 4$  y está definida como:

$$x(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ 1 & \text{si } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ 2 & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4}, \\ 1 & \text{si } n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Utilizando (3.1.7), se sigue que:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[x(n)] &= \frac{z^4}{z^4 - 1} (x(0)z^0 + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3}) \\ &= \frac{z^4}{z^4 - 1} (0 \cdot z^0 + 1 \cdot z^{-1} + 2 \cdot z^{-2} + 1 \cdot z^{-3}) \\ &= \frac{z^3 + 2z^2 + z}{z^4 - 1}. \end{aligned}$$

## 3.2. Inversa de la transformada $\mathcal{Z}$ y solución de ecuaciones en diferencias

La transformada  $\mathcal{Z}$  juega un papel fundamental en los pasos para una forma de resolución de ecuaciones en diferencias, esto al transformar una sucesión desconocida  $x(n)$  en una ecuación algebraica en su transformada  $\tilde{x}(z)$ . Para recuperar la sucesión original  $x(n)$  a partir de  $\tilde{x}(z)$ , utilizamos la inversa de la transformada  $\mathcal{Z}$ .

Un ejemplo práctico de la aplicación de la inversa de la transformada  $\mathcal{Z}$  se encuentra en el área de la Electrónica, donde se emplea para determinar la respuesta al impulso  $H(n)$  de un filtro digital a partir de su función de transferencia  $\tilde{H}(z)$ .

**Definición 3.2.1.** Sea  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ . La inversa de la transformada  $\mathcal{Z}$  se denota y define de la forma siguiente:

$$\mathcal{Z}^{-1}[\tilde{x}] = x.$$

**Proposición 3.2.2.** La inversa de la transformada  $\mathcal{Z}$  es única.

*Demostración.* Supongamos que existen  $x, y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  con la misma transformada  $\mathcal{Z}$ . Lo que quiere decir que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} y(n)z^{-n} \quad \text{con } |z| > R. \quad (3.2.1)$$

De aquí que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [x(n) - y(n)] z^{-n} = 0 \quad \text{con } |z| > R. \quad (3.2.2)$$

Del Teorema de Laurent [7, Teorema 1.11], se sigue que  $x(n) \equiv y(n)$ . Sin embargo, es preciso mencionar que la inversa de la transformada  $\mathcal{Z}$  es única siempre que la región de convergencia esté especificada. ■

En la Tabla 3.2.1 se concentran las transformadas  $\mathcal{Z}$  y sus respectivas inversas de funciones elementales, debido a que será de gran utilidad en algunos métodos para calcular las inversas.

La inversa de la transformada  $\mathcal{Z}$  se puede obtener por más métodos que la inversa de la transformada de Laplace, siendo la expansión de fracciones parciales el método más utilizado. Los métodos que se analizan en este documento son los más comunes y son los siguientes:

- Método de series de potencia.
- Método de fracciones parciales.
- Método de inversión integral.

Tabla 3.2.1: Pares de la transformada  $\mathcal{Z}$ .

|    | $x(n)$        | $\tilde{x}(z)$  |    | $x(n)$                               | $\tilde{x}(z)$  |
|----|---------------|---|----|--------------------------------------|---|
| 1  | $\delta_0(n)$ | 1   | 15 | $n^k a^n$                            | $(-1)^k \left(z \frac{d}{dz}\right)^k \left(\frac{z}{z-a}\right)$ |
| 2  | $\delta_k(n)$ | $\frac{1}{z^k}$   | 16 | $\text{sen}(n\omega)$                | $\frac{z \text{sen}(\omega)}{z^2 - 2z \cos(\omega) + 1}$          |
| 3  | 1             | $\frac{z}{z-1}$   | 17 | $\text{cos}(n\omega)$                | $\frac{z^2 - z \cos(\omega)}{z^2 - 2z \cos(\omega) + 1}$          |
| 4  | $a^n$         | $\frac{z}{z-a}$   | 18 | $a^n \text{sen}(n\omega)$            | $\frac{a z \text{sen}(\omega)}{z^2 - 2az \cos(\omega) + a^2}$     |
| 5  | $a^{n-1}$     | $\frac{1}{z-a}$   | 19 | $a^n \text{cos}(n\omega)$            | $\frac{z^2 - az \cos(\omega)}{z^2 - 2az \cos(\omega) + a^2}$      |
| 6  | $n$           | $\frac{z}{(z-1)^2}$   | 20 | $\frac{a^n}{n!}$                     | $e^{\frac{a}{z}}$   |
| 7  | $n+1$         | $\frac{z^2}{(z-1)^2}$   | 21 | $\text{cosh}(n\omega)$               | $\frac{z^2 - z \cosh(\omega)}{z^2 - 2z \cosh(\omega) + 1}$        |
| 8  | $n^2$         | $\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$  | 22 | $\text{senh}(n\omega)$               | $\frac{z \text{senh}(\omega)}{z^2 - 2z \cosh(\omega) + 1}$        |
| 9  | $n^3$         | $\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$                                     | 23 | $\frac{1}{n}, n > 0$                 | $\ln\left(\frac{z}{z-1}\right)$                                   |
| 10 | $n^k$         | $(-1)^k \left(z \frac{d}{dz}\right)^k \left(\frac{z}{z-1}\right)$ | 24 | $e^{n\omega} x(n)$                   | $\tilde{x}(e^\omega z)$   |
| 11 | $na^n$        | $\frac{az}{(z-a)^2}$  | 25 | $n^{(2)} = n(n-1)$                   | $\frac{2z}{(z-1)^3}$  |
| 12 | $(n+1)a^n$    | $\frac{z^2}{(z-a)^2}$   | 26 | $n^{(k)} = n(n-1)\dots$<br>$(n-k+1)$ | $\frac{k!z}{(z-1)^{k+1}}$   |
| 13 | $n^2 a^n$     | $\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$   | 27 | $x(n-k)$                             | $z^{-k} \tilde{x}(z)$   |
| 14 | $n^3 a^n$     | $\frac{az(z^2+4az+a^2)}{(z-a)^4}$                                 | 28 | $x(n+k)$                             | $z^k \tilde{x}(z)$<br>$-\sum_{r=0}^{k-1} x(r) z^{k-r}$            |

Antes de desarrollar cada método, es crucial recordar que al hallar la inversa de la transformada  $\mathcal{Z}$ , siempre se supone que para cualquier sucesión  $x(n)$ , se tiene que  $x(k) = 0$  con  $k = -1, -2, -3, \dots$

### 3.2.1. Método de series de potencia

Mediante este método podemos obtener la inversa de la transformada  $\mathcal{Z}$  expandiendo  $\tilde{x}(z)$  en una serie de potencias infinita en  $z^{-1}$  en su región de convergencia:

$$\tilde{x}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{-i} \quad \text{con } |z| > R.$$

Luego, comparando la ecuación anterior con  $\mathcal{Z}[x(n)] = \sum_{i=0}^{\infty} x(i) z^{-i}$  para  $|z| > R$ , se concluye que  $x(n) = a_n$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ .

Si  $\tilde{x}(z)$  se da en forma de función racional  $\tilde{x}(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ , donde  $g(z)$  y  $h(z)$  son polinomios en  $z$ , entonces simplemente se realiza la división de  $g(z)$  entre  $h(z)$  para obtener una expansión en serie de potencias  $\tilde{x}(z)$  en  $z^{-1}$ . Este es un caso particular y es conocido como método de la división larga.

**Ejemplo 3.2.3.** Determinemos la inversa de la transformada  $\mathcal{Z}$  de  $\tilde{x}(z) = \ln\left(1 + \frac{a}{z}\right)$  con  $|z| > |a|$ .

### 3. El método de la transformada $\mathcal{Z}$ y ecuaciones en diferencias de Volterra

---

La expansión en serie de potencias para  $\ln(1+u)$  es  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} u^n$  para  $u < 1$ . Lo que quiere decir que:

$$\tilde{x}(z) = \ln\left(1 + \frac{a}{z}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1} a^n}{n}\right) z^{-n} \quad \text{con } |z| > |a|.$$

Notemos que la suma inicia desde  $n = 1$ , a diferencia de la suma que define a la transformada  $\mathcal{Z}$ , que comienza en  $n = 0$ . Sin embargo, en este caso, al observar la expansión en series de potencias, vemos que para  $n = 0$ , en la suma de la serie logarítmica es cero, porque  $\ln(1) = 0$ . Por lo tanto, el desarrollo en series efectivamente comienza en  $n = 1$  y no se pierde información al considerar únicamente los términos desde  $n = 1$ . De todo lo anterior, para mayor claridad, escribimos a  $x(n)$  de la forma siguiente:

$$x(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \frac{(-1)^{n+1} a^n}{n}, & n \geq 1. \end{cases}$$

**Ejemplo 3.2.4.** Hallemos la inversa de la transformada  $\mathcal{Z}$  de  $\tilde{x}(z) = \ln\left(1 - \frac{a}{z}\right)$  con  $|z| > |a|$ .

La expansión en serie de potencias para  $\ln(1-u)$  es  $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} u^n$  para  $|u| < 1$ . De aquí que:

$$\tilde{x}(z) = \ln\left(1 - \frac{a}{z}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{a^n}{n}\right) z^{-n} \quad \text{con } |z| > |a|.$$

Lo que quiere decir que:

$$x(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ -\frac{a^n}{n}, & n \geq 1. \end{cases}$$

#### Método de la división larga

Ahora veamos algunos ejemplos del ya mencionado método de la división larga. Es preciso mencionar que un posible inconveniente de este método es que no nos proporciona una expresión en forma cerrada de  $x(n)$ , es decir, que aunque se puede obtener una serie de valores para  $x(n)$ , no obtenemos una fórmula general que describa  $x(n)$  en términos de  $n$ . Adicionalmente, la división larga se vuelve tediosa si se necesitan más de unos pocos valores. Esta importante deficiencia limita la utilidad del enfoque de división larga.

**Ejemplo 3.2.5.** Utilicemos el método de la división larga para hallar la inversa de la transformada  $\mathcal{Z}$  de  $\tilde{x}(z) = \frac{z^2-2}{z^3+z+3}$ .

Realizamos la división larga de la siguiente forma:

$$\begin{array}{r}
 z^{-1} + 0 \cdot z^{-2} - 3z^{-3} + 3z^{-4} \\
 \hline
 z^3 + z + 3 \quad \left| \begin{array}{l} z^2 - 2 \\ z^2 + 1 + 3z^{-1} \\ \hline -3 + 3z^{-1} \\ -3 - 3z^{-2} - 9z^{-3} \\ \hline 3z^{-1} + 3z^{-2} + 9z^{-3} \\ 3z^{-1} + 3z^{-3} + 9z^{-4} \\ \hline 3z^{-2} + 6z^{-3} - 9z^{-4} \end{array} \right.
 \end{array}$$

Lo que quiere decir que:

$$\tilde{x}(z) = z^{-1} - 3z^{-3} + 3z^{-4} + \dots$$

Por lo tanto,  $x(n) = \{0, 1, 0, -3, 3, \dots\}$ .

**Ejemplo 3.2.6.** Hallemos la inversa de la transformada  $\mathcal{Z}$  de  $\tilde{x}(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^2}$ .

Escribamos  $\tilde{x}(z)$  como un cociente entre dos polinomios en términos de  $z^{-1}$ , obteniendo:

$$\tilde{x}(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}$$

Realizando la división larga:

$$\tilde{x}(z) = 1 + 3z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + 9z^{-4} + 11z^{-5} + \dots$$

De aquí,  $x(0) = 1$ ,  $x(1) = 3$ ,  $x(2) = 5$ ,  $x(3) = 7$ ,  $x(4) = 9, \dots$  En consecuencia,  $x(n) = 2n + 1$ .

### 3.2.2. Método de fracciones parciales

La mayoría de las transformadas  $\mathcal{Z}$  de interés práctico son funciones racionales en  $z$ , analítica en  $\infty$  de la forma siguiente:

$$\tilde{x}(z) = \frac{\tilde{p}(z)}{\tilde{q}(z)} = \frac{b_0z^m + b_1z^{m-1} + \dots + b_{m-1}z + b_m}{a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + b_n} \quad \text{con } m \leq n. \quad (3.2.3)$$

### 3. El método de la transformada $\mathcal{Z}$ y ecuaciones en diferencias de Volterra

---

Factorizando  $\tilde{q}(z)$  en un producto de términos, podemos expresar a  $\tilde{x}(z)$  como la suma de fracciones parciales:

$$\tilde{x}(z) = \tilde{x}_1(z) + \tilde{x}_2(z) + \tilde{x}_3(z) + \cdots .$$

Al igual que la transformada  $\mathcal{Z}$  es lineal, la inversa de la transformada  $\mathcal{Z}$  también tiene esta propiedad, por lo que la suma de cada una de las inversas de  $\tilde{x}_1(z), \tilde{x}_2(z), \tilde{x}_3(z), \dots$  es la inversa de la transformada  $\mathcal{Z}$  dada. De este modo:

$$x(n) = \mathcal{Z}^{-1}[\tilde{x}_1(z)] + \mathcal{Z}^{-1}[\tilde{x}_2(z)] + \mathcal{Z}^{-1}[\tilde{x}_3(z)] + \cdots .$$

De aquí que la Tabla 3.2.1 es útil para calcular  $\mathcal{Z}^{-1}[\tilde{x}_i(z)]$ , para cada  $i \in \mathbb{Z}_+$ . Antes de proporcionar ejemplos de este método tengamos en cuenta la siguiente:

**Definición 3.2.7.** Las raíces de  $\tilde{p}(z)$  en la ecuación (3.2.3) son conocidas como *ceros de  $\tilde{x}(z)$*  y las raíces de  $\tilde{q}(z)$  son llamadas *polos de  $\tilde{x}(z)$* .

Ilustramos los casos de polos simples, polos repetidos y polos complejos, proporcionando tanto ejemplos del método en cada caso como ejemplos de cómo se resuelven algunas ecuaciones en diferencias utilizando la transformada  $\mathcal{Z}$  y su inversa.

#### Polos simples

**Ejemplo 3.2.8.** Hallemos la inversa de la transformada  $\mathcal{Z}$  de  $\tilde{x}(z) = \frac{7z^2 - 23z}{(z-3)(z-4)}$ .

Realizando la expansión en fracciones parciales de  $\tilde{x}(z)$ , se tiene que:

$$\frac{\tilde{x}(z)}{z} = \frac{7z - 23}{(z-3)(z-4)} = \frac{a}{z-3} + \frac{b}{z-4}.$$

Luego, multiplicamos la ecuación por  $(z-3)(z-4)$ :

$$7z - 23 = a(z-4) + b(z-3).$$

Si hacemos  $z = 3$  en la ecuación anterior, obtenemos  $a = 2$ . De forma similar, si sustituimos  $z = 4$ , hallamos que  $b = 5$ . De aquí que:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{x}(z)}{z} &= \frac{2}{z-3} + \frac{5}{z-4} \\ \tilde{x}(z) &= 2 \left( \frac{z}{z-3} \right) + 5 \left( \frac{z}{z-4} \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $x(n) = 2(3)^n + 5(4)^n$ .

**Ejemplo 3.2.9.** Sea  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ . Resolvamos la siguiente ecuación en diferencias:

$$x(n+2) + 3x(n+1) + 2x(n) = 0 \quad \text{con} \quad x(0) = 1, \quad x(1) = -4.$$

Calculando la transformada  $\mathcal{Z}$  obtenemos:

$$\tilde{x}(z) = \frac{z(z-1)}{(z+1)(z+2)}.$$

Realizamos la expansión en fracciones parciales de  $\frac{\tilde{x}(z)}{z}$ :

$$\frac{\tilde{x}(z)}{z} = \frac{z-1}{(z+1)(z+2)} = \frac{a}{z+1} + \frac{b}{z+2}.$$

Multiplicando la ecuación anterior por  $(z+1)(z+2)$ , para eliminar la fracción:

$$\begin{aligned} z-1 &= a(z+2) + b(z+1) \\ &= (a+b)z + (2a+b). \end{aligned}$$

Comparando los coeficientes de las potencias iguales de  $z$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} a+b &= 1 \\ 2a+b &= -1. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior obtenemos  $a = -2$  y  $b = 3$ . Lo que quiere decir que:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{x}(z)}{z} &= \frac{-2}{z+1} + \frac{3}{z+2} \\ \tilde{x}(z) &= -2 \left( \frac{z}{z+1} \right) + 3 \left( \frac{z}{z+2} \right). \end{aligned}$$

Utilizando la inversa de la transformada  $\mathcal{Z}$  en ambos lados de la ecuación, se sigue que la solución de la ecuación en diferencias es la siguiente:

$$x(n) = -2(-1)^n + 3(-2)^n.$$

### Polos repetidos

**Ejemplo 3.2.10.** Calculemos la inversa de la transformada  $\mathcal{Z}$  de  $\tilde{x}(z) = \frac{z(z+1)}{(z-\frac{1}{2})(z-1)^2}$ .

Haciendo la descomposición en fracciones parciales de  $\tilde{x}(z)$ , se sigue que:

$$\frac{\tilde{x}(z)}{z} = \frac{z+1}{z(z-\frac{1}{2})(z-1)^2} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-\frac{1}{2}} + \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{(z-1)^2}.$$

### 3. El método de la transformada $\mathcal{Z}$ y ecuaciones en diferencias de Volterra

De esta forma:

$$z + 1 = a \left( z - \frac{1}{2} \right) (z - 1)^2 + bz(z - 1)^2 + c_1 z \left( z - \frac{1}{2} \right) (z - 1) + c_2 z \left( z - \frac{1}{2} \right).$$

Realizando las sustituciones adecuadas, hallamos que  $a = -2$ ,  $b = 12$ ,  $c = -10$  y  $d = 4$ . Se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{x}(z)}{z} &= \frac{-2}{z} + \frac{12}{z - \frac{1}{2}} + \frac{-10}{z - 1} + \frac{4}{(z - 1)^2} \\ \tilde{x}(z) &= -2 + \frac{12z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{-10z}{z - 1} + \frac{4z}{(z - 1)^2}. \end{aligned}$$

Ocupando la inversa de la transformada  $\mathcal{Z}$ , obtenemos  $x(n) = -2\delta_0(n) + 12 \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 10 + 4n$ .

**Ejemplo 3.2.11.** Sea  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ . Resolvamos la siguiente ecuación en diferencias:

$$x(n + 4) + 9x(n + 2) + 30x(n + 1) + 44x(n) = 0,$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0, \quad x(2) = 1, \quad x(3) = 10.$$

Calculamos la transformada  $\mathcal{Z}$  de la ecuación en diferencias:

$$\tilde{x}(z) = \frac{z(z - 1)}{(z + 2)^3(z + 3)}.$$

Realizamos la expansión de  $\frac{\tilde{x}(z)}{z}$  en fracciones parciales y obtenemos lo siguiente:

$$\frac{\tilde{x}(z)}{z} = \frac{(z - 1)}{(z + 2)^3(z + 3)} = \frac{a_1}{z + 2} + \frac{a_2}{(z + 2)^2} + \frac{a_3}{(z + 2)^3} + \frac{b}{z + 3}.$$

Haciendo las sustituciones necesarias concluimos que  $a_1 = -4$ ,  $a_2 = 4$ ,  $a_3 = -3$  y  $b = 4$ . Lo que quiere decir que:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{x}(z)}{z} &= \frac{-4}{z + 2} + \frac{4}{(z + 2)^2} + \frac{-3}{(z + 2)^3} + \frac{4}{z + 3} \\ \tilde{x}(z) &= \frac{-4z}{z + 2} + \frac{4z}{(z + 2)^2} + \frac{-3z}{(z + 2)^3} + \frac{4z}{z + 3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación en diferencias es de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} x(n) &= -4(-2)^n - 2n(-2)^n + \frac{3}{4}n(n - 1)(-2)^n + 4(-3)^n \\ &= \left( \frac{3}{4}n^2 - \frac{11}{4}n - 4 \right) (-2)^n + 4(-3)^n. \end{aligned}$$



### Polos complejos

En este caso también se utiliza el mismo procedimiento que en los dos casos anteriores. Si los coeficientes de  $\tilde{x}(z)$  son reales, entonces los pares de polos complejos conjugados siempre tendrán coeficientes complejos conjugados con sus respectivas fracciones parciales una vez realizada la descomposición. Por lo tanto, sólo es necesario calcular uno de los coeficientes complejos para cada par de polos complejos conjugados.

**Ejemplo 3.2.12.** Sea  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ . Resolvamos la siguiente ecuación en diferencias:

$$x(n+3) - x(n+2) + 2x(n) = 0 \quad \text{con} \quad x(0) = 1, \quad x(1) = 1.$$

Utilizando la transformada  $\mathcal{Z}$  en ambos lados de la ecuación en diferencias, se tiene que:

$$\tilde{x}(z) = \frac{z^3}{(z^2 - 2z + 2)(z + 1)}.$$

Haciendo la descomposición de  $\frac{\tilde{x}(z)}{z}$  en fracciones parciales:

$$\frac{\tilde{x}(z)}{z} = \frac{z^2}{(z^2 - 2z + 2)(z + 1)} = \frac{a_1}{z - (1 + i)} + \frac{a_2}{z - (1 - i)} + \frac{b}{z + 1}.$$

Realizando las sustituciones adecuadas hallamos las constantes  $a_1 = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$ ,  $a_2 = \overline{a_1} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$  y  $b = \frac{1}{5}$ . Para simplificar el procedimiento, pongamos  $\lambda = 1 + i$ . Luego, se sigue que:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{x}(z)}{z} &= \frac{a_1}{z - \lambda} + \frac{a_2}{z - \overline{\lambda}} + \frac{\frac{1}{5}}{z + 1} \\ \tilde{x}(z) &= \frac{a_1 z}{z - \lambda} + \frac{\overline{a_1} z}{z - \overline{\lambda}} + \frac{\frac{1}{5} z}{z + 1}. \end{aligned}$$

Esto significa que:

$$x(n) = a_1 \lambda^n + \overline{a_1} \overline{\lambda}^n + \frac{1}{5} (-1)^n.$$

Notemos que  $a_1 \lambda^n + \overline{a_1} \overline{\lambda}^n = 2\text{Re}(a_1 \lambda^n)$ . Para calcular  $\text{Re}(a_1 \lambda^n)$ , es útil escribir  $\lambda^n$  en su forma polar  $\lambda^n = |\lambda^n|(\cos(n \arg(\lambda)) + i \text{sen}(n \arg(\lambda)))$ . De aquí que:

$$\begin{aligned} a_1 \lambda^n &= |a_1| |\lambda^n| (\cos(n \arg(\lambda) + \arg(a_1)) + i \text{sen}(n \arg(\lambda) + \arg(a_1))) \\ \text{Re}(a_1 \lambda^n) &= |a_1| |\lambda^n| (\cos(n \arg(\lambda) + \arg(a_1))) \\ &= \left(\frac{1}{5} \sqrt{5}\right) (\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4} - 0.463\right), \end{aligned}$$

dado que  $|a_1| = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{1}{5} \sqrt{5}$ ,  $|\lambda| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ,  $\arg(\lambda) = \tan^{-1}\left(\frac{\text{Im}(\lambda)}{\text{Re}(\lambda)}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$  y  $\arg(a_1) = \tan^{-1}\left(\frac{\text{Im}(a_1)}{\text{Re}(a_1)}\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -0.463$ . Lo que quiere decir que:

$$x(n) = \frac{1}{5} (-1)^n + \left(\frac{2}{5} \sqrt{5}\right) (\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4} - 0.463\right).$$

### 3.2.3. Método de inversión integral

En las secciones anteriores exploramos los métodos de series de potencias y fracciones parciales para hallar la inversa de la transformada  $\mathcal{Z}$  de diversas funciones, sin embargo, no siempre es posible utilizar estos métodos. Nuevamente hallamos una analogía con el caso continuo, debido a que cuando se puede hallar la inversa de la transformada de Laplace utilizando fracciones parciales, es posible ocupar la integral de contorno de Bromwich [17]. En el caso discreto se tiene algo similar, ya que cuando no es posible utilizar las fracciones parciales, se puede encontrar la inversa de la transformada  $\mathcal{Z}$  mediante la integración de contornos complejos, que es la herramienta de inversión definitiva. La inversa de la transformada  $\mathcal{Z}$  de  $\tilde{x}(z)$  es la suma de todos los residuos de  $\tilde{x}(z)z^{n-1}$ . De la definición de transformada  $\mathcal{Z}$  se tiene que:

$$\tilde{x}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} x(i)z^{-i}.$$

Multiplicando esta ecuación por  $z^{n-1}$  en ambos lados, se sigue que:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(z)z^{n-1} &= \sum_{i=0}^{\infty} x(i)z^{n-i-1} \\ &= x(0)z^{n-1} + x(1)z^{n-2} + \dots + x(n)z^{-1} + x(n+1)z^{-2} + \dots \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

La ecuación (3.2.4) da la expansión en series de Laurent [7, Teorema 1.11] de  $\tilde{x}(z)z^{n-1}$  alrededor de  $z = 0$ .

Sea  $C$  la región de convergencia de  $\tilde{x}(z)$ . Tomando la integral de contorno en ambos lados de (3.2.4):

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \tilde{x}(z)z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \left[ \sum_{i=0}^{\infty} x(i)z^{-i} \right] z^{n-1} dz.$$

Dado que la suma converge a  $\tilde{x}(z)$  dentro de la región de convergencia, la integral y la suma se pueden intercambiar:

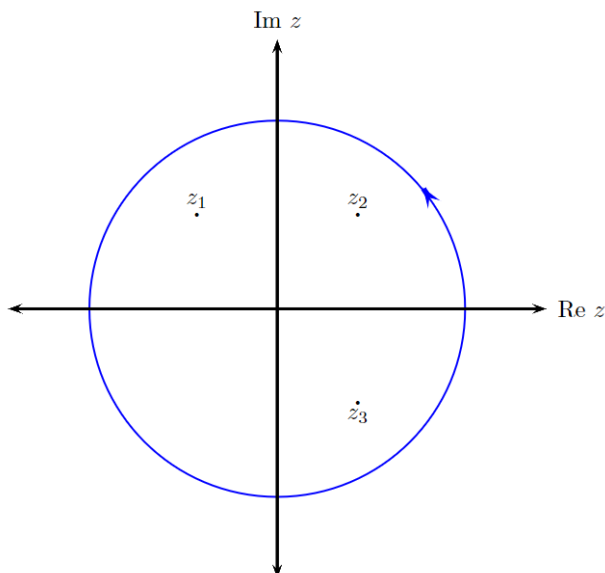
$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \tilde{x}(z)z^{n-1} dz = \sum_{i=0}^{\infty} x(i) \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_C z^{n-i-1} dz \right].$$

Luego, por el Teorema Integral de Cauchy se establece que:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C z^{n-i-1} dz = \begin{cases} 1 & \text{si } n = i, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.2.5)$$

De aquí que, por la ecuación (3.2.5) se sigue que:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \tilde{x}(z)z^{n-1} dz. \quad (3.2.6)$$


 Figura 3.3: Polos de  $\tilde{x}(z)$ .

Por el Teorema del Residuo [17, pág. 530], se tiene que:

$$x(n) = \text{suma de los residuos de } \tilde{x}(z)z^{n-1}. \quad (3.2.7)$$

Luego, supongamos que:

$$\tilde{x}(z)z^{n-1} = \frac{h(z)}{g(z)}.$$

Al evaluar los residuos de  $\tilde{x}(z)z^{n-1}$ , obtenemos los casos siguientes:

- Caso 1:  $g(z)$  tiene ceros simples. Esto significa que  $\tilde{x}(z)z^{n-1}$  tiene polos simples, como podemos observar en la Figura 3.3. En este caso, el residuo  $K_i$  en el polo  $z_i$  está dado por:

$$K_i = \lim_{z \rightarrow z_i} \left[ (z - z_i) \frac{h(z)}{g(z)} \right]. \quad (3.2.8)$$

- Caso 2:  $g(z)$  tiene ceros repetidos. Lo que quiere decir que  $\tilde{x}(z)z^{n-1}$  tiene polos repetidos. Si  $g(z)$  tiene un cero repetido  $z_i$  de orden  $r$ , entonces el residuo  $K_i$  en  $z_i$  es de la forma:

$$K_i = \frac{1}{(r-1)!} \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}} \left[ (z - z_i) \frac{h(z)}{g(z)} \right].$$

**Ejemplo 3.2.13.** Hallemos la inversa de la transformada  $\mathcal{Z}$  de  $\tilde{x}(z) = \frac{z(z-1)}{(z-2)^2(z+3)}$  utilizando el método de inversión integral.

Multiplicando por  $z^{n-1}$  en ambos lados de la ecuación obtenemos:

$$\tilde{x}(z)z^{n-1} = \frac{(z-1)z^n}{(z-2)^2(z+3)}.$$

### 3. El método de la transformada $\mathcal{Z}$ y ecuaciones en diferencias de Volterra

---

Esto es,  $\tilde{x}(z)z^{n-1}$  tiene un polo simple en  $z_1 = 3$  y un polo repetido en  $z_2 = 2$ . De la ecuación (3.2.7), se sigue que  $x(n) = K_1 + K_2$ , donde  $K_1$  y  $K_2$  son los residuos de  $\tilde{x}(z)z^{n-1}$  en  $z_1$  y  $z_2$ , respectivamente. Se tiene que:

$$\begin{aligned} K_1 &= \lim_{z \rightarrow -3} \left[ \frac{(z+3)(z-1)z^n}{(z-2)^2(z+3)} \right] \\ &= -\frac{4}{25}(-3)^n, \\ K_2 &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d}{dz} \left[ \frac{(z-2)^2(z-1)z^n}{(z-2)^2(z+3)} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 2} \frac{z^{n-1}[(z+3)(z+nz-n) - z(z-1)]}{(z+3)^2} \\ &= \left( \frac{8+5n}{25} \right) (2)^{n-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la inversa de  $\tilde{x}(z)$  es de la forma siguiente:

$$x(n) = -\frac{4}{25}(-3)^n + \left( \frac{8+5n}{25} \right) (2)^{n-1}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

**Ejemplo 3.2.14.** Calculemos la inversa de la transformada  $\mathcal{Z}$  de  $\tilde{x}(z) = \frac{z}{z-a}$  con  $|z| > |a|$ , obtenida en el Ejemplo 3.1.4. Se tiene que:

$$\tilde{x}(z)z^{n-1} = \frac{z^n}{z-a}.$$

Lo que quiere decir que  $\tilde{x}(z)z^{n-1}$  tiene únicamente el polo simple  $z_1 = a$ . Debido a que es el único polo de esta ecuación, por (3.2.7), se tiene que  $x(n) = K_1$ , donde  $K_1$  es el residuo de  $\tilde{x}(z)z^{n-1}$  en  $z_1$ . De aquí que:

$$x(n) = K_1 = \lim_{z \rightarrow a} \left[ \frac{(z-a)z^n}{z-a} \right] = a^n, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

### 3.3. Ecuaciones en diferencias de Volterra de tipo convolución: el caso escalar

Las ecuaciones de Volterra con tiempo discreto surgen principalmente en el proceso de modelado de algunos fenómenos reales o aplicando un método numérico a una ecuación integral de Volterra. La estabilidad y la acotación se encuentran entre las propiedades más importantes de las soluciones de las ecuaciones en diferencias de Volterra. De hecho, el error entre la solución verdadera y numérica de una ecuación integral de Volterra satisface una ecuación discreta de Volterra y por lo tanto, la acotación de las soluciones de esta ecuación discreta de Volterra asegura la acotación del error global, es decir, la estabilidad del considerado método numérico.

**Definición 3.3.1.** Sea  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ . Las ecuaciones en diferencias de Volterra de tipo convolución son de la forma siguiente:

$$x(n+1) = ax(n) + \sum_{j=0}^n b(n-j)x(j), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \quad (3.3.1)$$

donde  $a \in \mathbb{R}$  y  $b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función discreta.

Esta ecuación es considerada el análogo discreto a la ecuación integrodiferencial de Volterra en el caso continuo [11]:

$$x'(t) = ax(t) + \int_0^s b(t-s)x(s) ds.$$

Notemos que en la ecuación en diferencias (3.3.1) el tiempo futuro  $x(n+1)$  no depende solamente de  $x(n)$ , sino que depende de los anteriores  $x(i)$ , con  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ . Estos sistemas en ocasiones son llamados *hereditarios*.

**Proposición 3.3.2.** Sean  $x, y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ . Si ambas son soluciones de (3.3.1) con  $x(0) = y(0)$ , entonces  $x(n) = y(n)$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ .

*Demostración.* Supongamos que  $x$  y  $y$  son soluciones de (3.3.1) con  $x(0) = y(0)$ . La prueba se realiza por inducción.

Para  $n = 0$ , por hipótesis se cumple que  $x(0) = y(0)$ .

Supongamos que para algún  $m \in \mathbb{Z}_+$ , se tiene que  $x(m) = y(m)$ . Veamos que  $x(m+1) = y(m+1)$ . A partir de la ecuación de Volterra para  $x$ , evaluada en  $n = m$ , se sigue que:

$$x(m+1) = ax(m) + \sum_{j=0}^m b(m-j)x(j).$$

Por la hipótesis de inducción, sabemos que  $x(j) = y(j)$  con  $j = 0, 1, \dots, m$ . Sustituyendo en la ecuación para  $x(m+1)$ :

$$x(m+1) = ay(m) + \sum_{j=0}^m b(m-j)y(j).$$

Comparando con la ecuación para  $y(m+1)$ :

$$y(m+1) = ay(m) + \sum_{j=0}^m b(m-j)y(j),$$

observamos que a  $x(m+1)$  y  $y(m+1)$  les corresponde la misma expresión, de aquí que  $x(m+1) = y(m+1)$ .

### 3. El método de la transformada $\mathcal{Z}$ y ecuaciones en diferencias de Volterra

Lo que quiere decir que  $x(n) = y(n)$  para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ . ■

Una de las principales formas de analizar la estabilidad de (3.3.1) es mediante el método de la transformada  $\mathcal{Z}$ . Para esto, se reescribe (3.3.1) en la forma de convolución:

$$x(n+1) = ax(n) + b(n) * x(n). \quad (3.3.2)$$

Tomando la transformada  $\mathcal{Z}$  en ambos lados de la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} z\tilde{x}(z) - zx(0) &= a\tilde{x}(z) + \tilde{b}(z)\tilde{x}(z) \\ [z - a - \tilde{b}(z)]\tilde{x}(z) &= zx(0) \\ \tilde{x}(z) &= \frac{zx(0)}{z - a - \tilde{b}(z)} \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Pongamos:

$$g(z) = z - a - \tilde{b}(z), \quad \text{para cada } z \in \mathbb{C}. \quad (3.3.4)$$

Esta función compleja  $g$  desempeña un papel fundamental en el análisis de estabilidad de (3.3.1). Previo a continuar con dicho análisis, proporcionamos algunas definiciones necesarias.

Consideremos el conjunto de funciones  $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_+) = \{x|x : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{C}\}$ . Notemos que  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{Z}_+)$ .

**Definición 3.3.3.** En  $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_+)$  se definen las normas siguientes:

- (a) Considerando la norma  $\|x\|_1 = \sum_{i=0}^{\infty} |x(i)|$ ,  $l_1 = \{x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) : \|x\|_1 < \infty\}$  es el espacio normado  $(\mathcal{C}(\mathbb{Z}_+), \|\cdot\|_1)$ .
- (b) Considerando la norma Euclidiana  $\|x\|_2 = [\sum_{i=0}^n |x(i)|^2]^{\frac{1}{2}}$ ,  $l_2 = \{x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) : \|x\|_1 < \infty\}$  es el espacio normado  $(\mathcal{C}(\mathbb{Z}_+), \|\cdot\|_2)$ .
- (c) Considerando la norma infinito  $\|x\|_{\infty} = \sup\{|x(i)| : i \geq 0\}$ ,  $l_{\infty} = \{x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) : \|x\|_{\infty} < \infty\}$  es el espacio normado  $(\mathcal{C}(\mathbb{Z}_+), \|\cdot\|_{\infty})$ .

**Proposición 3.3.4.** Se tiene que  $l_1 \subset l_2 \subset l_{\infty}$ .

*Demostración.* Sea  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ .

- $l_1 \subset l_2$ . Supongamos que  $x \in l_1$ . Esto significa que  $\|x\|_1 = \sum_{i=0}^{\infty} |x(i)| < \infty$ . Lo que quiere decir que  $\lim_{i \rightarrow \infty} |x(i)| = 0$ . Por definición, se sigue que para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para cada  $i \geq N$ , se tiene que  $|x(i)| < \epsilon$ . Pongamos  $\epsilon = 1$ . De aquí, existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tal que para cada  $i \geq N_1$ ,  $|x(i)| < 1$ . Como  $|x(i)| < 1$ , se sigue que  $|x(i)|^2 < |x(i)|$ . Luego, por el Criterio de Comparación  $\|x\|_2 = (\sum_{i=0}^{\infty} |x(i)|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty$ . Así,  $x \in l_2$ . De aquí,  $l_1 \subset l_2$ .

- $l_2 \subset l_\infty$ . Supongamos que  $x \in l_2$ . Esto implica que  $\|x\|_2 = (\sum_{i=0}^{\infty} |x(i)|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty$ . Para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ , se tiene que  $|x(n)| \leq \sqrt{\sum_{i=0}^n |x(i)|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} |x(i)|^2} = \|x\|_2$ . Lo que quiere decir que  $\sup\{|x(i)| : i \geq 0\} \leq \|x\|_2$ . En consecuencia,  $\|x\|_\infty$  es finita y por ende  $x \in l_\infty$ . Así,  $l_2 \subset l_\infty$ . ■

**Definición 3.3.5.** Sea  $g \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_+)$ . Se dice que  $g$  es *analítica* en una región del plano complejo si  $g$  es derivable en dicha región.

**Teorema 3.3.6.** Si  $x \in l_1$ , entonces:

- (a)  $\tilde{x}$  es una función analítica en  $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$ .
- (b)  $|\tilde{x}(z)| \geq \|x\|_1$  en  $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$ .

*Demostración.* (a) Supongamos que  $x \in l_1$ . De aquí,  $\|x\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)| < \infty$ . Por otra parte, el radio de convergencia de  $\tilde{x}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$  es  $R = 1$ . Esto significa que la serie converge absolutamente en  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ . Lo que quiere decir que  $\tilde{x}(z)$  puede ser derivada término a término en dicha región. En consecuencia,  $\tilde{x}(z)$  es analítica en  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ . Para  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ , dado que  $x \in l_1$ , la convergencia sigue siendo válida. Esto implica que la función  $\tilde{x}(z)$  es analítica también en la frontera  $|z| = 1$ .

Por lo tanto,  $\tilde{x}(z)$  es analítica en la región  $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$ .

- (b) Supongamos que  $x \in l_1$ .

Si  $|z| = 1$ , entonces  $z^{-n}$  es un número complejo en la circunferencia unitaria, por lo que  $|z^{-n}| = 1$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ . De aquí:

$$|\tilde{x}(z)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \right| \geq \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)||z^{-n}| = \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)| = \|x\|_1.$$

Como  $x \in l_1$ , la desigualdad se mantiene para cada  $z \in \mathbb{C}$  con  $|z| > 1$ .

Por lo tanto,  $|\tilde{x}(z)| \geq \|x\|_1$ , para cada  $z \in \mathbb{C}$  con  $|z| \geq 1$ .

De los incisos (a) y (b) se sigue el resultado. ■

Ahora nos enfocamos en la función  $g(z) = z - a - \tilde{b}(z)$  de la ecuación (3.3.4). Es fundamental mencionar que esta función desempeña el papel del polinomio característico de las ecuaciones en diferencias lineales [19]. En contraste con los polinomios característicos, la función  $g(z)$  puede tener infinitos ceros en el plano complejo. El lema que se expone a continuación indica el lugar donde deben estar los ceros de  $g(z)$ .

**Lema 3.3.7.** Consideremos la ecuación (3.3.4). Se tiene que:

- (a) Todos los ceros de  $g$  están en la región dada por  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < c\}$ , para alguna  $c \in \mathbb{R}^+$ .

### 3. El método de la transformada $\mathcal{Z}$ y ecuaciones en diferencias de Volterra

---

(b) La función  $g$  tiene un número finito de ceros  $z$  en  $\{z \in \mathbb{C}: |z| \geq 1\}$ .

*Demostración.* (a) La prueba se hace por contradicción. Supongamos que existe un cero de  $g$  tal que no está en la región  $\{z \in \mathbb{C}: |z| < c\}$ , para cada  $c \in \mathbb{R}^+$ . Se sigue que existe una sucesión  $\{z_i\}$  de ceros de  $g$  tal que  $\lim_{i \rightarrow \infty} |z_i| = \infty$ . Luego:

$$|z_i - a| = |\tilde{b}(z_i)| = \sum_{n=0}^{\infty} |b(n)z_i^{-n}| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |b(n)||z_i|^{-n}.$$

Notemos que  $\lim_{i \rightarrow \infty} |\tilde{b}(z_i)| = b(0)$ , mientras que  $\lim_{i \rightarrow \infty} |z_i - a| = \infty$ , contradicción.

Por lo tanto, todos los ceros de  $g$  están en la región  $\{z \in \mathbb{C}: |z| < c\}$ , para alguna  $c \in \mathbb{R}^+$ .

(b) Notemos que por el inciso (a) de este lema, todos los ceros  $z$  de  $g$  con  $|z| \geq 1$  se encuentran en el anillo  $\{z \in \mathbb{C}: 1 \leq |z| \leq c\}$  para algún  $c \in \mathbb{R}^+$ . Por el Teorema 3.3.6-(a) podemos concluir que  $g$  es analítica en  $\{z \in \mathbb{C}: 1 \leq |z| \leq c\}$ . Luego, una función analítica en una región acotada solo puede tener un número finito de ceros [11]. Por lo tanto,  $g$  tiene sólo un número finito de ceros en la región  $\{z \in \mathbb{C}: |z| \geq 1\}$ .

De los incisos (a) y (b) se sigue el resultado. ■

A continuación estudiamos un proceso que sirve para analizar el comportamiento cualitativo de las soluciones de (3.3.1). Para esto, utilizamos (3.3.3) y  $g^{-1}(z) = \frac{1}{g(z)}$ , para obtener la forma siguiente:

$$\tilde{x}(z) = x(0)z g^{-1}(z).$$

Sea  $\gamma$  un círculo que incluye todos los ceros de  $g(z)$ . Notemos que el Lema 3.3.7-(a) garantiza que el círculo  $\gamma$  exista. De la ecuación (3.2.6) obtenemos:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \tilde{x}(z) z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} x(0) z^n g^{-1}(z) dz, \quad (3.3.5)$$

y de la ecuación (3.2.7), se sigue que:

$$x(n) = \text{suma de los residuos de } x(0)z^n g^{-1}(z). \quad (3.3.6)$$

Esto sugiere que:

$$x(n) = \sum p_r(n) z_r^n, \quad (3.3.7)$$

tal que la suma se toma sobre todos los ceros de  $g(z)$ , donde  $z_r$  es una raíz múltiple de orden  $k$  y  $p_r(n)$  es un polinomio en  $n$  de grado menor que  $k - 1$ . Para mostrar la validez de la ecuación (3.3.7), sea  $z_r$  un cero de  $g(z)$  de orden  $k$ . Escribimos la siguiente expansión en serie de Laurent [7, Teorema 1.11]:

$$g^{-1}(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} g_n (z - z_r)^n \quad \text{para algunas constantes } g_n$$



$$\begin{aligned} z^n &= [z_r - (z_r - z)]^n \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} z_r^{n-i} (z - z_r)^i. \end{aligned}$$

El residuo de  $x(0)z^n g^{-1}(z)$  en  $z_r$  es  $x(0)$  multiplicado por el coeficiente de  $(z - z_r)^{-1}$  en  $g^{-1}(z)z^n$ . El coeficiente de  $(z - z_r)^{-1}$  en  $g^{-1}(z)z^n$  está dado por:

$$g_{-k} \binom{n}{k-1} z_r^{n-k+1} + g_{-(k+1)} \binom{n}{k-2} z_r^{n-k+2} + \cdots + g_{-1} \binom{n}{0} z_r^n.$$

De la ecuación (3.3.6) se deduce que  $x(n)$  puede estar dado por la ecuación (3.3.7).

**Teorema 3.3.8.** Sean  $x^*$  un punto de equilibrio de (3.3.1) con  $x^* = 0$ . El punto de equilibrio  $x^*$  es uniformemente estable si y sólo si se cumplen las dos condiciones siguientes:

- (a)  $g(z) \neq 0$  para cada  $z \in \mathbb{C}$  con  $|z| > 1$ .
- (b) Si  $z_r$  es un cero de  $g(z)$  con  $|z_r| = 1$ , entonces el residuo de  $z^n g^{-1}(z)$  en  $z = z_r$  es acotado conforme  $n \rightarrow \infty$ .

*Demostración.* Supongamos que  $x^* = 0$  es uniformemente estable. Veamos que se cumplen las condiciones (a) y (b). La prueba de ambas se realiza por contradicción.

Supongamos que la condición (a) no se cumple, es decir, existe  $z_0$  tal que  $|z_0| > 1$  y  $z_0 - a - \tilde{b}(z_0) = 0$ . Esto implica que  $z_0$  es un cero de  $g(z)$  con  $|z_0| > 1$ . Por la expresión de  $x(n)$  dada por la ecuación (3.3.7), si  $z_0$  es un cero de  $g(z)$  con  $|z_0| > 1$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_0^n = \infty$ , lo cual implicaría que  $x(n)$  no puede estar acotada, contradiciendo la estabilidad uniforme de  $x^* = 0$ .

Lo que quiere decir que debe cumplirse que  $z - a - \tilde{b}(z) \neq 0$  para cada  $z \in \mathbb{C}$  con  $|z| > 1$ .

Ahora, supongamos que la condición (b) no se cumple, es decir,  $z_r$  es un cero de  $g(z)$  con  $|z_r| = 1$  tal que el residuo de  $z^n g^{-1}(z)$  en  $z = z_r$  no está acotado conforme  $n \rightarrow \infty$ .

El residuo de  $z^n g^{-1}(z)$  en  $z = z_r$  está dado por la combinación lineal de términos de la forma  $z_r^n$ , ponderados por los coeficientes  $g_{-k}, g_{-(k+1)}, \dots, g_{-1}$ . Si estos términos no son acotados conforme  $n \rightarrow \infty$ , entonces  $x(n)$  incluirá un componente que crece o fluctúa indefinidamente, violando la condición de que para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  independiente de  $n_0$  tal que  $|x(n)| < \epsilon$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ .

De aquí que, para mantener la estabilidad uniforme, los residuos de  $z^n g^{-1}(z)$  en  $z = z_r$  deben estar acotados.

Por lo tanto, si  $x^* = 0$  es uniformemente estable, se cumplen las dos condiciones (a) y (b).

Recíprocamente, supongamos que se cumplen las condiciones de los incisos (a) y (b).

### 3. El método de la transformada $\mathcal{Z}$ y ecuaciones en diferencias de Volterra

---

Por la condición (a), se garantiza que no hay ceros de la función  $g(z)$  fuera del círculo unitario en el plano complejo, es decir, todos los ceros  $z_r$  de  $g(z)$  satisfacen  $|z_r| \leq 1$ .

Para los ceros  $z_r$  tales que  $|z_r| < 1$ , se cumple que  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_r^n = 0$ . Por la ecuación (3.3.7), la contribución de estos ceros a la solución  $x(n)$  disminuye a medida que  $n \rightarrow \infty$ , lo que implica que estas contribuciones están acotadas.

Por otro lado, si  $z_r$  es un cero de  $g(z)$  con  $|z_r| = 1$ , la condición (b) asegura que el residuo de  $x(0)z^n g^{-1}(z)$  en  $z = z_r$  permanece acotado conforme  $n \rightarrow \infty$ . Según la ecuación (3.3.6), se sigue que la contribución de estos ceros a la solución  $x(n)$  también está acotada.

Combinando ambas observaciones, podemos concluir que existe  $L > 0$  tal que:

$$|x(n)| \leq L|x(0)| \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Sea  $\epsilon > 0$ . Pongamos  $\delta = \frac{\epsilon}{L}$ . Supongamos que  $|x(0)| < \delta$ . Sea  $n \geq n_0$ . De aquí que  $|x(0)| < \frac{\epsilon}{L}$ . Luego,  $L|x(0)| < \epsilon$ . Como  $|x(n)| \leq L|x(0)|$ , se tiene que  $|x(n)| < \epsilon$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Notemos que  $\delta$  no depende de  $n_0$ . Por lo tanto,  $x^*$  es uniformemente estable. ■

**Teorema 3.3.9.** Sea  $x^*$  un punto de equilibrio de (3.3.1) con  $x^* = 0$ . El punto de equilibrio  $x^*$  es asintóticamente uniformemente estable si y sólo si  $z - a - \tilde{b}(z) \neq 0$ , para cada  $z \in \mathbb{C}$  con  $|z| \geq 1$ .

*Demostración.* Supongamos que  $x^* = 0$  es asintóticamente estable uniforme. Veamos que  $z - a - \tilde{b}(z) \neq 0$  para cada  $z \in \mathbb{C}$  con  $|z| \geq 1$ . La prueba se realiza por contradicción. Supongamos que existe un cero  $z_r$  de  $g(z)$  con  $|z_r| \geq 1$ . Si  $|z_r| > 1$ , entonces  $z_r^n$  crecería exponencialmente, lo cual contradice que  $x^* = 0$  sea uniformemente asintóticamente estable. Por otra parte, si  $|z_r| = 1$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_r^n \neq x^*$ , por lo que  $x^* = 0$  no sería uniformemente atractor, nuevamente es una contradicción. Lo que quiere decir que se requiere que  $z - a - \tilde{b}(z) \neq 0$  para cada  $z \in \mathbb{C}$  con  $|z| \geq 1$ .

Recíprocamente, supongamos que  $z - a - \tilde{b}(z) \neq 0$  para cada  $z \in \mathbb{C}$  con  $|z| \geq 1$ . Veamos que  $x^* = 0$  es asintóticamente estable uniforme. Por la hipótesis, no hay ceros de  $g(z) = z - a - \tilde{b}(z)$  en el círculo unitario cerrado  $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$ . Esto implica que todos los ceros de  $g(z)$  deben estar estrictamente dentro del círculo unitario  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ . Ahora, de la representación de la solución dada por la ecuación (3.3.7), como  $|z_r| < 1$ , se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_r^n = 0$ . Esto garantiza que cada término de la suma converge a cero y dado que  $p_r(n)$  es un polinomio de grado finito, la convergencia es uniforme. De aquí que,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = x^*$ . Se sigue que  $x^* = 0$  es uniformemente asintóticamente estable. ■

### 3.4. Criterios explícitos para la estabilidad de las ecuaciones de Volterra

En ocasiones utilizar teoremas como los de la sección anterior no es sencillo, ya que hallar los ceros de  $g(z)$  puede llegar a ser complicado en la mayoría de los problemas. Por todo

esto, para realizar el análisis de estabilidad de las ecuaciones en diferencias de la forma (3.3.1) es fundamental proporcionar los criterios explícitos de estabilidad.

**Teorema 3.4.1.** Consideremos la ecuación (3.3.1). Sea  $x^*$  un punto de equilibrio de (3.3.1) tal que  $x^* = 0$ . Si  $b(n)$  no cambia de signo para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$  y

$$|a| + \left| \sum_{n=0}^{\infty} b(n) \right| < 1, \quad (3.4.1)$$

entonces  $x^*$  es asintóticamente estable.

*Demostración.* Supongamos que  $b(n)$  no cambia de signo para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$  y que se cumple la condición  $|a| + |\sum_{n=0}^{\infty} b(n)| < 1$ . Definimos  $\beta = \sum_{n=0}^{\infty} b(n)$  y  $d(n) = \beta^{-1}b(n)$  para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Como  $b(n)$  no cambia de signo, se sigue que  $d(n)$  no cambia de signo. Además:

$$\sum_{n=0}^{\infty} d(n) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} b(n) = 1.$$

Es más,  $\tilde{d}(1) = 1$  y  $|\tilde{d}(z)| \leq 1$  para cada  $z \in \mathbb{C}$  con  $|z| \geq 1$ , donde  $\tilde{d}(z)$  es la transformada  $\mathcal{Z}$  de  $d(n)$ . Podemos reescribir  $g(z)$  de la forma siguiente:

$$g(z) = z - a - \beta\tilde{d}(z). \quad (3.4.2)$$

Veamos que la solución  $x^* = 0$  es asintóticamente estable. Para esto, basta demostrar que  $g(z)$  no tiene ceros con  $|z| \geq 1$ . Supongamos, por contradicción, que existe un cero  $z_r$  de  $g(z)$  con  $|z_r| \geq 1$ . Por (3.4.2), se sigue que  $|z_r - a - \beta\tilde{d}(z)| = 0$ , lo que implica que  $|z_r - a| = |\beta\tilde{d}(z)| \leq \beta$ . Utilizando la condición (3.4.1) se sigue que  $|z_r| \leq |a| + |\beta| < 1$ , lo cual contradice el supuesto de que  $|z_r| \geq 1$ . Por lo tanto el punto de equilibrio  $x^* = 0$  es asintóticamente estable. ■

Notemos que el recíproco del teorema anterior no siempre es válido. Sin embargo, en el siguiente resultado se proporcionan condiciones para saber cuándo la solución cero de (3.3.1) no es asintóticamente estable.

**Teorema 3.4.2.** Consideremos la ecuación de Volterra (3.3.1). Sea  $x^*$  un punto de equilibrio de (3.3.1) tal que  $x^* = 0$ . Si  $b(n)$  no cambia de signo para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ , entonces  $x^*$  no es asintóticamente estable si alguna de las siguientes afirmaciones es verdadera:

- (a)  $a + \sum_{n=0}^{\infty} b(n) \geq 1$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ .
- (b) Existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $a + \sum_{n=0}^{\infty} b(n) \leq -1$  y  $b(n) > 0$ .
- (c) Existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $a + \sum_{n=0}^{\infty} b(n) < -1$  y  $b(n) < 0$ , con  $\sum_{n=0}^{\infty} b(n)$  suficientemente pequeño.

*Demostración.* Sean  $\beta = \sum_{n=0}^{\infty} b(n)$  y  $d(n) = \beta^{-1}b(n)$ , definidas de la misma forma que en el Teorema 3.4.1.

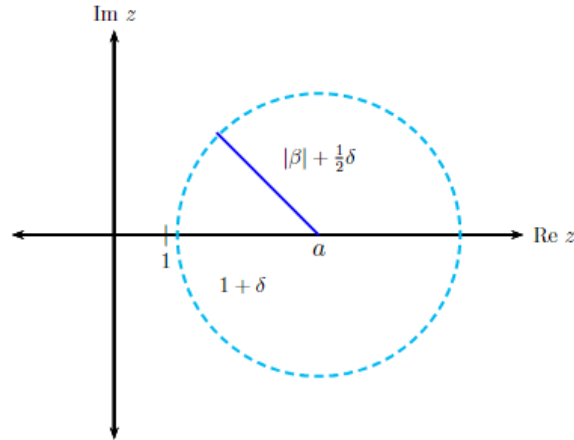


Figura 3.4: Círculo con centro en  $a$  y radio  $|\beta| + \frac{\delta}{2}$ .

(a) Supongamos que se cumple la condición del inciso (a). Si  $a + \beta = 1$ , entonces  $z = 1$  es una raíz de  $g(z)$  definida en (3.4.2). De aquí que, por el Teorema 3.3.9, la solución cero de (3.3.1) no es asintóticamente estable. Por otro lado, si  $a + \beta > 1$ , se sigue que existe  $\delta > 0$  tal que  $a + \beta = 1 + \delta$ . Luego, hay dos áreas a considerar, por lo que se tienen los siguientes casos:

- Caso 1:  $\beta < 0$ . Sea  $\gamma$  el círculo en el plano complejo con centro en  $a$  y radio  $|\beta| + \frac{1}{2}\delta$ . Se tiene que en  $\gamma$  (Figura 3.4),  $|z| > 1$  y por lo tanto:

$$|\beta \tilde{d}(z)| \leq |\beta| < |z - a|. \quad (3.4.3)$$

Sean  $h(z) = -\beta \tilde{d}$  y  $f(z) = z - a$ . De la desigualdad (3.4.3), se sigue que  $|h(z)| < |f(z)|$  en  $\gamma$ . Por lo tanto, según el Teorema de Rouché's [11, Teorema 5.13],  $g(z) = f(z) + h(z)$  y  $f(z)$  tienen el mismo número de ceros dentro de  $\gamma$ . Dado que  $a$  es el único cero de  $f(z)$  dentro de  $\gamma$ , entonces  $g(z)$  tiene exactamente un cero  $z_0$  dentro de  $\gamma$  con  $|z_0| > 1$ . Utilizando el Teorema 3.3.9, la solución cero de (3.3.1) no es asintóticamente estable.

- Caso 2:  $\beta > 0$ . Como  $a + \beta > 1$ , se sigue que  $g(z) = 1 - a - \beta < 0$ . Además,  $|\tilde{d}(a + \beta)| \leq 1$ . De aquí que,  $g(a + \beta) = \beta[1 - \tilde{d}(a + \beta)] \geq 0$ . Por lo tanto,  $g(z)$  tiene un cero entre 1 y  $a + \beta$  y en consecuencia, por el Teorema 3.3.9, la solución cero de (3.3.1) no es asintóticamente estable. Esto completa la prueba de la condición (a).

(b) Supongamos que existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $a + \beta \leq -1$  y  $b(n) > 0$ . Como  $b(n)$  no cambia de signo y  $b(n) > 0$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ , tenemos que  $\beta \geq 0$ . Recordemos que  $g(z) = z - a - \beta \tilde{d}(z)$ . De aquí que  $g(-1) = -1 - a - \beta \tilde{d}(-1)$ . Dado que  $|\tilde{d}(-1)| \leq 1$ , se cumple que  $-\beta \tilde{d}(-1) \geq -\beta$ . En consecuencia,  $g(-1) \geq -1 - a - \beta$ . Sabiendo que  $a + \beta \leq -1$ , se sigue que  $-1 - a - \beta \geq 0$ , por lo tanto  $g(-1) \geq 0$ . Esto implica que  $g(z)$  tiene un cero en  $|z| \geq 1$ , lo cual contradice la condición para la estabilidad asintótica del punto

de equilibrio  $x^* = 0$ . Así, si  $a + \beta \leq -1$  y  $b(n) > 0$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $x^*$  no es asintóticamente estable.

(c) Con un proceso similar se puede obtener el inciso (b).

De los incisos (a), (b) y (c) se sigue el resultado. ■

En el próximo resultado, se aborda la estabilidad uniforme. Sin embargo, es necesario utilizar funcionales de Liapunov, por ello, veamos la siguiente:

**Definición 3.4.3.** Sea  $V : \mathcal{C}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Se dice que  $V$  es un *funcional de Liapunov*, si para cada  $x \in \mathcal{C}(\mathbb{C})$  se cumple que:

(a)  $V$  es definida positiva.

(b)  $\Delta V(x) \leq 0$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ .

**Teorema 3.4.4.** Sea  $x^*$  un punto de equilibrio de (3.3.1) tal que  $x^* = 0$ . Si

$$|a| + \sum_{j=0}^n |b(j)| \leq 1, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \quad (3.4.4)$$

entonces  $x^*$  es uniformemente estable.

*Demostración.* Supongamos que  $|a| + \sum_{j=0}^n |b(j)| \leq 1$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Sean  $x \in \mathcal{C}(\mathbb{C})$  y  $V : \mathcal{C}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$  un funcional de Liapunov tal que:

$$V(x) = |x(n)| + \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=n}^{\infty} |b(s-r)||x(r)|. \quad (3.4.5)$$

De aquí que:

$$\begin{aligned} \Delta V(x(n)) &= V(x(n+1)) - V(x(n)) \\ &= |x(n+1)| + \sum_{r=0}^n \sum_{s=n}^{\infty} |b(s-r)||x(r)| - |x(n)| - \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=n}^{\infty} |b(s-r)||x(r)| \\ &= \left| ax(n) + \sum_{j=0}^n b(n-j)x(j) \right| + \sum_{r=0}^n \sum_{s=n}^{\infty} |b(s-r)||x(r)| - |x(n)| \\ &\quad - \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=n}^{\infty} |b(s-r)||x(r)| \\ &= \left| ax(n) + \sum_{j=0}^n b(n-j)x(j) \right| + \sum_{s=n}^{\infty} |b(s-n)||x(n)| - |x(n)| \\ &\leq \left( |a| + \sum_{j=0}^{\infty} |b(j)| - 1 \right) |x(n)|. \end{aligned}$$

### 3. El método de la transformada $\mathcal{Z}$ y ecuaciones en diferencias de Volterra

Por hipótesis (3.4.4), se sigue que  $|a| + \sum_{j=0}^n |b(j)| - 1 \leq 0$ . Lo que quiere decir que:

$$\Delta V(x) \leq 0. \quad (3.4.6)$$

Adicionalmente, por (3.4.5), obtenemos  $|x(n)| \leq V(x)$ . Luego, de (3.4.5) y (3.4.6), se tiene que  $|x(n)| \leq V(x) \leq |x(0)|$ .

Sea  $\epsilon > 0$ . Pongamos  $\delta = \epsilon$ . Supongamos que  $|x(0)| < \delta$ . Sea  $n \geq n_0$ . Se sigue que  $|x(0)| < \epsilon$ . Como  $|x(n)| \leq |x(0)| < \epsilon$ , se tiene que  $|x(n)| < \epsilon$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Por lo tanto,  $x^* = 0$  es uniformemente estable. ■

### 3.5. Sistemas de Volterra

Sea  $x \in \mathcal{S}_k(\mathbb{Z}_+)$ . Consideremos el siguiente sistema de Volterra de tipo convolución:

$$x(n+1) = Ax(n) + \sum_{j=0}^n B(n-j)x(j), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \quad (3.5.1)$$

donde  $A \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{R})$  y  $B \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathcal{S}(\mathbb{Z}_+))$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $B \in l_1$ , es decir  $\sum_{j=0}^{\infty} B(j) < \infty$ .

Sea  $B \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathcal{S}(\mathbb{Z}_+))$ . Digamos que  $B = (b_{ij})$ , donde  $b_{ij} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ , para cada  $i, j \in \{1, \dots, k\}$ . Luego, definimos la matriz  $\tilde{B} \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathcal{S}(\mathbb{Z}_+))$  como:

$$\tilde{B} = (\tilde{b}_{ij}) = \mathcal{Z}(b_{ij}).$$

**Observación 3.5.1.** Se tiene lo siguiente:

(a) La transformada  $\mathcal{Z} : \mathcal{S}_k(\mathbb{Z}_+) \rightarrow \mathcal{S}_k(\mathbb{Z}_+)$  está dada por:

$$\mathcal{Z}[x] = (\mathcal{Z}(x_1), \mathcal{Z}(x_2), \dots, \mathcal{Z}(x_k))^T, \quad \text{para cada } x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+),$$

donde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$  y  $x_i \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ , para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ .

Así,  $\mathcal{Z}[x(n)] = (\mathcal{Z}(x_1(n)), \mathcal{Z}(x_2(n)), \dots, \mathcal{Z}(x_k(n)))^T$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ .

(b) La transformada  $\mathcal{Z} : \mathcal{M}_{k \times k}(\mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)) \rightarrow \mathcal{M}_{k \times k}(\mathcal{S}(\mathbb{Z}_+))$  está dada por:

$$\mathcal{Z}[B] = \tilde{B}, \quad \text{para cada } B \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)),$$

donde  $B = (b_{ij})$ , para cada  $i, j \in \{1, \dots, k\}$ .

Así,  $\mathcal{Z}[B(n)] = \tilde{B}(n) = (\mathcal{Z}(b_{ij}(n)))$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ .

Tomando la transformada  $\mathcal{Z}$  de ambos lados de la ecuación (3.5.1), se sigue que:

$$\begin{aligned} z\tilde{x}(z) - zx(0) &= A\tilde{x}(z) + \tilde{B}(z)\tilde{x}(z), \quad |z| > R \\ \tilde{x}(z) &= [zI - A - \tilde{B}(z)]^{-1}zx(0), \quad |z| > R. \end{aligned}$$

El Teorema 3.3.9 para el caso escalar de ecuaciones en diferencias de Volterra con  $k = 1$ , tiene su contraparte para los sistemas.

**Teorema 3.5.2.** Sea  $x^*$  un punto de equilibrio de (3.5.1) tal que  $x^* = 0$ . Se tiene que  $x^*$  es asintóticamente uniformemente estable si y sólo si:

$$\det(zI - A - \tilde{B}(z)) \neq 0, \quad \text{para cada } z \in \mathbb{C} \quad \text{con } |z| \geq 1. \quad (3.5.2)$$

*Demostración.* Supongamos que  $x^* = 0$  es asintóticamente uniformemente estable. Veamos que  $\det(zI - A - \tilde{B}(z)) \neq 0$  para cada  $z \in \mathbb{C}$  con  $|z| \geq 1$ . Sea  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ . Se sigue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = 0$ . Por contradicción, supongamos que  $\det(zI - A - \tilde{B}(z)) = 0$  para algún  $z$  con  $|z| \geq 1$ , esto implicaría la existencia una solución no trivial para  $\tilde{x}(z)$  que no tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ . Esto contradice la estabilidad asintótica uniforme.

Supongamos que  $\det(zI - A - \tilde{B}(z)) \neq 0$  para cada  $z \in \mathbb{C}$  con  $|z| \geq 1$ . Esto significa que la matriz  $zI - A - \tilde{B}(z)$  es invertible en esa región del plano complejo. Luego, podemos escribir la solución en el dominio  $z$  como  $\tilde{x}(z) = [zI - A - \tilde{B}(z)]^{-1}zx(0)$ . Se sigue que la magnitud de las entradas de la matriz resolvente  $[zI - A - \tilde{B}(z)]^{-1}$  está acotada y decayendo para  $n \rightarrow \infty$ . De aquí,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = 0$  uniformemente. Lo que quiere decir que  $x^* = 0$  es uniformemente asintóticamente estable. ■

**Lema 3.5.3.** [5] Sea  $G \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{R})$ . Digamos que  $G = (g_{ij})$ , donde  $g_{ij} \in \mathbb{R}$ , para cada  $i, j \in \{1, \dots, k\}$ . Si  $z_0$  es un valor propio de  $G$ , entonces se cumplen las dos condiciones siguientes:

- (a)  $|z_0 - g_{ii}||z_0 - g_{jj}| \leq \sum_r' |g_{ir}| \sum_r' |g_{jr}|$ , para algunos  $i, j$  con  $i \neq j$ .
- (b)  $|z_0 - g_{tt}||z_0 - g_{ss}| \leq \sum_r' |g_{rt}| \sum_r' |g_{rs}|$ , para algunos  $t, s$  con  $t \neq s$ ,

donde  $\sum_r' |g_{ir}|$  significa que  $(\sum_{r=1}^k g_{ir}) - g_{ii}$ .

Definimos  $\beta_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} |b_{ij}(n)|$ , con  $1 \leq i, j \leq k$ .

**Teorema 3.5.4.** Sean  $x^*$  un punto de equilibrio de (3.5.1) con  $x^* = 0$ . Se sigue que  $x^*$  es uniformemente asintóticamente estable si alguna de las siguientes condiciones es cierta:

- (a)  $\sum_{j=0}^k (|a_{ij}| + \beta_{ij}) < 1$ , para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ .
- (b)  $\sum_{i=0}^k (|a_{ij}| + \beta_{ij}) < 1$ , para cada  $j \in \{1, \dots, k\}$ .

*Demostración.* (a) Por el Teorema 3.5.2, para probar que el punto es uniformemente asintóticamente estable bajo la condición del inciso (a), basta probar que se cumple (3.5.2). La demostración se realiza por contradicción. Supongamos que  $\sum_{j=0}^k (|a_{ij}| + \beta_{ij}) < 1$  y existe  $z_0 \in \mathbb{C}$  con  $|z_0| \geq 1$  tal que  $\det(z_0I - A - \tilde{B}(z_0)) = 0$ . De aquí que  $z_0$  es un valor propio de la matriz  $A + \tilde{B}(z_0)$ . Por el Lema 3.5.3-(a), se tiene que:

$$|z_0 - a_{ii} - \tilde{b}_{ii}(z_0)||z_0 - a_{jj} - \tilde{b}_{jj}(z_0)| \leq \sum_r' |a_{ir} + \tilde{b}_{ir}(z_0)| \sum_r' |a_{jr} + \tilde{b}_{jr}(z_0)|, \quad (3.5.3)$$

### 3. El método de la transformada $\mathcal{Z}$ y ecuaciones en diferencias de Volterra

para algunos  $i, j$  con  $i \neq j$ .

Sin embargo:

$$\begin{aligned} |z_0 - a_{ii} - \tilde{b}_{ii}(z_0)| &\geq |z_0| + |a_{ii}| - |\tilde{b}_{ii}(z_0)| \\ &\geq 1 - |a_{ii}| - |\tilde{b}_{ii}(z_0)| \\ &> \sum_r^l (|a_{ir}| + |\beta_{ir}|), \quad \text{por la condición (a).} \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

De forma similar, obtenemos:

$$|z_0 - a_{jj} - \tilde{b}_{jj}(z_0)| > \sum_r^l (|a_{jr}| + |\beta_{jr}|). \quad (3.5.5)$$

De (3.5.4) y (3.5.5), se sigue que:

$$|z_0 - a_{ii} - \tilde{b}_{ii}(z_0)| |z_0 - a_{jj} - \tilde{b}_{jj}(z_0)| > \sum_r^l (|a_{ir}| + |\beta_{ir}|) \sum_r^l (|a_{jr}| + |\beta_{jr}|). \quad (3.5.6)$$

Por otra parte, para cada  $1 \leq s, m \leq k$ , se tiene que:

$$|a_{st}| + \beta_{st} \geq |a_{st}| + |\tilde{b}_{st}(z_0)| \geq |a_{st} + \tilde{b}_{st}(z_0)|,$$

en consecuencia, por (3.5.6):

$$|z_0 - a_{ii} - \tilde{b}_{ii}(z_0)| |z_0 - a_{jj} - \tilde{b}_{jj}(z_0)| > \sum_r^l |a_{ir} + \tilde{b}_{ir}(z_0)| \sum_r^l |a_{jr} + \tilde{b}_{jr}(z_0)|.$$

Notemos que esto contradice la desigualdad (3.5.3). Lo que quiere decir que  $\det(zI - A - \tilde{B}(z)) \neq 0$ . Así,  $x^* = 0$  es uniformemente asintóticamente estable.

(b) La prueba del inciso (b) es similar a la del inciso (a).

De los incisos (a) y (b) se sigue la prueba. ■

De forma similar al caso de las ecuaciones en diferencias de Volterra de tipo escalar, el método anterior puede ampliarse para proporcionar criterios de estabilidad uniforme, en el que nuevamente se utilizan funcionales de Liapunov.

**Teorema 3.5.5.** Sea  $x^*$  un punto de equilibrio de (3.5.1). Si

$$\sum_{i=1}^k |a_{ij} + \beta_{ij}| \leq 1, \quad \text{para cada } j \in \{1, 2, \dots, k\}, \quad (3.5.7)$$

entonces  $x^* = 0$  es uniformemente estable.



*Demostración.* Supongamos que  $\sum_{i=1}^k |a_{ij} + \beta_{ij}| \leq 1$ , para cada  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Sea  $V : \mathcal{C}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$  un funcional de Liapunov, tal que:

$$V(x) = \sum_{i=1}^k \left[ |x_i(n)| + \sum_{j=1}^k \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=n}^{\infty} |b_{ij}(s-r)| |x_j(r)| \right].$$

Se sigue que:

$$\begin{aligned} \Delta V(x(n)) &= V(x(n+1)) - V(x(n)) \\ &= \sum_{i=1}^k \left[ |x_i(n+1)| + \sum_{j=1}^k \sum_{r=0}^n \sum_{s=n}^{\infty} |b_{ij}(s-r)| |x_j(r)| \right] \\ &\quad - \sum_{i=1}^k \left[ |x_i(n)| + \sum_{j=1}^k \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=n}^{\infty} |b_{ij}(s-r)| |x_j(r)| \right] \\ &= \sum_{i=1}^k \left[ \left| a_{ij} x_i(n) + \sum_{j=0}^n b_{ij}(n-j) x_i(j) \right| + \sum_{j=1}^k \sum_{r=0}^n \sum_{s=n}^{\infty} |b_{ij}(s-r)| |x_j(r)| \right] \\ &\quad - \sum_{i=1}^k \left[ |x_i(n)| + \sum_{j=1}^k \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=n}^{\infty} |b_{ij}(s-r)| |x_j(r)| \right] \\ &= \sum_{i=1}^k \left[ \left| a_{ij} x_i(n) + \sum_{j=0}^n b_{ij}(n-j) x_i(j) \right| + \sum_{j=1}^k \sum_{r=0}^n \sum_{s=n}^{\infty} |b_{ij}(s-r)| |x_j(r)| \right. \\ &\quad \left. - |x_i(n)| - \sum_{j=1}^k \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=n}^{\infty} |b_{ij}(s-r)| |x_j(r)| \right] \\ &= \sum_{i=1}^k \left[ \left| a_{ij} x_i(n) + \sum_{j=0}^n b_{ij}(n-j) x_i(j) \right| \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^k \sum_{s=n}^{\infty} |b_{ij}(s-n)| |x_j(n)| - |x_i(n)| \right] \\ &\leq \sum_{i=1}^k \left[ |a_{ij}| |x_i(n)| + \sum_{j=0}^n |b_{ij}(n-j)| |x_i(j)| \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^k \sum_{s=n}^{\infty} |b_{ij}(s-n)| |x_j(n)| - |x_i(n)| \right] \\ &\leq \sum_{i=1}^k \left[ \sum_{j=1}^k |a_{ij}| |x_j(n)| - |x_i(n)| + \sum_{j=1}^k \sum_{s=n}^{\infty} |b_{ij}(s-n)| |x_j(n)| \right]. \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

Notemos que:

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k |a_{ij}| |x_j(n)| = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k |a_{ij}| |x_i(n)|.$$

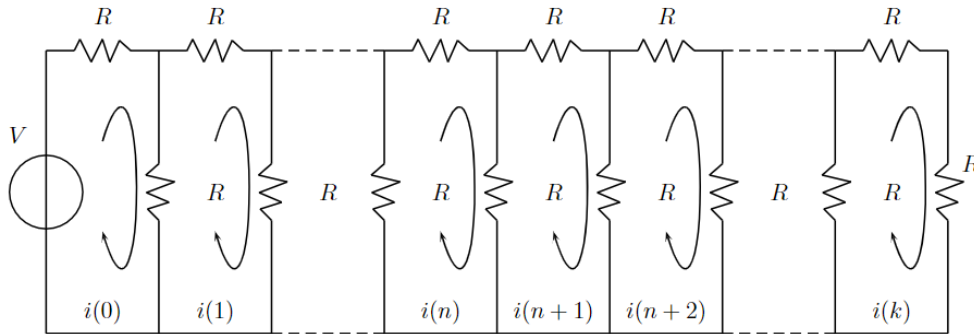


Figura 3.5: Red de escalera.

Adicionalmente,

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \sum_{s=n}^{\infty} |b_{ij}(s-n)| |x_j(n)| = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \sum_{s=n}^{\infty} |b_{ij}(s-n)| |x_i(n)|.$$

En consecuencia, de (3.5.8), se sigue que:

$$\begin{aligned} \Delta V(x) &\leq \sum_{i=1}^k \left[ \sum_{j=1}^k |a_{ji}| + \beta_{ji} - 1 \right] |x_i(n)| \\ &\leq 0, \quad \text{por la condición (3.5.7).} \end{aligned}$$

Esto implica que:

$$\|x(n)\| = \sum_{i=1}^k |x_i(n)| \leq V(x) \leq \sum_{i=1}^k |x_i(0)| = \|x(0)\|.$$

Sea  $\epsilon > 0$ . Pongamos  $\delta = \epsilon$ . Supongamos que  $\|x(0)\| < \delta$ . Sea  $n \geq n_0$ . Se sigue que  $\|x(0)\| < \epsilon$ . Como  $\|x(n)\| \leq \|x(0)\| < \epsilon$ , se tiene que  $\|x(n)\| < \epsilon$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Por lo tanto,  $x^* = 0$  es uniformemente estable. ■

## 3.6. Aplicaciones

### 3.6.1. Circuitos eléctricos o una red de escalera

Consideremos la red eléctrica que se muestra en la Figura 3.5. Sean  $i \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  tal que  $i(n)$  es la corriente en el  $n$ -ésimo bucle,  $R$  es la resistencia que se supone constante en cada circuito y  $V$  es el voltaje. Según la ley de Ohm, el voltaje (o potencial eléctrico) entre los extremos de una resistencia  $R$  se puede expresar como  $V = iR$ .

La segunda ley de Kirchhoff establece que en un circuito cerrado el voltaje aplicado es igual a la suma de las caídas de voltaje en el resto del circuito. En este caso, consideramos un circuito que involucra las corrientes en los elementos vecinos  $i(n), i(n+1), i(n+2)$ . Luego, al escribir las caídas de voltaje alrededor del circuito cerrado obtenemos:

$$R[i(n+1) - i(n+2)], R[i(n+1) - i(n)] \text{ y } [i(n+1)].$$

Por lo que aplicando la ley de Kirchhoff al bucle correspondiente a  $i(n+1)$ :

$$i(n+2) - 3i(n+1) + i(n) = 0. \quad (3.6.1)$$

Para el primer circuito de la izquierda, se tiene que:

$$\begin{aligned} V &= Ri(0) + R(i(0) - i(1)) \\ i(1) &= 2i(0) - \frac{V}{R}. \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

Utilizando la transformada  $\mathcal{Z}$  en la ecuación (3.6.1) con los datos de (3.6.2), se sigue que:

$$\tilde{i}(z) = \frac{z[zi(0) - 3i(0) + i(1)]}{z^2 - 3z + 1} = \left[ \frac{z^2 - \left(1 + \frac{V}{Ri(0)}\right)z}{z^2 - 3z + 1} \right] i(0). \quad (3.6.3)$$

Sea  $\omega > 0$  tal que  $\cosh(\omega) = \frac{3}{2}$ . De aquí,  $\sinh(\omega) = \frac{\sqrt{5}}{2}$ . Lo que quiere decir que la ecuación (3.6.3) queda de la forma siguiente:

$$\tilde{i}(z) = i(0) \left[ \frac{z^2 - z \cosh(\omega)}{z^2 - 2z \cosh(\omega) + 1} \right] + \left( \frac{i(0)}{2} + \frac{V}{R} \right) \left( \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \left[ \frac{z \sinh(\omega)}{z^2 - 2z \cosh(\omega) + 1} \right].$$

Tomando la inversa de la transformada  $\mathcal{Z}$  en ambos lados de la ecuación anterior y utilizando la Tabla 3.2.1, obtenemos:

$$i(n) = i(0) \cosh(n\omega) + \left( \frac{i(0)}{2} + \frac{V}{R} \right) \left( \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \sinh(n\omega), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \quad (3.6.4)$$

La ecuación (3.6.4) describe cómo varía la corriente  $i(n)$  en función del tiempo  $n$ , mostrando que la corriente exhibe un comportamiento oscilatorio que se puede describir mediante las funciones hiperbólicas  $\cosh$  y  $\sinh$ .

### 3.6.2. Desintegración radiactiva

La cantidad de un elemento radiactivo de masa  $m_0$  se reduce a la mitad después de cada vida promedio (específica de ese elemento) que transcurre, produciendo otros elementos de masa  $\frac{m_0}{2}$ . Por ejemplo, el isótopo radiactivo cobalto-60 tiene una vida promedio de 5.26 años. Luego, en 5.26 años, 2 kg de cobalto-60 se descompondrán en 1 kg de cobalto-60 y

### 3. El método de la transformada $\mathcal{Z}$ y ecuaciones en diferencias de Volterra

---

1 kg de níquel-60 no radiactivo. Calculemos cuánto tiempo tardan 10 kg de cobalto-60 en transformarse en 9.375 kg de níquel-60 [17, pág. 543].

Sea  $m \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  tal que  $m(n)$  es la cantidad de sustancia radiactiva en el momento  $n$ . Se tiene que:

$$m(n+1) = \frac{1}{2}m(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{con } m(0) = m_0, \quad (3.6.5)$$

donde  $m_0$  es la masa inicial. Podemos interpretar  $n$  como la división entera de la forma  $n = \frac{\text{tiempo transcurrido}}{\text{vida promedio}}$ . Tomando la transformada  $\mathcal{Z}$  de ambos lados de la ecuación (3.6.5), se sigue que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} m(n+1)z^{-n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} m(n)z^{-n}.$$

Utilizando las propiedades de la transformada  $\mathcal{Z}$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} z\tilde{m}(z) - zm(0) &= \frac{1}{2}\tilde{m}(z) \\ \left(z - \frac{1}{2}\right)\tilde{m}(z) &= zm_0 \\ \tilde{m}(z) &= \frac{m_0}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}. \end{aligned}$$

Utilizando la inversa de la transformada  $\mathcal{Z}$ :

$$m(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n m_0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \quad (3.6.6)$$

Del problema se tiene que se inicia  $m_0 = 10$  kg de cobalto-60 y al final del periodo  $n$  que estamos buscando hay 9.375 kg de níquel-60. De aquí, la cantidad de cobalto-60 que queda es  $10 \text{ kg} - 9.375 \text{ kg} = 0.625 \text{ kg}$ . Sustituyendo estos valores en la ecuación (3.6.6), se tiene que:

$$\begin{aligned} 0.625 &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 10 \\ n &= \frac{\log(0.0625)}{\log(2)} \\ &= 4. \end{aligned}$$

Lo que quiere decir que  $4 \cdot 5.26$  años = 21 años 14 días 14 horas han transcurrido.

#### 3.6.3. Función de transferencia

La función de transferencia juega un papel importante en el análisis de sistemas lineales de tiempo discreto. En esta subsección, definimos la función de transferencia en tiempo

discreto y vemos cómo encontrar las respuestas de impulso y escalón del sistema. Adicionalmente, se menciona cómo utilizar la función de transferencia para determinar las características de rendimiento del sistema, como la estabilidad y la respuesta de frecuencia [24, pág. 363].

La salida  $y(n)$  de un sistema lineal e invariante en el tiempo puede ser descrita por la convolución de la entrada  $x(n)$  con la respuesta al impulso del sistema  $h(n)$ :

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)h(n-k).$$

Aplicando la transformada  $\mathcal{Z}$  en ambos lados de la ecuación anterior:

$$\mathcal{Z}[y(n)] = \mathcal{Z}[x(n) * h(n)] = \tilde{x}(z)\tilde{h}(z).$$

De aquí que la función de transferencia  $\tilde{h}(z)$  es de la forma siguiente:

$$\tilde{h}(z) = \frac{\tilde{y}(z)}{\tilde{x}(z)}.$$

Esto implica que la función de transferencia es la relación de las transformadas  $\mathcal{Z}$  entre la entrada y la salida. La función de transferencia se puede obtener transformando la ecuación en diferencias o transformando la representación del sistema.

Si la entrada del sistema es un impulso unitario  $\delta(n)$ , la salida del sistema estará directamente dada por la respuesta al impulso del sistema. Esto significa que:

$$y(n) = h(n).$$

En consecuencia:

$$\tilde{y}(z) = \tilde{h}(z).$$

Lo que quiere decir que la respuesta al impulso del sistema en tiempo discreto está dada por:

$$h(n) = \mathcal{Z}^{-1}[\tilde{h}(z)] = \mathcal{Z}^{-1}[\tilde{y}(z)].$$

Cuando los sistemas están interconectados, las reglas que se aplican a los sistemas de tiempo continuo también se aplican a los sistemas de tiempo discreto. Se manejan diagramas de bloques como retraso unitario, interconexión en serie, en paralelo y retroalimentación de la misma manera que sus contrapartes en los sistemas de tiempo continuo. Se tienen los casos siguientes:

- Caso 1: Retraso unitario (Figura 3.6). En este caso la relación entrada-salida es de la forma:

$$y(n) = x(n-1).$$

Aplicando la transformada  $\mathcal{Z}$  en ambos lados de la ecuación anterior:

$$\tilde{y}(z) = z^{-1}\tilde{x}(z)$$

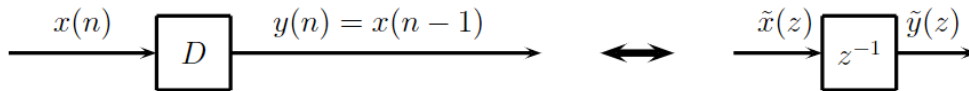


Figura 3.6: Retraso unitario.

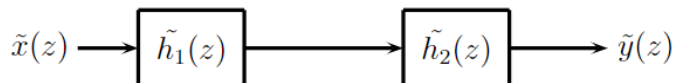


Figura 3.7: Función de transferencia para conexiones en serie.

$$\frac{\tilde{y}(z)}{\tilde{x}(z)} = z^{-1}.$$

Por lo tanto, la función de transferencia en este caso es la siguiente:

$$\tilde{h}(z) = z^{-1}.$$

- Caso 2: Conexión en serie (Figura 3.7). Si la entrada al primer sistema es  $x(n)$ , entonces la salida del primer sistema, que es la entrada del segundo, es de la forma siguiente:

$$y_1(n) = x(n) * h_1(n). \quad (3.6.7)$$

Luego, la salida del segundo sistema, que es la salida del sistema en serie está dada por:

$$y(n) = y_1(n) * h_2(n). \quad (3.6.8)$$

Sustituyendo (3.6.7) en (3.6.8), se tiene que:

$$y(n) = (x(n) * h_1(n)) * h_2(n) = x(n) * (h_1(n) * h_2(n)).$$

Tomando la transformada  $\mathcal{Z}$  en la ecuación anterior, se sigue que:

$$\mathcal{Z}[y(n)] = \mathcal{Z}[x(n)] \cdot \mathcal{Z}[h_1(n)] \cdot \mathcal{Z}[h_2(n)],$$

o bien:

$$\frac{\tilde{y}(z)}{\tilde{x}(z)} = \tilde{h}_1(z)\tilde{h}_2(z).$$

Así, la conexión en serie la función de transferencia es la siguiente:

$$\tilde{h}(z) = \tilde{h}_1(z)\tilde{h}_2(z).$$

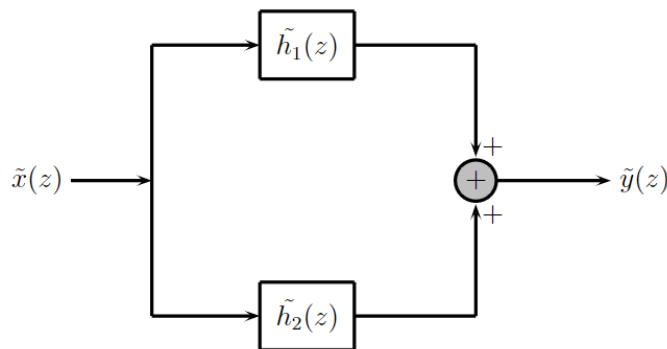


Figura 3.8: Función de transferencia para conexiones en paralelo.

- Caso 3: Conexión en paralelo (Figura 3.8). Si la entrada común al sistema en paralelo es  $x(n)$ , las salidas de cada uno de los sistemas son de la forma:

$$y_1(n) = x(n) * h_1(n) \quad \text{y} \quad y_2(n) = x(n) * h_2(n). \quad (3.6.9)$$

Luego, se tiene que la salida total del sistema  $y(n)$  del sistema compuesto es la suma de las salidas individuales:

$$y(n) = y_1(n) + y_2(n). \quad (3.6.10)$$

Sustituyendo (3.6.9) en la ecuación (3.6.10):

$$y(n) = (x(n) * h_1(n)) + (x(n) * h_2(n)).$$

Aplicando la transformada  $\mathcal{Z}$  en ambos lados de la ecuación anterior, se sigue que:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[y(n)] &= \mathcal{Z}[(x(n) * h_1(n)) + (x(n) * h_2(n))] \\ &= \mathcal{Z}[x(n) * h_1(n)] + \mathcal{Z}[x(n) * h_2(n)]. \end{aligned}$$

de forma equivalente:

$$\begin{aligned} \tilde{y}(z) &= \tilde{x}(z) \cdot \tilde{h}_1(z) + \tilde{x}(z) \cdot \tilde{h}_2(z) \\ &= \tilde{x}(z)(\tilde{h}_1(z) + \tilde{h}_2(z)) \\ \frac{\tilde{y}(z)}{\tilde{x}(z)} &= \tilde{h}_1(z) + \tilde{h}_2(z). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función de transferencia en este caso es la siguiente:

$$\tilde{h}(z) = \tilde{h}_1(z) + \tilde{h}_2(z).$$

- Caso 4: Interconexión de retroalimentación (Figura 3.9). Cuando un sistema tiene retroalimentación, parte de la salida se devuelve a la entrada. En este caso analizamos un sistema con retroalimentación negativa, es decir, se tiene que la señal retroalimentada se resta de la señal de entrada para formar una nueva entrada. En este tipo de configuración, la salida  $y(n)$  se retroalimenta a la entrada. Este sistema tiene dos bloques:

### 3. El método de la transformada $\mathcal{Z}$ y ecuaciones en diferencias de Volterra

---

- $h_1(n)$ : Es la respuesta al impulso del sistema directo, donde la entrada es procesada antes de la retroalimentación.
- $h_2(n)$ : Es la respuesta al impulso del sistema de retroalimentación, que filtra la salida antes de restarse a la entrada.

Así, la relación de las señales es que la entrada total al sistema directo es la diferencia entre la entrada  $x(n)$  y la señal de retroalimentación, que proviene de la salida  $y(n)$  filtrada por  $h_2(n)$ . Es decir:

$$\text{Entrada directa} = x(n) - \text{señal de retroalimentación} = x(n) - (y(n) * h_2(n)).$$

Luego, sabemos que la salida  $y(n)$  es el resultado de aplicar  $h_1(n)$  a la entrada directa:

$$\begin{aligned} y(n) &= (x(n) - y(n) * h_2(n)) * h_1(n) \\ &= x(n) * h_1(n) - (y(n) * h_2(n) * h_1(n)). \end{aligned}$$

Reordenando la ecuación anterior, obtenemos:

$$y(n) + (y(n) * h_1(n) * h_2(n)) = x(n) * h_1(n) \quad (3.6.11)$$

Aplicando la transformada  $\mathcal{Z}$  en ambos lados de la ecuación (3.6.11):

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[y(n) + (y(n) * h_1(n) * h_2(n))] &= \mathcal{Z}[x(n) * h_1(n)] \\ \mathcal{Z}[y(n)] + \mathcal{Z}[y(n) * h_1(n) * h_2(n)] &= \mathcal{Z}[x(n)] \cdot \mathcal{Z}[h_1(n)] \\ \mathcal{Z}[y(n)] + \mathcal{Z}[y(n)] \cdot \mathcal{Z}[h_1(n)] \cdot \mathcal{Z}[h_2(n)] &= \mathcal{Z}[x(n)] \cdot \mathcal{Z}[h_1(n)], \end{aligned}$$

o bien:

$$\begin{aligned} \tilde{y}(z)(1 + \tilde{h}_1(z) \cdot \tilde{h}_2(z)) &= \tilde{x}(z) \cdot \tilde{h}_1(z) \\ \frac{\tilde{y}(z)}{\tilde{x}(z)} &= \frac{\tilde{h}_1(z)}{1 + \tilde{h}_1(z) \cdot \tilde{h}_2(z)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función de transferencia general está dada por:

$$\tilde{h}(z) = \frac{\tilde{y}(z)}{\tilde{x}(z)} = \frac{\tilde{h}_1(z)}{1 + \tilde{h}_1(z) \cdot \tilde{h}_2(z)}.$$

La estabilidad del sistema puede abordarse en términos de las raíces características, la respuesta al impulso y el criterio de entrada acotada/salida acotada (BIBO, por sus siglas en inglés). Además, se puede deducir de la función de transferencia del sistema. El sistema es estable si  $\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty$ .

Todos los términos en  $h(n)$  son exponenciales decrecientes. Para lograr esto, las magnitudes de todos los polos del sistema de  $\tilde{h}(z)$  deben ser menores que 1, lo que quiere decir que, los polos están dentro de un círculo unitario en el plano  $z$ .

En conclusión, la función de transferencia es fundamental para evaluar la estabilidad del sistema, analizar su respuesta a diversas entradas y diseñar sistemas con propiedades específicas.



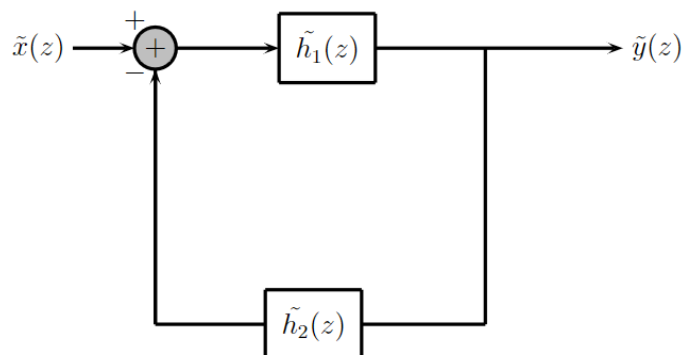
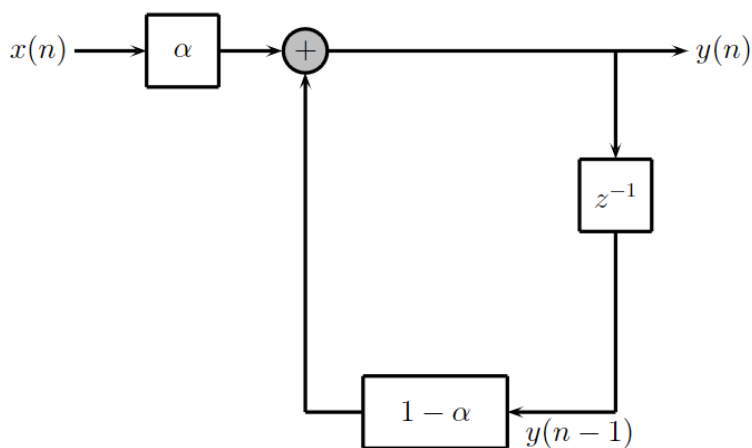


Figura 3.9: Función de transferencia para interconexiones de retroalimentación.

Figura 3.10: Filtro  $\alpha$ 

**Ejemplo 3.6.1.** Consideremos el filtro  $\alpha$  que se describe en la Figura 3.10. De la figura se tiene que:

$$y(n) + (1 - \alpha)y(n - 1) = \alpha x(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \quad (3.6.12)$$

Hallemos  $\tilde{h}(z)$  y  $h(n)$ , con  $\alpha = 0.2$ . Sustituyendo este valor en la ecuación en diferencias (3.6.12), se sigue que:

$$y(n) + 0.8y(n - 1) = 0.2x(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Utilizando la transformada  $\mathcal{Z}$  en ambos lados de la ecuación anterior, se sigue que  $\tilde{y}(z) + 0.8z^{-1}\tilde{y}(z) = 0.2\tilde{x}(z)$ . Lo que quiere decir que:

$$\tilde{h}(z) = \frac{\tilde{y}(z)}{\tilde{x}(z)} = \frac{0.2}{1 + 0.8z^{-1}} = \frac{0.2z}{z + 0.8}.$$

Aplicando la transformada inversa en ambos lados de la ecuación, se tiene que:

$$h(n) = 0.2(-0.8)^n, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Notemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} h(n) = 0$ . Por lo tanto, este sistema es asintóticamente estable.

### 3.6.4. Un modelo epidémico

Sean  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  tal que  $x(n)$  es la fracción de individuos susceptibles en una determinada población durante el  $n$ -ésimo día de una epidemia, para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$  y  $a(k) > 0$  la medida de cuán infecciosos son los individuos infectados durante el  $k$ -ésimo día,  $k \leq n$ . Entonces la propagación de una epidemia puede modelarse mediante la ecuación:

$$\ln \left[ \frac{1}{x(n+1)} \right] = \sum_{j=0}^n (1 + \epsilon - x(n-j))a(j) = \sum_{j=0}^n (1 + \epsilon - x(n))a(n-j), \quad (3.6.13)$$

para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ , donde  $\epsilon > 0$  representa un pequeño incremento que podría interpretarse como una tasa adicional de infección debido a factores externos o variaciones en la susceptibilidad de la población.

Para poder transformar la ecuación (3.6.13) en una ecuación en diferencias de tipo Volterra, hagamos el cambio de variable  $x(n) = e^{-y(n)}$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Lo que quiere decir que:

$$y(n+1) = \sum_{j=0}^n a(n-j) (1 + \epsilon - e^{-y(j)}), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \quad (3.6.14)$$

Debido a que  $x(n) \in [0, 1]$ , se sigue que  $y(n) \geq 0$  para todas las soluciones de (3.6.14). Notemos que durante las primeras etapas de la epidemia  $x(n)$  está cerca de 1 y en consecuencia,  $y(n)$  está cerca de cero. Este es el fundamento para linealizar (3.6.14) alrededor de cero. Luego, si reemplazamos  $e^{-y(j)}$  por  $1 - y(j)$ , entonces (3.6.14) se convierte en:

$$y(n+1) = \sum_{j=0}^n a(n-j) (\epsilon + y(j)), \quad y(0) = 0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Tomando la transformada  $\mathcal{Z}$  en ambos lados de la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} z\tilde{y}(z) - zy(0) &= \tilde{a}(z) \left( \frac{\epsilon z}{z-1} + \tilde{y}(z) \right) \\ &= \tilde{a}(z) \frac{\epsilon z}{z-1} + \tilde{a}(z)\tilde{y}(z) \\ \tilde{y}(z) &= \frac{\epsilon z \tilde{a}(z)}{(z+1)(z - \tilde{a}(z))}. \end{aligned}$$

Si  $a(n)$  tiene una forma simple, es posible calcular  $y(n)$ . Por ejemplo, si  $a(n) = ca^n$ , entonces  $\tilde{a}(z) = \frac{cz}{z-a}$ . En consecuencia:

$$\tilde{y}(z) = \frac{\epsilon cz}{(z+1)(z - (a+c))} = \frac{\epsilon c}{1-a-c} \left[ \frac{1}{z-1} - \frac{a+c}{z-a-c} \right].$$

Utilizando la inversa de la transformada  $\mathcal{Z}$  en ambos lados de la ecuación anterior:

$$y(n) = \frac{\epsilon c}{1 - (a+c)} [1 - (a+c)^n].$$

Luego, si  $0 < a + c < 1$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = \frac{\epsilon c}{1 - (a+c)}$  y por tanto la propagación de la enfermedad no alcanzará proporciones epidémicas.

Enfoquémonos en la ecuación no lineal (3.6.14). Sea  $\hat{y} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  tal que  $\hat{y}$  es la solución de (3.6.14) con  $\hat{y}(0) = 0$ . Supongamos que  $\sum_{n=0}^{\infty} a(n) < 1$ . Hagamos el cambio de variable  $u(n) = y(n) - \hat{y}(n)$  en la ecuación (3.6.14):

$$\begin{aligned} y(n+1) &= \hat{y}(n+1) + u(n+1) \\ \sum_{j=0}^n a(n-j) (1 + \epsilon - e^{-(\hat{y}(j)+u(j))}) &= \hat{y}(n+1) + u(n+1). \end{aligned} \quad (3.6.15)$$

Debido a que  $\hat{y}(n)$  es una solución particular de (3.6.14), satisface:

$$\hat{y}(n+1) = \sum_{j=0}^n a(n-j) (1 + \epsilon - e^{-\hat{y}(j)}). \quad (3.6.16)$$

De (3.6.15) y (3.6.16), se sigue que:

$$\begin{aligned} u(n+1) &= \sum_{j=0}^n a(n-j) (e^{-\hat{y}(j)} - e^{-(\hat{y}(j)+u(j))}) \\ &= \sum_{j=0}^n a(n-j) e^{-\hat{y}(j)} (1 - e^{-u(j)}). \end{aligned} \quad (3.6.17)$$

Demostremos por inducción que  $u(n) = y(n) - \hat{y}(n) \geq 0$ .

Para  $n = 0$ , se sigue que  $u(0) = y(0) - \hat{y}(0)$ . Luego, por definición  $\hat{y}(0) = 0$ . Además,  $y(0) \geq 0$ , lo que quiere decir que:

$$u(0) = y(0) - 0 = y(0) \geq 0.$$

Supongamos que  $u(m) \geq 0$ , para cada  $m \leq n$ . Veamos que  $u(m+1) \geq 0$ . Para esto, analizamos el término dentro de la suma de (3.6.17).

Por hipótesis de inducción,  $u(j) \geq 0$ , para cada  $j \leq n$ . En consecuencia,  $e^{-u(j)} \leq 1$ , para cada  $j \leq n$ . De aquí,  $1 - e^{-u(j)} \geq 0$ . Además, dado que  $a(m-j) > 0$ , para cada  $j \leq m$  y  $e^{-\hat{y}(j)} > 0$ , se sigue que cada término de la suma es no negativo, es decir  $a(k-j)e^{-\hat{y}(j)}(1 - e^{-u(j)}) \geq 0$ . Así,  $u(k+1) = \sum_{j=0}^k a(k-j)e^{-\hat{y}(j)}(1 - e^{-u(j)}) \geq 0$ .

Sea  $V$  una función de Liapunov tal que:

$$V(n, u(n)) = (1 - a)^{-1} \left( u(n) + \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=n}^{\infty} a(s-r)u(r) \right).$$

Lo que quiere decir que:

$$\Delta V(n, u(n)) = V(n+1, u(n+1)) - V(n, u(n))$$

### 3. El método de la transformada $\mathcal{Z}$ y ecuaciones en diferencias de Volterra

---

$$\begin{aligned}
&= (1-a)^{-1} \left( u(n+1) + \sum_{r=0}^n \sum_{s=n+1}^{\infty} a(s-r)u(r) \right) \\
&\quad - (1-a)^{-1} \left( u(n) + \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=n}^{\infty} a(s-r)u(r) \right) \\
&= (1-a)^{-1} \left( \sum_{j=0}^n a(n-j)e^{-\hat{y}(j)}(1-e^{-u(j)}) + \sum_{r=0}^n \sum_{s=n+1}^{\infty} a(s-r)u(r) - u(n) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=n}^{\infty} a(s-r)u(r) \right) \\
&\leq (1-a)^{-1} \left( \sum_{j=0}^n a(n-j)u(j) + \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=n+1}^{\infty} a(s-r)u(r) + \sum_{s=n+1}^{\infty} a(s-n)u(n) \right. \\
&\quad \left. - \hat{y}(n) - \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=n}^{\infty} a(s-r)u(r) - \sum_{r=0}^{n-1} a(n-r)u(r) \right) \\
&\leq (1-a)^{-1} \left( \sum_{s=n}^{\infty} a(s-n) - 1 \right) u(n) \\
&\leq (1-a)^{-1}(a-1)u(n) \\
&= -u(n) \\
&< 0.
\end{aligned}$$

Así, por el Teorema de Estabilidad de Liapunov (Teorema 2.5.4)<sup>1</sup>, la solución cero de (3.6.14) es globalmente asintóticamente estable. Esto implica que sin importar el estado inicial del sistema, se descarta que la enfermedad se propague sin control, por lo que el número de casos nuevos disminuirá con el tiempo, garantizando que la enfermedad puede ser controlada y eventualmente erradicada bajo las condiciones dadas.

---

<sup>1</sup>Este teorema es válido tanto para ecuaciones no autónomas como para ecuaciones en diferencias de Volterra.

---

---

# CAPÍTULO 4

---

## TEORÍA DE OSCILACIÓN

Ahora nos enfocamos en saber si una solución oscila alrededor de un punto de equilibrio  $x^*$  independientemente de su comportamiento estable y asintótico. Debido a que podemos suponer que  $x^* = 0$ , analizamos si las soluciones oscilan alrededor de cero, son eventualmente positivas o eventualmente negativas. Las ecuaciones de segundo orden se analizaron en el capítulo de Preliminares.

### 4.1. Ecuaciones en diferencias de tres términos

Sean  $x, p \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  y  $k \in \mathbb{N}$ . Consideremos la siguiente ecuación en diferencias de orden  $k + 1$  de tres términos:

$$x(n+1) - x(n) + p(n)x(n-k) = 0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \quad (4.1.1)$$

**Definición 4.1.1.** Sea  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  una solución de (4.1.1). Se dice que  $u$  es *oscilatoria alrededor de cero* si para cada  $N \in \mathbb{N}$ , existe  $n \geq N$  tal que  $x(n)x(n+1) \leq 0$ . De lo contrario, la solución  $u$  es *no oscilatoria*.

**Observación 4.1.2.** Sean  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  una solución de (4.1.1) y  $x^* \in \mathbb{R}$  un punto de equilibrio de (4.1.1). Se dice que la solución  $u$  es *oscilante alrededor de  $x^*$* , si  $x(n) - x^*$  es oscilatoria alrededor de cero.

El caso específico, en el que  $k = 1$  y  $p(n) = p$  con  $p \in \mathbb{R}$ , se analizó en la Sección 1.4. En este caso la ecuación (4.1.1) es de la forma siguiente:

$$x(n+2) - x(n+1) + px(n) = 0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \quad (4.1.2)$$

La raíces características de (4.1.2) están dadas por:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4p}.$$

Recordemos de la Sección 1.4 que todas las soluciones de (4.1.2) oscilan si y sólo si  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son números reales no positivos (Teorema 1.4.2-(a)). Adicionalmente, cada solución de (4.1.2) oscila si y sólo si  $p > \frac{1}{4}$  (Ejemplo 1.4.6).

La ecuación (4.1.1) es el análogo discreto de la ecuación diferencial con retraso:

$$x'(t) + p(t)x(t - k) = 0. \quad (4.1.3)$$

El comportamiento oscilatorio de (4.1.3) es notablemente similar al de su análogo discreto (4.1.1), con excepción del caso  $k = 0$ :

$$x'(t) + p(t)x(t) = 0.$$

Se sigue que su solución es de la forma siguiente:

$$x(t) = x(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t p(s) ds\right),$$

que nunca es oscilatoria. Sin embargo, su análogo discreto:

$$x(n + 1) = (1 - p(n))x(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+,$$

tiene como solución a  $x(n) = \left[\prod_{j=n_0}^{n-1} (1 - p(j))\right]x_0$  y oscila si  $1 - p(j) < 0$  para cada  $j \geq n_0$ .

Consideremos las siguientes inecuaciones en diferencias asociadas a (4.1.1):

$$x(n + 1) - x(n) + p(n)x(n - k) \leq 0 \quad (4.1.4)$$

$$x(n + 1) - x(n) + p(n)x(n - k) \geq 0. \quad (4.1.5)$$

Previo a analizar los resultados, veamos la siguiente definición que es útil más adelante:

**Definición 4.1.3.** Sean  $a, \alpha, \beta \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  tales que  $\beta(n) = \sup\{a(n), a(n + 1), a(n + 2), \dots\}$  y  $\alpha(n) = \inf\{a(n), a(n + 1), a(n + 2), \dots\}$ . Se tiene que:

(a)  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta(n).$

(b)  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(n).$

Notemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a(n)$  existe si y sólo si  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a(n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} a(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a(n).$

**Ejemplo 4.1.4.** Hallemos el límite superior y el límite inferior de las siguientes sucesiones:

$$S_1 : 0, 1, 0, 1, \dots$$

$$S_2 : 1, -2, 3, -4, \dots, (-1)^{n+1} \cdot n, \dots$$

$$S_3 : \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{6}{5}, -\frac{1}{5}, \dots$$

$$\begin{aligned}
 S_4 &: \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \dots \\
 S_5 &: (-1)^{n+1} \\
 S_6 &: \frac{\alpha n}{(1 + \beta n)} \\
 S_7 &: 1 + (-1)^{n+1}.
 \end{aligned}$$

Se sigue que:

$$\begin{aligned}
 \limsup S_1 &= 1, & \liminf S_1 &= 0 \\
 \limsup S_2 &= +\infty, & \liminf S_2 &= -\infty \\
 \limsup S_3 &= 1, & \liminf S_3 &= 0 \\
 \limsup S_4 &= 1, & \liminf S_4 &= 0 \\
 \limsup S_5 &= 1, & \liminf S_5 &= -1 \\
 \limsup S_6 &= \frac{\alpha}{\beta}, & \liminf S_6 &= \frac{\alpha}{\beta} \\
 \limsup S_7 &= 2, & \liminf S_7 &= 0.
 \end{aligned}$$

**Definición 4.1.5.** Sea  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  una solución de una ecuación en diferencias. Decimos que  $x$  es *eventualmente positiva* si existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $x(n) > 0$ , para cada  $n \geq N$ .

**Definición 4.1.6.** Sea  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  una solución de una ecuación en diferencias. La solución  $x$  es *eventualmente negativa* si existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $x(n) < 0$ , para cada  $n \geq N$ .

En otras palabras, de la Definición 4.1.1 se dice que una solución  $x$  es oscilatoria si no es eventualmente positiva ni eventualmente negativa.

**Teorema 4.1.7.** Dadas las inecuaciones en diferencias (4.1.4) y (4.1.5), si:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} p(n) = p > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}, \tag{4.1.6}$$

entonces se cumplen las proposiciones siguientes:

- (a) La inecuación en diferencias (4.1.4) no tiene una solución eventualmente positiva.
- (b) La inecuación en diferencias (4.1.5) no tiene una solución eventualmente negativa.

*Demostración.* Supongamos que  $\liminf_{n \rightarrow \infty} p(n) = p > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$ .

- (a) La prueba se realiza por contradicción. Supongamos que existe una solución de (4.1.4) que es eventualmente positiva. De aquí, existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $x(n) > 0$ , para cada  $n \geq N_1$ . Dividiendo la desigualdad (4.1.4) por  $x(n)$ , se tiene que:

$$\frac{x(n+1)}{x(n)} \leq 1 - p(n) \frac{x(n-k)}{x(n)}. \tag{4.1.7}$$

Pongamos  $z(n) = \frac{x(n)}{x(n+1)}$ . Se sigue que:

$$\begin{aligned} \frac{x(n-k)}{x(n)} &= \frac{x(n-k)}{x(n-k+1)} \frac{x(n-k+1)}{x(n-k+2)} \cdots \frac{x(n-1)}{x(n)} \\ &= z(n-k)z(n-k+1) \cdots z(n-1). \end{aligned}$$

Sustituyendo la ecuación anterior en (4.1.7):

$$\frac{1}{z(n)} \leq 1 - p(n)z(n-k)z(n-k+1) \cdots z(n-1), \quad \text{para cada } n \geq N_1 + k. \quad (4.1.8)$$

Ahora, la condición (4.1.6) implica que existe  $N_2 \in \mathbb{N}$  tal que  $p(n) > 0$ , para cada  $n \geq N_2$ . Pongamos  $N = \max\{N_2, N_1 + k\}$ . De aquí,  $x(n+1) - x(n) - p(n)x(n-k) \leq 0$ , para cada  $n \geq N$ . En consecuencia,  $x(n)$  no es creciente y por lo tanto,  $z(n) \geq 1$ . Sea  $\liminf_{n \rightarrow \infty} z(n) = q$ , donde  $q \in \mathbb{R}$ . Luego, de la desigualdad (4.1.8), se sigue que:

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z(n)} &= \frac{1}{\liminf_{n \rightarrow \infty} z(n)} = \frac{1}{q} \\ &\leq 1 - \liminf_{n \rightarrow \infty} [p(n)z(n-k)z(n-k+1) \cdots z(n-1)], \end{aligned}$$

o bien:

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} &\leq 1 - pq^k \\ pq^k &\leq 1 - \frac{1}{q} \\ &= \frac{q-1}{q} \\ p &\leq \frac{q-1}{q^{k+1}}. \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Sea  $h(q) = \frac{q-1}{q^{k+1}}$ . Se sigue que  $h(q)$  alcanza su máximo en  $q = \frac{k+1}{k}$ . Luego,  $\max h(q) = \left\{ \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} : q \geq 1 \right\}$ . Por lo tanto, de la desigualdad (4.1.9) se tiene que  $p \leq \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$ , contradicción.

(b) La prueba del inciso (b) se realiza de forma similar.

De (a) y (b) se sigue el resultado. ■

**Corolario 4.1.8.** Si se cumple la condición (4.1.6), entonces cada solución de (4.1.1) oscila.

*Demostración.* La prueba se realiza por contradicción. Supongamos que se cumple la condición (4.1.6) y existe una solución  $x$  de (4.1.1) que no oscila, es decir es eventualmente positiva o eventualmnte negativa. De aquí, obtenemos dos casos:



- Caso 1:  $x$  es eventualmente positiva. De aquí, la desigualdad (4.1.4) tiene una solución eventualmente positiva, lo que contradice el Teorema 4.1.7.
- Caso 2:  $x$  es eventualmente negativa. Luego, la desigualdad (4.1.5) tiene una solución eventualmente negativa, nuevamente por Teorema 4.1.7, esto es una contradicción.

Por lo tanto, cada solución de (4.1.1) oscila. ■

**Ejemplo 4.1.9.** Sea  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ . Consideremos la siguiente ecuación en diferencias:

$$x(n+1) - x(n) + \left( \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \right) x(n-k) = 0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Notemos que  $p = \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$ . En consecuencia, no se cumple la condición (4.1.6). Así, por el Corolario 4.1.8, la solución  $x(n) = \left( \frac{k}{k+1} \right)^{n-1}$ , con  $n > 1$  no oscila.

**Teorema 4.1.10.** Consideremos la ecuación en diferencias (4.1.1). Si  $p(n) \geq 0$  y  $\sup p(n) < \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ , entonces (4.1.1) tiene una solución no oscilatoria.

*Demostración.* De forma similar a la prueba del Teorema 4.1.7, pongamos  $z(n) = \frac{x(n)}{x(n+1)}$ , sustituyéndolo ahora en (4.1.1) para obtener:

$$\frac{1}{z(n)} = 1 - p(n)z(n-k)z(n-k+1) \cdots z(n-1), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \quad (4.1.10)$$

De aquí, sin pérdida de generalidad, basta probar que (4.1.10) tiene una solución eventualmente positiva. Para construir esta solución, definimos lo siguiente:

$$z(1-k) = z(2-k) = \cdots = z(0) = a = \frac{k+1}{k} > 1.$$

Adicionalmente, de (4.1.10), para  $n = 1$ , se sigue que:

$$z(1) = \frac{1}{1 - p(1)z(1-k)z(2-k) \cdots z(0)}. \quad (4.1.11)$$

Luego,  $z(1) > 1$ . Veamos que  $z(1) < a$ . De la ecuación (4.1.11), se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{z(1)}{a} &= \frac{1}{a[1 - p(1)z(1-k)z(2-k) \cdots z(0)]} \\ &\leq \frac{k}{(k+1) \left[ 1 - \frac{k^k}{(k+1)^{k+1} \cdot \left( \frac{k+1}{k} \right)^k} \right]} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Así, de forma inductiva, podemos demostrar que  $1 < z(n) < a$ , con  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Además,  $z(n)$  es una solución de (4.1.10). De la forma en que  $z$  fue definida, se sigue que  $x(1) = 1, x(2) = \frac{x(1)}{z(1)}, x(3) = \frac{x(2)}{z(2)}, \dots$ . Por lo tanto,  $x$  es una solución no oscilatoria de (4.1.1). ■

Para el caso en el que  $p(n) = p$ , con  $p \in \mathbb{R}$ , se tiene el siguiente:

**Teorema 4.1.11.** Sean  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  y  $k \in \mathbb{N}$ . Dada la siguiente ecuación en diferencias:

$$x(n+1) - x(n) + px(n-k) = 0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \quad (4.1.12)$$

donde  $p \in \mathbb{R}$  tal que  $p > 0$ . Se tiene que toda solución de esta ecuación oscila si y sólo si  $p > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$ .

*Demostración.* Supongamos que cada solución de (4.1.12) oscila. Veamos que  $p > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$ . Por contradicción, supongamos que  $p \leq \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$ .

- (a) Caso 1:  $p = \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$ . Por el Ejemplo 4.1.9, se tiene que existe una solución de la ecuación en diferencias que no oscila. Lo que contradice la hipótesis de que cada solución de (4.1.12) oscila.
- (b) Caso 2:  $p < \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$ . Por el Teorema 4.1.10, la ecuación (4.1.12) tiene una solución no oscilatoria, contradicción.

Recíprocamente, supongamos que  $p > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$ . Por el Corolario 4.1.8, se sigue que cada solución de (4.1.12) oscila. ■

**Observación 4.1.12.** El Teorema 1.4.2-(a) se cumple para ecuaciones en diferencias homogéneas de orden  $k$ .

Sean  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  y  $k \in \mathbb{N}$ . Consideremos la ecuación en diferencias homogénea de orden  $k$  de la forma siguiente:

$$x(n+k) + p_1x(n+k-1) + p_2x(n+k-2) + \dots + p_kx(n) = 0 \quad (4.1.13)$$

para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ , con  $p_i \in \mathbb{R}$ , para cada  $i \in 1, 2, \dots, k$  y  $p_k \neq 0$ .

**Teorema 4.1.13.** Toda solución de la ecuación 4.1.13 oscila si y sólo si su ecuación característica no tiene raíces características reales positivas.

*Demostración.* Se tiene que la ecuación característica de (4.1.13) está dada por [19, pág.85]:

$$\lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + p_2\lambda^{k-2} + \dots + p_k = 0. \quad (4.1.14)$$

Supongamos que toda solución de la ecuación (4.1.13) oscila. Por contradicción, supongamos que existe una raíz real positiva  $\lambda_i > 0$ . Se tiene que existe una solución de la forma

$x(n) = a\lambda_i^n$ , con  $a \neq 0$ . Notemos que esta solución no oscila, ya que  $\lambda_i^n > 0$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Luego, dependiendo del signo de la constante  $a$ , se sigue que  $x(n) > 0$ , o bien,  $x(n) < 0$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Esto contradice la suposición de que todas las soluciones oscilan.

Recíprocamente, supongamos que (4.1.14) no tiene raíces características positivas. En consecuencia, todas las raíces deben ser reales no positivas, o bien complejas.

- Caso 1: Las raíces son reales no positivas. Esto es, o bien son negativas o cero. De aquí, las soluciones de la ecuación en diferencias (4.1.13) tienen términos de la forma  $x(n) = a\lambda_i^n$ , con  $\lambda_i \leq 0$ .
  - Subcaso 1.1:  $\lambda_i = 0$ . En este subcaso, la solución es constante.
  - Subcaso 1.2:  $\lambda_i < 0$ . Las soluciones son combinaciones lineales de términos de la forma  $(-1)^n$ , lo que implica que las soluciones cambian de signo infinitas veces a medida que  $n \rightarrow \infty$ , es decir, todas las soluciones oscilan.
- Caso 2: Las raíces son complejas. En este caso, las soluciones nuevamente oscilan, debido a que la parte imaginaria de las raíces genera términos sinusoidales en la solución general de la ecuación en diferencias, que alternan en signo de manera infinita.

De los Casos 1 y 2, se sigue que todas las soluciones oscilan. ■

## 4.2. Ecuaciones de segundo orden autoadjuntas

Sean  $x, p, q \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ . Consideremos la ecuación en diferencias de segundo orden de la forma siguiente:

$$\Delta[p(n-1)\Delta x(n-1)] + q(n)x(n) = 0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \quad (4.2.1)$$

donde  $p(n) > 0$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Se dice que esta ecuación es autoadjunta, debido a que es análogo discreto de la ecuación en diferencias autoadjunta:

$$[p(t)x'(t)]' + q(t)x(t) = 0.$$

Podemos escribir la ecuación (4.2.1) equivalentemente como:

$$p(n)x(n+1) + p(n-1)x(n-1) = b(n)x(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \quad (4.2.2)$$

donde:

$$b(n) = p(n-1) + p(n) - q(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \quad (4.2.3)$$

Es más, toda ecuación de la forma:

$$p_0(n)x(n+1) + p_1(n)x(n) + p_2(n)x(n-1) = 0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \quad (4.2.4)$$

con  $p_0(n) > 0$  y  $p_2(n) > 0$ , se puede escribir en la forma autoadjunta (4.2.1) o (4.2.2). Para hallar  $p(n)$  y  $q(n)$  a partir de  $p_0(n)$ ,  $p_1(n)$  y  $p_2(n)$ , multiplicamos ambos lados de (4.2.4) por una secuencia positiva  $h(n)$ , en consecuencia:

$$p_0(n)h(n)x(n+1) + p_1(n)h(n)x(n) + p_2(n)h(n)x(n-1) = 0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \quad (4.2.5)$$

Comparando (4.2.5) con (4.2.2), se sigue que:

$$\begin{aligned} p(n) &= p_0(n)h(n) \\ p(n-1) &= p_2(n)h(n). \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Lo que quiere decir que:

$$\begin{aligned} p_2(n+1)h(n+1) &= p_0(n)h(n) \\ h(n+1) &= \frac{p_0(n)}{p_2(n+1)}h(n). \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Luego, se tiene que [19, pág. 25]:

$$h(n) = \prod_{i=n_0}^{n-1} \frac{p_0(i)}{p_2(i+1)},$$

es solución de (4.2.7) y sustituyéndola en (4.2.6), obtenemos:

$$p(n) = p_0(n) \prod_{i=n_0}^{n-1} \frac{p_0(i)}{p_2(i+1)}.$$

Adicionalmente, por (4.2.3):

$$q(n) = p_1(n)h(n) + p(n) + p(n-1).$$

En [13] Hartman introdujo la noción de ceros generalizados para poder obtener un análogo discreto del Teorema de Separación de Sturm referente a ecuaciones diferenciales. A continuación damos la definición de Hartmann.

**Definición 4.2.1.** Sea  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  tal que  $x$  es una solución de (4.2.1), para cada  $n \geq n_0 \geq 0$ . Se dice que  $x$  tiene un *cero generalizado* en  $r > n_0$  si  $x(r) = 0$  o  $x(r-1)x(r) < 0$ .

**Teorema 4.2.2** (Separación de Sturm). Sean  $x_1, x_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  dos soluciones linealmente independientes de (4.2.1). Los siguientes argumentos son verdaderos:

- (a)  $x_1$  y  $x_2$  no tienen ceros en común, esto es, si  $x_1(r) = 0$ , entonces  $x_2(r) \neq 0$  y viceversa.
- (b) Si  $x_1$  tiene un cero en  $n_1$  y un cero generalizado en  $n_2 > n_1$ , entonces  $x_2$  debe tener un cero generalizado en  $(n_1, n_2]$ .

- (c) Si  $x_1$  tiene ceros generalizados en  $n_1$  y  $n_2 > n_1$ , entonces  $x_2$  debe tener un cero generalizado en  $[x_1, x_2]$ .

*Demostración.* (a) Supongamos, por contradicción  $x_1(r) = x_2(r) = 0$ . El Casoratiano [19, pág. 75] de  $\{x_1, x_2\}$  es de la forma siguiente:

$$W(r) = \det \begin{pmatrix} x_1(r) & x_2(r) \\ x_1(r+1) & x_2(r+1) \end{pmatrix} = 0.$$

Del [19, Corolario 3.1.11], se tiene que  $x_1$  y  $x_2$  son linealmente dependientes, contradicción.

- (b) Supongamos que  $x_1$  tiene un cero en  $n_1$  y un cero generalizado en  $n_2 > n_1$ , esto es,  $x_1(n_1) = 0$  y  $x_1(n_2 - 1)x(n_2) < 0$  (o  $x_1(n_2) = 0$ ). Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $n_2$  es el primer cero generalizado mayor que  $n_1$ . Supongamos que  $x_1(n) > 0$  para  $n_1 < n < n_2$  y  $x_1(n_2) \leq 0$ .

Nuevamente, por contradicción, supongamos que  $x_2(n)$  no tiene ceros generalizados en  $(n_1, n_2]$ . De aquí,  $x_2(n) > 0$  en  $[n_1, n_2]$  o  $x_2(n) < 0$  en  $[n_1, n_2]$ . Sin pérdida de generalidad, asumimos que  $x_2(n) > 0$  en  $[n_1, n_2]$ . Sea  $M \in \mathbb{R}^+$  y  $r \in (n_1, n_2)$  tal que  $x_2(r) = Mx_1(r)$  y  $x_2(n) \geq Mx_1(n)$  en  $[n_1, n_2]$ . Por el Principio de Superposición [19, Teorema 3.1.17],  $x(n) = x_2(n) - Mx_1(n)$  también es una solución de (4.2.1) con  $x(r) = 0$  y  $x(r-1)x(r+1) \geq 0$ , con  $r > n_1$ . Haciendo  $n = r$  en (4.2.1) obtenemos:

$$\Delta[p(r-1)\Delta x(r-1)] + q(r)x(r) = 0.$$

Debido a que  $x(r) = 0$ , se sigue que:

$$p(r-1)\Delta^2 x(r-1) + \Delta p(r-1)\Delta x(r-1),$$

o bien,

$$p(r)x(r+1) = -p(r-1)x(r-1). \quad (4.2.8)$$

Dado que  $x(r+1) = 0$ ,  $x(r-1) = 0$  y  $p(n) > 0$ , la ecuación (4.2.8) implica que  $x(r-1)x(r+1) < 0$ , que es una contradicción.

- (c) Este inciso se demuestra con un proceso similar al del inciso (b).

De los incisos (a), (b), (c) se sigue la prueba. ■

**Observación 4.2.3.** Con base a la noción de ceros generalizados, podemos dar una definición alternativa de oscilación. Una solución de una ecuación en diferencias es oscilatoria en  $[n_2, \infty)$  si tiene infinitos ceros generalizados en  $[n_0, \infty)$ . Una consecuencia inmediata del Teorema de Separación de Sturm (Teorema 4.2.2) es que si (4.2.1) tiene una solución oscilatoria, entonces todas sus soluciones son oscilatorias. Es fundamental mencionar que esto es válido únicamente para ecuaciones en diferencias autoadjuntas.

**Lema 4.2.4.** Consideremos la ecuación (4.2.2). Si existe una subsucesión  $b(n_k) \leq 0$  para cada  $n_k$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty$ , entonces toda solución de (4.2.2) oscila.

*Demostración.* La prueba se realiza por contradicción. Supongamos que existe una sub-secuencia  $b(n_k) \leq 0$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty$  y existe una solución  $x$  de (4.2.2) que no es oscilatoria, esto es,  $x$  es eventualmente positiva o eventualmente negativa. Sin pérdida de generalidad, supongamos que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $x(n) > 0$ , para cada  $n \geq N$ . Lo que quiere decir que:

$$\begin{aligned} p(n_k)x(n_k + 1) + p(n_k - 1)x(n_k - 1) - b(n_k)x(n_k) &> 0 \\ p(n_k)x(n_k + 1) + p(n_k - 1)x(n_k - 1) &> b(n_k)x(n_k), \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

para cada  $n_k \geq N$ . Debido a que  $x(n) > 0$ , podemos dividir la ecuación (4.2.9) entre  $x(n_k) > 0$ :

$$p(n_k) \frac{x(n_k + 1)}{x(n_k)} + p(n_k - 1) \frac{x(n_k - 1)}{x(n_k)} > b(n_k), \quad \text{para cada } n_k \geq N,$$

como  $b(n_k) \leq 0$ , para cada  $n_k$ , se ha llegado a una contradicción. Por lo tanto, toda solución de (4.2.2) oscila. En consecuencia, por el Lema 4.2.5, todas las soluciones de (4.2.2) no oscilan. ■

### 4.2.1. Transformaciones de Riccati

Una de las técnicas más útiles en la teoría de la oscilación es el uso de las llamadas transformaciones de Riccati.

#### Primera transformación de Riccati

En la ecuación (4.2.2), sea:

$$z(n) = \frac{b(n+1)x(n+1)}{p(n)x(n)}. \quad (4.2.10)$$

Se sigue que  $z$  satisface la ecuación:

$$c(n)z(n) + \frac{1}{z(n-1)} = 1, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \quad (4.2.11)$$

donde:

$$c(n) = \frac{p^2(n)}{b(n)b(n+1)}. \quad (4.2.12)$$

El siguiente lema relaciona (4.2.2) con (4.2.11).

**Lema 4.2.5.** Sea  $b \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  tal que  $b(n) > 0$  para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Se tiene que cada solución  $x$  de (4.2.2) no es oscilatoria si y sólo si cada solución  $z$  de (4.2.11) cumple que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $z(n) > 0$ , para cada  $n \geq N$ .

*Demostración.* Supongamos que  $x$  es una solución no oscilatoria de (4.2.2). En consecuencia, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $x(n)x(n+1) > 0$  o  $x(n)x(n+1) < 0$ , para cada  $n \geq N$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $x(n)x(n+1) > 0$ , para cada  $n \geq N$ . La ecuación (4.2.10) implica que  $z(n) > 0$ , para cada  $n \geq N$ . Adicionalmente, sustituyendo en (4.2.11), se tiene que  $z(n) > 0$ , para cada  $n \geq N$ .

Recíprocamente, supongamos que  $z$  es una solución de (4.2.11) que cumple que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $z(n) > 0$ , para cada  $n \geq N$ . Basta probar que existe solución no oscilatoria  $x$  de (4.2.2). Así, utilizando  $z$  construimos inductivamente una solución no oscilatoria  $x$  de (4.2.2) de la siguiente manera: Definimos  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  tal que  $x(N) = 1$  y  $x(n+1) = \left(\frac{p(n)}{b(n+1)}\right) z(n)x(n)$  (obtenida de (4.2.10)), para cada  $n > N$ . Se sigue que  $x(n)$ , con  $n \geq N$  es una solución de (4.2.2) que no es oscilatoria. Por el Teorema de Separación de Sturm (Teorema 4.2.2), cada solución de (4.2.2) es no oscilatoria. ■

Previo a analizar el resultado principal de esta sección, veamos el siguiente:

**Lema 4.2.6.** Si  $c(n) \geq a(n) > 0$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$  y  $z$  es una solución de la ecuación (4.2.11) tal que  $z(n) > 0$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ , entonces la ecuación:

$$a(n)y(n) + \frac{1}{y(n-1)} = 1, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \quad (4.2.13)$$

tiene una solución  $y$  tal que  $y(n) \geq z(n) > 1$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ .

*Demostración.* Dado que  $c(n) > 0$  y  $z(n) > 0$ , de (4.2.11) se deduce que  $\frac{1}{z(n-1)} < 1$ . Esto implica que  $z(n-1) > 1$ , para cada  $n \geq 1$ . Ahora definimos inductivamente una solución  $y$  de (4.2.13). Elija  $y(0) \geq z(0)$  tal que  $y$  satisface también (4.2.11). Ahora, de (4.2.11) y (4.2.13), se sigue que:

$$a(n)y(n) + \frac{1}{y(n-1)} = c(n)z(n) + \frac{1}{z(n-1)}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Para  $n = 1$ :

$$a(1)y(1) + \frac{1}{y(0)} = c(1)z(1) + \frac{1}{z(0)}. \quad (4.2.14)$$

Como  $y(0) \geq z(0)$ , se tiene que  $\frac{1}{y(0)} \leq \frac{1}{z(0)}$ . Por (4.2.14), se deduce que  $a(1)y(1) \geq c(1)z(1)$ . En consecuencia:

$$y(1) \geq \frac{c(1)}{a(1)} z(1) \geq z(1) > 1.$$

De forma inductiva, obtenemos  $y(n) \geq z(n) > 1$ . ■

**Teorema 4.2.7.** Consideremos la ecuación en diferencias (4.2.2). Si existen  $\epsilon > 0$  y  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $b(n)b(n+1) \leq (4 - \epsilon)p^2(n)$ , para cada  $n \geq N$ , entonces toda solución de (4.2.2) oscila.

*Demostración.* Supongamos que existen  $\epsilon > 0$  y  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $b(n)b(n+1) \leq (4-\epsilon)p^2(n)$ , para cada  $n \geq N$ . Se tienen los casos siguientes:

- Caso 1:  $\epsilon \geq 4$ . Esto es,  $4 - \epsilon \leq 0$ . Esto implica que  $b(n)b(n+1) \leq 0$ . Por el Lema 4.2.4, se sigue que toda solución de (4.2.2) oscila.
- Caso 2:  $\epsilon < 4$ . Supongamos, por contradicción que (4.2.2) tiene una solución que no es oscilatoria. De aquí, por el Lema 4.2.5, la ecuación (4.2.11) tiene una solución  $z$  que cumple que existe  $N \in \mathbb{N}$ , tal que  $z(n) > 0$ , para cada  $n \geq N$ . Debido a que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $b(n)b(n+1) \leq (4-\epsilon)p^2(n)$ , para cada  $n \geq N$ , de la ecuación (4.2.12), obtenemos:

$$c(n) = \frac{p^2(n)}{b(n)b(n+1)} \geq \frac{p^2(n)}{(4-\epsilon)p^2(n)} = \frac{1}{4-\epsilon}.$$

Luego, del Lema 4.2.6, se tiene que la ecuación:

$$\frac{1}{4-\epsilon}y(n) + \frac{1}{y(n-1)} = 1, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+ \quad (4.2.15)$$

tiene una solución  $y$ , tal que  $y(n) \geq z(n) > 1$ , para cada  $n \geq N$ . Definimos una sucesión positiva  $x$  inductivamente como sigue:  $x(N) = 1$ ,  $x(n+1) = \left(\frac{1}{\sqrt{4-\epsilon}}\right)y(n)x(n)$ , para cada  $n \geq N$ . Lo que quiere decir que:

$$y(n) = \sqrt{4-\epsilon} \left( \frac{x(n+1)}{x(n)} \right), \quad \text{para cada } n \geq N. \quad (4.2.16)$$

Sustituyendo (4.2.16) en (4.2.15), se sigue que:

$$x(n+1) - \sqrt{4-\epsilon}x(n) + x(n-1) = 0, \quad \text{para cada } n \geq N.$$

Calculando las raíces características de la ecuación anterior, obtenemos  $\lambda_{1,2} = \frac{\sqrt{4-\epsilon}}{2} \pm i\frac{\sqrt{\epsilon}}{2}$ . Debido a que  $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ , por el Teorema 4.1.13, todas sus soluciones oscilan, lo que es una contradicción.

Así, el teorema ha sido probado. ■

**Ejemplo 4.2.8.** Sea  $y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ . Consideremos la siguiente ecuación en diferencias:

$$y(n+1) - y(n-1) = \left(2 + \frac{1}{2}(-1)^n\right)y(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \quad (4.2.17)$$

Comparando esta ecuación con (4.2.2), se sigue que  $p(n) = p(n-1) = 1$  y  $b(n) = 2 + \frac{1}{2}(-1)^n$ . Esto implica que:

$$b(n)b(n+1) = \left(2 + \frac{1}{2}(-1)^n\right) \left(2 + \frac{1}{2}(-1)^{n+1}\right)$$



$$\begin{aligned}
 &= \left(2 + \frac{1}{2}(-1)^n\right) \left(2 - \frac{1}{2}(-1)^n\right) \\
 &= 2^2 - \left(\frac{1}{2}(-1)^n\right)^2 \\
 &= 4 - \frac{1}{4},
 \end{aligned}$$

de aquí, existe  $\epsilon = \frac{1}{4}$ , tal que  $b(n)b(n+1) \leq (4 - \epsilon)p^2(n)$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Así, por el Teorema 4.2.7, se tiene que cada solución de la ecuación en diferencias (4.2.17) es oscilatoria.

**Ejemplo 4.2.9.** Sea  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ . Consideremos la siguiente ecuación en diferencias:

$$x(n+1) + x(n) = b(n)x(n-1), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \quad (4.2.18)$$

donde:

$$b(n) = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}. \quad (4.2.19)$$

Lo que quiere decir que:

$$\begin{aligned}
 b(n)b(n+1) &= \left(\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}\right) \left(\frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right) \\
 &= \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)} + \sqrt{(n-1)(n+2)} + \sqrt{n(n+1)} + \sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{n(n+1)}}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b(n)b(n+1) = 4,$$

luego, si tomamos  $\epsilon_n = 4 - b(n)b(n+1)$ , se sigue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ . Sin embargo, el Teorema 4.2.7 falla, debido a que la solución  $x(n) = \sqrt{n}$ , con  $n \geq 1$  no oscila.

El teorema que se proporciona a continuación, es considerado como un recíproco parcial del Teorema 4.2.7.

**Teorema 4.2.10.** Consideremos la ecuación en diferencias (4.2.2). Si existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $b(n)b(n+1) \geq 4p^2(n)$ , para cada  $n \geq N$ , entonces cada solución de (4.2.2) no es oscilatoria.

*Demostración.* Supongamos que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $b(n)b(n+1) \geq 4p^2(n)$ , para cada  $n \geq N$ . De la ecuación (4.2.12), se infiere que  $c(n) \leq \frac{1}{4}$ . Luego, construimos inductivamente una solución  $z$  de (4.2.11) como sigue: Pongamos  $x(N) = 2$  y  $z(n) = \frac{1}{c(n)} \left(1 - \frac{1}{z(n-1)}\right)$ , para cada  $n \geq N$ . Lo que quiere decir que:

$$z(N+1) = \frac{1}{c(N+1)} \left(1 - \frac{1}{z(N)}\right) \geq 4 \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2.$$

De forma similar, se muestra que  $z(n) \geq 2$ , para cada  $n \geq N$ . De aquí, por el Lema 4.2.5, todas las soluciones de (4.2.2) no oscilan. ■

**Ejemplo 4.2.11.** Sea  $x \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ . Consideremos la ecuación en diferencias siguiente:

$$\Delta(n\Delta x(n-1)) - \frac{1}{n}x(n) = 0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \quad (4.2.20)$$

Comparando la ecuación (4.2.20) con (4.2.1), obtenemos  $p(n-1) = n$ , es decir,  $p(n) = n+1$  y  $q(n) = -\frac{1}{n}$ . De la ecuación (4.2.3), se sigue que:

$$b(n) = n + (n+1) + \frac{1}{n} = 2n + 1 + \frac{1}{n}.$$

Lo que quiere decir que:

$$\begin{aligned} b(n)b(n+1) &= \left(2n + 1 + \frac{1}{n}\right) \left(2(n+1) + 1 + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \left(2n + 1 + \frac{1}{n}\right) \left(2n + 3 + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 4n^2 + 8n + 7 + \frac{2n+4}{n(n+1)} \\ &\geq 4n^2 + 8n + 4 \\ &= 4(n^2 + 2n + 1) \\ &= 4(n+1)^2 \\ &= 4p^2(n), \quad \text{para cada } n \geq 1. \end{aligned}$$

Así, por el Teorema 4.2.10, todas las soluciones de (4.2.20) no son oscilatorias.

### Segunda transformación de Riccati

En la ecuación (4.2.2), sea:

$$z(n) = \frac{x(n+1)}{x(n)}. \quad (4.2.21)$$

Veamos que  $z$  satisface la ecuación:

$$p(n)z(n) + \frac{p(n-1)}{z(n-1)} = b(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+. \quad (4.2.22)$$

De la ecuación (4.2.21), se tiene que  $x(n+1) = z(n)x(n)$ . Adicionalmente, obtenemos  $x(n) = z(n-1)x(n-1)$ . Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (4.2.2):

$$p(n)(z(n)x(n)) + p(n-1)x(n-1) = b(n)x(n).$$

Dividiendo la ecuación anterior por  $x(n)$ :

$$p(n)z(n) + \frac{p(n-1)x(n-1)}{x(n)} = b(n).$$

Como  $\frac{x(n-1)}{x(n)} = \frac{1}{z(n-1)}$ , se sigue que  $p(n)z(n) + \frac{p(n-1)}{z(n-1)} = b(n)$ . Esto demuestra la ecuación (4.2.22).

**Proposición 4.2.12.** Sea  $p \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  tal que  $p(n) > 0$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Se tiene que toda solución de (4.2.2) no es oscilatoria si y sólo si (4.2.22) tiene una solución que cumple que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $z(n) > 0$ , para cada  $n \geq N$ .

*Demostración.* Supongamos que  $x$  es una solución no oscilatoria de (4.2.2). Es decir, existe  $N \in \mathbb{N}$ , tal que  $x(n) > 0$  o  $x(n) < 0$ , para cada  $n \geq N$ . Sin pérdida de generalidad, asumimos que  $x(n) > 0$ , para cada  $n \geq N$ . Se sigue que  $z(n) = \frac{x(n+1)}{x(n)} > 0$ , para cada  $n \geq N$ . Además, sustituyendo en la ecuación (4.2.22), se tiene que  $z(n) > 0$ , para cada  $n \geq N$ . Por lo tanto, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $z(n) > 0$ , para cada  $n \geq N$ .

Recíprocamente, supongamos que  $z$  es una solución de (4.2.22) tal que existe  $N \in \mathbb{N}$  con  $z(n) > 0$ , para cada  $n \geq N$ . Necesitamos probar que existe una solución no oscilatoria  $x$  de (4.2.2). Consideremos la construcción de la siguiente solución  $x$ : pongamos  $x(N) = 1$ . Luego, para cada  $n \geq N$ , definimos recursivamente:  $x(n+1) = z(n)x(n)$ . Como  $z(n) > 0$ , para cada  $n \geq N$ , se sigue que  $x(n) > 0$ , para cada  $n \geq N$ , es decir, la solución  $x(n)$  es positiva para  $n \geq N$ , lo que significa que no es oscilatoria. Además, esta función construida satisface la ecuación (4.2.2). Por lo tanto,  $x$  satisface la ecuación (4.2.2) y es no oscilatoria, ya que  $x(n) > 0$ , para cada  $n \geq N$ . ■

**Proposición 4.2.13.** Si  $b(n) \leq p(n-1)$  y  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{p(n-1)} > \frac{1}{2}$ , entonces toda solución de (4.2.2) oscila.

*Demostración.* Supongamos que  $b(n) \leq p(n-1)$  y  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{p(n-1)} > \frac{1}{2}$ . Por contradicción, supongamos que existe una solución  $x$  de (4.2.2) que no es oscilatoria. Por definición, esto implica que  $x$  es eventualmente positiva o eventualmente negativa. Sin pérdida de generalidad, asumimos que  $x(n) > 0$ , para cada  $n \geq N$  con algún  $N \in \mathbb{N}$ . Por la definición de  $z(n)$  en (4.2.21), se sigue que  $z(n) > 0$ , para cada  $n \geq N$ .

Utilizando la ecuación (4.2.22) y dado que  $b(n) \leq p(n-1)$ , se sigue que:

$$\begin{aligned} p(n)z(n) + \frac{p(n-1)}{z(n-1)} &\leq p(n-1) \\ p(n)z(n) &\leq p(n-1) - \frac{p(n-1)}{z(n-1)} \\ &= p(n-1) \left( 1 - \frac{1}{z(n-1)} \right). \end{aligned}$$

Lo que quiere decir que:

$$z(n) \leq \frac{p(n-1)}{p(n)} \left( 1 - \frac{1}{z(n-1)} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \limsup_{n \rightarrow \infty} z(n) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n-1)}{p(n)} \left( 1 - \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{z(n-1)} \right) \right) \\
 &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n-1)}{p(n)} \left( 1 - \frac{1}{\liminf_{n \rightarrow \infty} z(n-1)} \right) \\
 &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n-1)}{p(n)} \left( 1 - \frac{1}{\liminf_{n \rightarrow \infty} z(n-1)} \right). \tag{4.2.23}
 \end{aligned}$$

Debido a que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{p(n-1)} > \frac{1}{2}$ , se sigue que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n-1)}{p(n)} < 2$ . De aquí, por (4.2.23):

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} z(n) < 2 \left( 1 - \frac{1}{\liminf_{n \rightarrow \infty} z(n-1)} \right).$$

Lo que quiere decir que:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} z(n) - 2 < -\frac{2}{\liminf_{n \rightarrow \infty} z(n-1)}.$$

Luego,  $2 - \limsup_{n \rightarrow \infty} z(n) > \frac{2}{\liminf_{n \rightarrow \infty} z(n-1)} \geq \frac{2}{\limsup_{n \rightarrow \infty} z(n-1)}$ . Esto es,  $2 - \limsup_{n \rightarrow \infty} z(n) > \frac{2}{\limsup_{n \rightarrow \infty} z(n-1)}$ . Así:

$$\begin{aligned}
 2 - \limsup_{n \rightarrow \infty} z(n) &> \frac{2}{\limsup_{n \rightarrow \infty} z(n)} \\
 2 \limsup_{n \rightarrow \infty} z(n) - (\limsup_{n \rightarrow \infty} z(n))^2 &> 2 \\
 (\limsup_{n \rightarrow \infty} z(n))^2 - 2 \limsup_{n \rightarrow \infty} z(n) + 2 &< 0.
 \end{aligned}$$

Esto implica que  $(\limsup_{n \rightarrow \infty} z(n) - 2 \limsup_{n \rightarrow \infty} z(n) + 1)^2 < 0$ . En consecuencia,  $(\limsup_{n \rightarrow \infty} z(n) - 1)^2 < 0$ , lo que es una contradicción. Por lo tanto, toda solución de (4.2.2) debe oscilar. ■

### 4.3. Ecuaciones en diferencias no lineales

Sean  $x, p \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  y  $k \in \mathbb{N}$ . Consideremos la siguiente ecuación en diferencias no lineal:

$$x(n+1) - x(n) + p(n)f(x(n-k)) = 0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+, \tag{4.3.1}$$

donde  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función no lineal.

**Teorema 4.3.1.** Sea  $p = \liminf_{n \rightarrow \infty} p(n) > 0$ . Si  $f$  es continua en  $\mathbb{R}$  y son válidas las siguientes afirmaciones:

- (a) Si  $x \neq 0$ , entonces  $xf(x) > 0$ ; y  $f(x) = 0$ , si  $x = 0$ ;
- (b)  $\liminf_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = L$ ,  $0 < L < \infty$ ;
- (c) Si  $k \geq 1$ , entonces  $pL > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$ ; y si  $k = 0$ , entonces  $pL > 1$ ;

entonces todas las soluciones de (4.3.1) oscilan.

*Demostración.* Supongamos que  $f$  es continua en  $\mathbb{R}$  y que se cumplen los incisos (a), (b) y (c). Por contradicción, supongamos que existe una solución  $x$  de (4.3.1) tal que no oscila. Sin pérdida de generalidad, supongamos que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $x(n) > 0$ , para cada  $n \geq N$ . Luego, por el inciso (a), se sigue que  $f(x(n)) > 0$ , para cada  $n \geq N$ . En consecuencia, de la ecuación (4.3.1),  $x(n+1) - x(n) = -p(n)f(x(n-k)) < 0$ , para cada  $n \geq N$ . Esto implica que  $x(n+1) < x(n)$ , es decir,  $x$  es decreciente. Así,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = c \geq 0$ .

Tomando el límite en ambos lados de la ecuación (4.3.1), se tiene que  $f(c) = 0$  y por (a),  $c = 0$ . Lo que quiere decir que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = 0$ . Dividiendo (4.3.1) por  $x(n)$ :

$$\frac{x(n+1)}{x(n)} - 1 + \frac{p(n)f(x(n-k))}{x(n)} = 0, \quad \text{para cada } n \geq N. \quad (4.3.2)$$

Pongamos  $z(n) = \frac{x(n)}{x(n+1)}$ . Notemos que  $z(n) < 1$ , para cada  $n \geq N$ . Sustituyendo  $z(n)$  en (4.3.2):

$$\frac{1}{z(n)} = 1 - p(n)z(n-1) \cdots z(n-k) \frac{f(x(n-k))}{x(n-k)}. \quad (4.3.3)$$

Definimos  $\lim_{n \rightarrow \infty} z(n) = r$ . Luego, tomando el límite superior en ambos lados de (4.3.3), se tiene que  $\frac{1}{r} \leq 1 - pLr^k$ , o bien:

$$pL \leq \frac{r-1}{r^{k+1}}. \quad (4.3.4)$$

Pongamos  $h(n) = \frac{r-1}{r^{k+1}}$ . Es sencillo verificar que la función  $h$  alcanza su máximo en  $r = \frac{k+1}{k}$ , por lo que su valor máximo es  $\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$ . Así, de la desigualdad (4.3.4),  $pL \leq \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$ , lo que contradice el inciso (c). Por lo tanto todas las soluciones de (4.3.1) oscilan. ■

**Observación 4.3.2.** Si  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ , entonces la ecuación linealizada asociada a (4.3.1), donde  $p(n) = p \in \mathbb{R}$ , es de la forma siguiente:

$$y(n+1) - y(n) + py(n-k) = 0. \quad (4.3.5)$$

Notemos que esta ecuación ya se ha estudiado en la Sección 4.1. Así, podemos reformular el Teorema 4.3.1 de la siguiente forma: *Supongamos que (a) y (b) se cumplen con  $L = 1$  y que  $p(n) = p$  es constante. Si cada solución de (4.3.5) oscila, también lo hace cada solución de (4.3.1).*

## 4.4. Aplicación

### 4.4.1. Ecuación logística de Pielou con retraso

Nuevamente analizamos la ecuación logística de Pielou con retraso, como en la Sección 2.7, suponiendo ahora que existe un retraso en el tiempo de un período  $k \in \mathbb{N}$  en la respuesta de la tasa de crecimiento por individuo al cambio de densidad, la ecuación en diferencias con retraso:

$$y(n+1) = \frac{\alpha y(n)}{1 + \beta y(n-k)}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{con } \alpha > 1, \beta > 0. \quad (4.4.1)$$

Veamos que si  $\frac{\alpha-1}{\alpha} > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$ , entonces cada solución positiva de (4.4.1) oscila alrededor del punto de equilibrio positivo  $y^* = \frac{\alpha-1}{\beta}$ . Podemos seguir el segundo método de la Subsección 2.7.1. Para esto, pongamos  $y(n) = \frac{\alpha-1}{\beta \exp(x(n))}$  en (4.4.1), con lo que obtenemos:

$$x(n+1) - x(n) + \frac{\alpha-1}{\alpha} f(x(n-k)) = 0, \quad (4.4.2)$$

donde  $f(x) = \frac{\alpha}{\alpha-1} \ln \left( \frac{(\alpha-1) \exp(x)+1}{\alpha} \right)$ .

Veamos que la función  $f$  satisface las condiciones (a) y (b) del Teorema 4.3.1 con  $L = 1$ .

(a) La expresión dentro del logaritmo,  $\frac{(\alpha-1) \exp(x)+1}{\alpha}$ , es siempre positiva para  $x \neq 0$  dado que  $\alpha > 1$ . Analicemos  $xf(x) = x \frac{\alpha}{\alpha-1} \ln \left( \frac{(\alpha-1) \exp(x)+1}{\alpha} \right)$ , según los casos siguientes:

- Caso 1:  $x > 0$ : Se sigue que  $\frac{(\alpha-1) \exp(x)+1}{\alpha} > 1$ , con lo que el logaritmo es positivo. Lo que quiere decir que  $xf(x) > 0$ .
- Caso 2:  $x < 0$ : De aquí,  $\frac{(\alpha-1) \exp(x)+1}{\alpha} < 1$ . En consecuencia, el logaritmo es negativo. Esto implica que  $xf(x) > 0$ .
- Caso 3:  $x = 0$ . En este caso:

$$f(0) = \frac{\alpha}{\alpha-1} \ln \left( \frac{(\alpha-1) \cdot 1 + 1}{\alpha} \right) = \frac{\alpha}{\alpha-1} \ln 1 = 0.$$

Por lo tanto, de los Casos 1, 2 y 3, se cumple la condición (a).

(b) Analicemos  $\frac{f(x)}{x}$ . Se tiene que:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{\alpha}{\alpha-1} \ln \left( \frac{(\alpha-1) \exp(x)+1}{\alpha} \right)}{x}. \quad (4.4.3)$$

Podemos utilizar la aproximación de Taylor para  $\exp(x) \approx 1 + x$  en la expresión dentro del logaritmo en la ecuación (4.4.3):

$$\frac{(\alpha - 1) \exp(x) + 1}{\alpha} \approx \frac{(\alpha - 1)(1 + x) + 1}{\alpha} = \frac{\alpha - 1 + (\alpha - 1)x + 1}{\alpha} = 1 + \frac{(\alpha - 1)x}{\alpha}.$$

Lo que quiere decir que:

$$\frac{f(x)}{x} \approx \frac{\frac{\alpha}{\alpha-1} \ln \left( 1 + \frac{(\alpha-1)x}{\alpha} \right)}{x}.$$

Luego, podemos utilizar la expansión de Taylor, ahora para  $\ln 1 + u \approx u$ . Con esto:

$$\frac{f(x)}{x} \approx \frac{\frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{(\alpha-1)x}{\alpha}}{x}.$$

Esto implica que:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &\approx \frac{x}{x} \\ \liminf_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= 1. \end{aligned}$$

En consecuencia,  $L = 1$ , con  $0 < L < \infty$ . De aquí, el inciso (b) se cumple.

Por lo tanto, según el Teorema 4.3.1, cada solución de (4.4.2) oscila alrededor de 0. Así, toda solución de (4.4.1) oscila alrededor del punto de equilibrio  $y^* = \frac{\alpha-1}{\beta}$ . Esto significa que la población nunca se estabiliza exactamente en  $y^*$ , sino que fluctúa periódicamente alrededor de este valor, a diferencia del modelo logístico clásico, en el que la población tiende a estabilizarse en el punto de equilibrio  $y^*$ . Sin embargo, con el retraso incorporado en la ecuación, se introduce una desincronización entre el crecimiento de la población y la capacidad de carga del medio ambiente, esto se puede interpretar como que existen situaciones en las que los recursos tardan en reponerse o la población tarda en ajustarse a ciertos cambios, lo que impide que el sistema alcance un estado estacionario exacto.





---

## CONCLUSIONES

Los sistemas dinámicos discretos son necesarios para analizar y estudiar gran cantidad de fenómenos que ocurren en diversas áreas, en particular en esta tesis se analizaron modelos matemáticos en Economía, Ingeniería y Biología. El comportamiento de estos problemas requieren ser interpretados y analizados de forma clara y concisa, de acuerdo a las características de cada problemática; todo esto realizando énfasis en estudiar su evolución a lo largo del tiempo.

En esta tesis, nos enfocamos en el análisis de estabilidad de los sistemas dinámicos discretos, estudiando resultados útiles para determinar el comportamiento de las soluciones; se hizo un extenso estudio de la transformada  $\mathcal{Z}$  y de su inversa; se examinaron las ecuaciones en diferencias de Volterra en algunos casos específicos y se analizan resultados de la teoría de oscilación. Adicionalmente, proporcionamos algunas nociones previas que fueron necesarias para el entendimiento adecuado del resto de la tesis.

En el primer capítulo, se presentaron los preliminares necesarios para comprender las herramientas y conceptos empleados a lo largo del trabajo, estableciendo una base sólida para los análisis posteriores.

Respecto al análisis de estabilidad de sistemas dinámicos discretos  $k$ -dimensionales, de los resultados más sobresalientes que revisamos fueron el Teorema de Estabilidad de Liapunov y el Principio de Invarianza de LaSalle. También estudiamos los diagramas del espacio fase, los cuales son muy útiles para determinar de forma gráfica la estabilidad de un punto de equilibrio.

La transformada  $\mathcal{Z}$  fue explorada como una herramienta clave para resolver ecuaciones en diferencias. Además, demostramos y ejemplificamos cada una de sus propiedades. Adicionalmente, estudiamos métodos para poder obtener la inversa de la transformada  $\mathcal{Z}$ , realizando un concentrado de las transformadas  $\mathcal{Z}$  y sus inversas en una tabla. También, analizamos las ecuaciones en diferencias de Volterra, un tipo particular de ecuaciones que modelan procesos con memoria, lo que permite describir sistemas donde el estado futuro depende no solo del presente, sino de la evolución pasada.

En cuanto al análisis de la teoría de oscilación, se tuvieron como principal objetivo las ecuaciones en diferencias de tres términos, las ecuaciones en diferencias autoadjuntas y las ecuaciones en diferencias no lineales.

Adicionalmente, se proporcionaron modelos de Economía, Ingeniería y Biología para estudiar las aplicaciones que pueden tener los distintos tipos de sistemas de ecuaciones en diferencias, analizando su estabilidad o si sus soluciones son oscilatorias, según sea el caso.

---

## REFERENCIAS

- [1] D. Arrowsmith y C. Place (1990). *An Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press.
- [2] D. Aubin y A. Damedico (2002). *Writing the history of dynamical systems and chaos: longue durée and revolution, disciplines and cultures*. *Historia mathematica*, vol. 29.
- [3] A. Bartlett (1976). *The Exponential Funcion*. The Physics Teacher.
- [4] J. Beddington, C. Free y J. Lawton (1976). *Dynamic Complexity in Prey-Predator Models Framed in Difference Equations*. *Nature*. Vol. 255.
- [5] A. Brauer (1947). *Limits of the Characteristic Roots of a Matrix*. *Duke Math*.
- [6] M. Brin y G. Stuck (2002). *Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press.
- [7] J. Conway (2012). *Functions of One Complex Variable*. Springer Science & Business Media.
- [8] M. Crisci, V. Kolmanovskii, E. Russo y A. Vecchio (1998). *Stability of Difference Volterra Equations: Direct Liapunov Method and Numerical Procedure*. *Computers & Mathematics with Applications*.
- [9] J. Cushing (2003). *Chaos in Ecology: Experimental Nonlinear Dynamics*. Elsevier. Vol. 1.
- [10] A. Daci y S. Tola (2019). *Discrete Dynamical Systems, Exponential Growth*. *Book of Preceedings*. Vo. 45.
- [11] S. Elaydi (2005). *An Introduction to Difference Equations*. Springer.
- [12] G. Gilbert (1991). *Positive Definite Matrices and Sylvester's Criterion*. *The American Mathematical Monthly*.

- 
- [13] P. Hartman (1978). *Difference Equations: Disconjugacy, Principal Solutions, Green's Functions, Complete Monocity*. Transitions of the American Mathematical Society. Vol. 246.
- [14] S. Kumaresan (2004). *Sylvester Criterion for Positive Definiteness*. University of Hyderabad, Department of Mathematics and Statistics.
- [15] R. Horn y C. Johnson (2012). *Matrix Analysis*. University Cambridge Press.
- [16] A. Nicholson (1954). *An Outline of the Dynamics of Animal Populations*. Australian Journal Of Biology.
- [17] Ö. Orhan (2022). *Basic Transforms for Elecrical Engineering*. Springer. Págs. 459-587.
- [18] M. Palacios (2010). *Formas bilineales y cuadráticas*. Universidad de Zaragoza.
- [19] R. G. Palacios (2023). *Ecuaciones en diferencias con aplicaciones en Economía* [tesis de licenciatura]. Repositorio de la Universidad Tecnológica de la Mixteca.
- [20] Z. Pang y Y. Zhang (2021). *Matrix Analysis with a Focus on Inequalities*. University of Chicago.
- [21] A. Permatasari, E. Carnia y A. Supriatna (2023). *Category of Discrete Dynamical Systems*. CAUCHY: Journal Matematika Murni dan Aplikasi. Vol. 8.
- [22] T. Puu y I. Sushko (2004). *A Business Cycle Model with Cubic Nonlinearity*. Chaos, Solitons & Fractals.
- [23] A. Sharkovsky, Y. Maistrenko y E. Romanenco (2012). *Difference Equations and their Applications*. Springer.
- [24] M. Sadiku, H. Warsame y S. Musa (2024). *Signals and Systems: A Primer with MATLAB*. CRC Press. Págs 337-373.
- [25] S. Schreiber (2006). *Host-Parasitoid Dynamics in a Generalized Thompson Model*. Journal of Mathematical Biology. Vol. 52.
- [26] H. Sedaghat (1997). *The Impossibility of Unstable, Globally Attracting Fixed Points for Continuous Mappings of the Line*. The American Mathematical Monthly, 104:356-358.
- [27] D. Sundararajan (2009). *A practical approach of signals and systems*. John Wiley & Sons. Págs. 287-325.
- [28] S. Wolfram (2002). *A new kind of science*. Champaign: Wolfram media. Vol. 5.
- [29] Host-Parasitoid Models. <https://www.colorado.edu/project/mathbio/2018/05/02/host-parasitoid-models>. Consultado: 2024-01-10.
-