

# Capítulo 5

## Solucionadores Aproximados de Riemann HLL

Mario Arciga Alejandre<sup>1</sup>

---

**Abstract:** In this chapter we present in a systematic way the basic ideas that are behind the approximate Riemann solvers, which are used commonly in the Godunov type numeric schemes to solve strict hyperbolic systems of partial differential equations. It shows an applied example in the gas dynamic context, we also compared the results with the exact version, but computationally more expensive.

**Keywords:** Riemann Problem, HLL Method, Euler Equations.

**Resumen:** En este capítulo presentamos, de una manera sistemática, las ideas básicas que hay detrás de los solucionadores (solvers) aproximados de Riemann, los cuales se utilizan comúnmente en los esquemas numéricos de tipo Godunov para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales parciales de tipo hiperbólico estricto. Mostramos además un ejemplo de su aplicación a la dinámica de gases y, comparamos tomando como referencia la versión exacta, pero más costosa, del solucionador.

### 5.1 Introducción

Para obtener leyes que modelen el comportamiento y las propiedades de un gas, se parte, como en la mayoría de las leyes físicas, de Leyes Fundamentales de Conservación. En la dinámica de gases tal modelo básico se le conoce como las Ecuaciones de Euler, las cuales se deducen de las leyes de conservación de la *masa*, *cantidad de movimiento* y *energía*, de modo que las variables primitivas de tales ecuaciones son la densidad  $\rho$ , el momento lineal<sup>2</sup>  $(\rho u, \rho v)$  y la energía total  $E$ . Para esta última consideraremos únicamente las energías cinética  $\frac{1}{2}(u^2 + v^2)$  e interna  $e$ . Es de esperar que la energía interna  $e$  dependa del tipo de gas de interés. A las relaciones que definen la forma y de quién dependa la variable  $e$ , se les conoce como *ecuaciones de estado*, las cuales típicamente se obtienen

---

<sup>1</sup>arciga@gmail.com. Universidad del ISTMO

<sup>2</sup> $u$  y  $v$  son las componentes en  $x$  e  $y$  respectivamente, consideramos el problema en dos dimensiones espaciales.

de manera experimental. Para este trabajo consideraremos un gas ideal, cuya ecuación de estado es:

$$e = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}. \quad (5.1.1)$$

A la constante  $\gamma$  se le conoce como *tasa de calor específico* y su valor depende del gas en cuestión,  $p$  es la presión. En dos dimensiones espaciales las ecuaciones de Euler son las siguientes:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) + \partial_y(\rho v) &= 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) + \partial_y(\rho uv) &= 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho uv) + \partial_y(\rho v^2 + p) &= 0, \\ \partial_t E + \partial_x(u(E + p)) + \partial_y(v(E + p)) &= 0, \\ E = \rho\left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2 + e\right), \quad e = \frac{p}{(\gamma-1)\rho}. \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

donde  $t > 0$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ .

La primera se obtiene de la conservación de la masa, las dos siguientes de la conservación del momento lineal en las componentes  $x$  e  $y$  respectivamente, la cuarta de la conservación de la energía y las dos últimas nos dicen el tipo de energía que se considera (cinética e interna) y la ecuación de estado, respectivamente.

Las Ecuaciones de Euler (5.1.2) forman un sistema de ecuaciones diferenciales parciales acopladas no lineales, como es usual, al sistema lo acompañan respectivas condiciones iniciales. Debido a que el sistema resulta ser de carácter hiperbólico estricto, la “información” viaja a velocidad finita (el dominio de incidencia es un cono). Para geometrías poligonales en el plano que no sean tan “simples”, no existe una solución algebraica cerrada sencilla, lo mejor que podemos hacer es utilizar métodos numéricos para dar soluciones aproximadas, es justo lo que haremos, primero debemos analizar la ecuación y tratar de tomar ventaja de sus propiedades.

Existen varios métodos numéricos que se han propuesto para obtener soluciones a la Ecuación de Euler, algunos de estos son el Método Clásico de Godunov (ver [12]), el esquema de CIR (ver [10]), el esquema Random Choice (ver [7]), la técnica Flux-Vector Splitting (ver [11],[8] y [3]). Para los que utilizan aproximaciones del problema de Riemann podemos mencionar los métodos de Osher en [13], HLL/HLLC (ver [1] y [4]), Roe (ver [9]). En particular, para el tipo de problema que estamos planteando, podemos clasificar los métodos en *conservativos* y los que no lo son.

En la Sección 5.2 describimos los métodos conservativos, en particular los de tipo Godunov, veremos además cómo podemos aprovechar la simetría de las ecuaciones para implementar una técnica conocida como “dimensional splitting”, la cual esencialmente, reduce nuestro problema de dos dimensiones a una sucesión de problemas en una dimensión. En la Sección 5.3 trataremos de la solución exacta y aproximada al problema de Riemann, problema que aparece de manera natural al adaptar el esquema conservativo a nuestro sistema. En las Secciones 5.4 y 5.5, mostramos una aplicación y compararemos el método propuesto con la versión exacta del problema de Riemann.

## 5.2 El método de Godunov

Conviene escribir el sistema (5.1.2) en su forma vectorial:

$$\partial_t U + \partial_x F(U) + \partial_y G(U) = 0, \quad (5.2.1)$$

donde

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}, \quad F(U) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E + p) \end{bmatrix}, \quad G(U) = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{bmatrix}.$$

Las funciones  $F$  y  $G$  son llamados flujos físicos, cada componente  $\rho$ ,  $\rho u$ ,  $\rho v$  y  $E$  depende de las variables  $x, y$  y  $t$ . Notemos lo parecido de los términos en  $F(U)$  y  $G(U)$ .

### 5.2.1 Reducción a una dimensión

Aplicando la forma más simple de la técnica de Dimensional Splitting (ver [6]), donde suponemos que se tiene la solución exacta  $U^n$  a un determinado tiempo  $t_n$  y se desea obtener la solución  $U^{n+1}$  a un tiempo posterior  $t_{n+1}$ , obtenemos lo siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} PDE : \quad \partial_t U + \partial_x F(U) + \partial_y G(U) = 0, \\ IC : \quad U(x, y, 0) = U^n. \end{array} \right\} \begin{array}{l} PDE : \quad \partial_t U + \partial_x F(U) = 0, \\ IC : \quad U(x, y, 0) = U^n. \end{array} \Bigg\} \implies U^{n+\frac{1}{2}} \quad (5.2.2)$$

$$\left. \begin{array}{l} PDE : \quad \partial_t U + \partial_y G(U) = 0, \\ IC : \quad U(x, y, 0) = U^{n+\frac{1}{2}}. \end{array} \right\} \implies U^{n+1} \quad (5.2.3)$$

El procedimiento anterior es exacto para sistemas lineales (ver [6]), resulta en una aproximación de orden 1 para sistemas no lineales como es nuestro caso. Notemos que, utilizando dimensional splitting, debemos preocuparnos de resolver únicamente el problema en una dimensión. Dada la simetría de los términos en los flujos físicos  $F$  y  $G$ , la implementación computacional de la rutina que maneje la aproximación a  $F$  en (5.2.2) será la misma para  $G$  en (5.2.3), sólo que con argumentos en distinto orden.

Ahora bien, la forma unidimensional del sistema (5.1.2) es:

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0, \quad (5.2.4)$$

donde

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix}, \quad F(U) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{bmatrix}.$$

No es difícil ver que, explícitamente el flujo  $F$  se escribe:

$$F(U) \equiv F \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ \frac{1}{2}(3-\gamma)\frac{u_2^2}{u_1} + (\gamma-1)u_3 \\ \gamma\frac{u_2}{u_1}u_3 - \frac{1}{2}(\gamma-1)\frac{u_2^2}{u_1^2} \end{bmatrix}.$$

La matriz jacobiana de  $F$  se escribe:

$$A(U) \equiv \partial_U F(U) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma-3)u^2 & (3-\gamma)u & \gamma-1 \\ \frac{1}{2}(\gamma-2)u^3 - \frac{a^2u}{\gamma-1} & \frac{3-2\gamma}{2}u^2 + \frac{a^2}{\gamma-1} & \gamma u \end{bmatrix}, \quad (5.2.5)$$

donde  $a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$  (es siempre positivo y se le conoce como *velocidad del sonido*). Los valores propios de  $A(U)$  son:

$$\lambda_1 = u - a, \quad \lambda_2 = u \quad \text{y} \quad \lambda_3 = u + a, \quad (5.2.6)$$

con respectivos vectores propios:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u - a \\ H - ua \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ \frac{1}{2}u^2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad K_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ u + a \\ H + ua \end{bmatrix}, \quad (5.2.7)$$

donde  $H = (E + p)/\rho$ .

Dado que los anteriores valores propios son todos reales y distintos, en particular los vectores  $K_1, K_2, K_3$ , forman una base para  $\mathbb{R}^3$ , esto nos dice además que nuestro sistema es hiperbólico estricto, notemos que una manera equivalente de escribir (5.2.4) es:

$$\partial_t U + A(U)\partial_x U = 0. \quad (5.2.8)$$

## 5.2.2 Esquema de Godunov

Consideremos ahora una propuesta para discretizar el sistema (5.2.4), partiendo de la forma conservativa de Godunov. Definimos una malla espacial regular  $x_j = x_0 + j\Delta x$  y puntos intermedios  $x_{j+1/2} = x_j + \Delta x/2$ , donde  $\Delta x := x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$  es un valor fijo positivo. No podemos hacer lo mismo para discretizar el tiempo, dado que nuestro sistema es un problema con término advectivo, las velocidades de onda (las cuales tienen que ver directamente con los valores propios (5.2.6) encontrados en la sección anterior) limitan el posible  $\Delta t$  al tiempo  $t_n$ . Obtendremos una sucesión  $\Delta t_0, \Delta t_1, \Delta t_2, \dots$ , hasta alcanzar un  $T$  pre-establecido, tales  $\Delta t_n$  serán limitados por la condición de Courant:

$$\Delta t_n = \frac{C_{CFL} \Delta x}{S_{\text{máx}}^n}, \quad (5.2.9)$$

donde  $S_{\text{máx}}^n$  es la máxima velocidad de onda, mostraremos explícitamente estos valores para el sistema (5.2.4) en la siguiente sección.

Supongamos que tenemos la solución exacta  $\tilde{U}^n(t_n, x)$  al sistema (5.2.4) y que tal solución tiene forma escalonada respecto a nuestra malla, i.e.

$$\tilde{U}^n(t_n, x) := \sum_j U_j^n \chi_{c_j}(x), \quad C_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}], \quad (5.2.10)$$

donde  $\chi_{C_j}$  es la función característica de la celda  $C_j$  y  $U_j^n$  los respectivos valores (en nuestro caso vectores) constantes sobre la celda  $C_j$ . Ahora,  $\tilde{U}^n$  debe satisfacer la forma integral de la ley de conservación

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \tilde{U}(t_{n+1}, x) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \tilde{U}(t_n, x) dx$$

$$\text{Que se puede escribir : } -\frac{1}{\Delta x} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[ F(\tilde{U}(t, x_{j+1/2})) - F(\tilde{U}(t, x_{j-1/2})) \right] dt.$$

Tomando como

$$U_j^{n+1} \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \tilde{U}(t_{n+1}, x) dx,$$

el cual es el valor promedio de  $\tilde{U}^n$  en la celda  $C_j$ , y

$$F_{j+1/2}^n \approx \frac{1}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(\tilde{U}(t, x_{j+1/2})) dt$$

el cual es el promedio temporal del flujo físico  $F$  en el intervalo  $(t_n, t_{n+1})$ , llamado *flujo numérico*. Con esto, la anterior forma integral de la ley de conservación sugiere el siguiente esquema:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t_n}{\Delta x} \left[ F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n \right]. \quad (5.2.11)$$

Las distintas formas de aproximar el término  $F_{j+1/2}^n$  definen distintos esquemas numéricos para el sistema (5.2.4). Al esquema numérico definido por (5.2.11) se le conoce como *esquema de Godunov*, define en realidad una familia de esquemas, ya que cada propuesta válida para aproximar al flujo numérico  $F_{j+1/2}^n$  produce un esquema de tipo Godunov.

Notemos lo siguiente respecto al esquema (5.2.11) y la forma de la solución. La solución escalonada está compuesta de un número finito de discontinuidades simples (de salto). Si hubiera una manera de encontrar la solución exacta o aproximada al sistema original, pero con un salto simple como condición inicial, entonces podríamos dar la solución completa para un tiempo pequeño posterior (restringido por la condición de Courant (5.2.9)), al problema anterior se le conoce como Problema de Riemann, muy importante en la construcción de esquemas numéricos.

**Definición 1** Llamamos *Problema de Riemann (RP)* del sistema (5.2.4), al problema que consiste en resolver (5.2.4) junto con una condición inicial de la forma

$$U(x, y, 0) = \begin{cases} U_L, & \text{si } x < x_0; \\ U_R, & \text{si } x > x_0, \end{cases}$$

donde  $U_L$  y  $U_R$  son vectores constantes llamados, respectivamente, estado a la izquierda y estado a la derecha. Usualmente tomamos  $x_0 = 0$ , dado que define un problema equivalente. Denotamos por  $RP(U_L, U_R; x_0)$  al problema anterior.

Utilizando la estrategia descrita anteriormente, necesitamos conocer la solución al problema de Riemann para la ecuación de Euler en una dimensión.

### 5.3 Estructura de la solución

Consideremos  $RP(U_L, U_R; x_0)$ . Dado que los vectores  $K_j, j = 1, 2, 3$  definidos en (5.2.7) son linealmente independientes, escogemos escalares  $\alpha_j, \beta_j, j = 1, 2, 3$  tales que:

$$\begin{aligned} U_L &= \alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \alpha_3 K_3, \\ U_R &= \beta_1 K_1 + \beta_2 K_2 + \beta_3 K_3. \end{aligned}$$

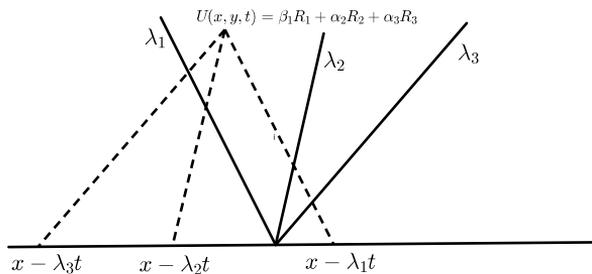
Puesto que, los valores propios (5.2.6) siempre son reales y distintos para cada  $U$ , la matriz jacobiana (5.2.5) se diagonaliza mediante el cambio de variable  $V = R^{-1}U$ , donde  $R = [K_1|K_2|K_3]$ . La nueva ecuación es de la forma:

$$\partial_t V + D(U)\partial_x V = 0, \quad (5.3.1)$$

donde  $D(U) = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ . Supongamos por un momento que  $D(U)$  es constante, esto es, que  $U$  no cambia para un pequeño incremento de tiempo  $\Delta t$ , entonces el sistema (5.3.1) se descompone como 3 ecuaciones lineales de advección (ondas) de la forma  $\partial_t d_i + \lambda_i \partial_x d_i = 0$ , por lo tanto el sistema tendría por solución:

$$U(t, x) = \sum_{p=1}^3 v_p(0, x - \lambda_p t) K_p, \quad v_p(0, x - \lambda_p t) = \begin{cases} \alpha_p, & x - \lambda_p t < 0; \\ \beta_p, & x - \lambda_p t > 0; \end{cases}$$

donde  $v_p$  son las componentes de la variable  $V$ . En tal caso,  $U$  se ve como la superposición de 3 ondas que viajan a distintas velocidades, a saber  $\lambda_i, i = 1, 2, 3$ . La estructura de la solución se describe en la Figura 5.1. Notemos que, a la izquierda de la región determinada por la onda  $\lambda_1$ ; la solución es el estado  $U_L = \sum_{i=1}^3 \alpha_i R_i$ , a la derecha de la determinada por  $\lambda_3$ , es el estado  $U_R = \sum_{i=1}^3 \beta_i R_i$ .



**Figura 5.1:** Estructura de la solución para un problema de Riemann.

Para encontrar la solución al problema de Riemann en el caso no lineal, es necesario utilizar los siguientes resultados conocidos de la teoría de las Ecuaciones de Euler y en general de las leyes de conservación, las pruebas se pueden consultar en [2].

**Teorema 5.3.1 (Condición de Rankini-Hugoniot)** *Para un sistema hiperbólico estricto  $\partial_t U + \partial_x F(U) = 0$ , si una discontinuidad que se propaga a velocidad  $s$  tiene valores*

constantes  $U_L, U_R$  a la izquierda y derecha respectivamente, entonces se debe cumplir:

$$F(U_L) - F(U_R) = s(U_L - U_R).$$

**Teorema 5.3.2 (Invariantes Generalizadas de Riemann)** *Para un sistema hiperbólico estricto  $\partial_t W + \partial_x F(W) = 0$  con  $W = (w_1, \dots, w_m)^T$  y cuya matriz jacobiana  $A(W) = \partial_U F(W)$  tiene vectores propios  $K_i = (k_1^{(i)}, \dots, k_m^{(i)})^T$  con respectivo valor propio  $\lambda_i, i = 1, \dots, m$ . A través de la  $i$ -onda (entre las regiones de la recta determinada por  $\lambda_i$  en la Figura 5.1) se cumplen las siguientes relaciones diferenciales:*

$$k_j^{(i)} dw_{j-1} = k_{j-1}^{(i)} dw_j, \quad j = 2, 3, \dots, m.$$

Veamos cómo aplicar el teorema anterior a nuestro sistema. En nuestro caso tenemos  $W = [\rho, \rho u, E]^T$ , por lo que  $w_1 = \rho, w_2 = \rho u$  y  $w_3 = E$ . Utilizando el vector propio  $K_2 = [1, u, \frac{1}{2}u^2]^T$  (a través de la 2-onda) tenemos que  $k_1^{(2)} = 1, k_2^{(2)} = u$  y  $k_3^{(2)} = \frac{1}{2}u^2$ , entonces tenemos las 3 relaciones:

$$\frac{d\rho}{1} = \frac{d(\rho u)}{u} = \frac{dE}{\frac{1}{2}u^2}. \quad (5.3.2)$$

De la primera igualdad en (5.3.2) se obtiene la relación diferencial  $u d\rho = d(\rho u)$ , después de integrar obtenemos:

$$\rho u = \text{constante}, \quad (5.3.3)$$

lo cual nos dice que el factor  $\rho u$  permanece constante entre las regiones inmediatas que determina la recta definida por  $\lambda_2$  (ver Figura 5.1).

De la segunda igualdad en (5.3.2) se tiene la relación diferencial:

$$d \left[ \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{p}{\gamma - 1} \right] = \frac{1}{2} u^2 d\rho,$$

después de simplificar e integrar obtenemos:

$$\rho u^2 + \frac{1}{\gamma - 1} p = \text{constante}. \quad (5.3.4)$$

Por último, de la igualdad en los extremos de (5.3.2) obtenemos, después de integrar la respectiva forma diferencial, que:

$$\rho u^2 + \frac{2}{\gamma - 1} p = \text{constante}. \quad (5.3.5)$$

De las relaciones (5.3.4) y (5.3.5) se sigue que:

$$p = \text{constante}. \quad (5.3.6)$$

La presión  $p$  debe permanecer constante a través de la 2-onda. Finalmente, de (5.3.6), (5.3.4) y (5.3.3) se concluye que:

$$u = \text{constante}, \quad (5.3.7)$$

también la velocidad  $u$  es invariante a lo largo de la 2-onda. A la región por determinar en el problema de Riemann (el cono determinado por la primer y última onda) se le conoce como región estrella, por ejemplo, una variable entre las regiones  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  se indica con un super-índice  $*$  y sub-índice  $L$ . Así, lo que se obtuvo de las relaciones (5.3.6) y (5.3.7) se escribe como:

$$p^* = p_L^* = p_R^*.$$

y

$$u^* = u_L^* = u_R^*.$$

En las discontinuidades presentes en la solución a un problema de Riemann ocurren 2 tipos de ondas, llamadas *onda de choque* y *onda de rarefacción*. Para una ecuación escalar, la primera sucede cuando las curvas características entre los estados que definen la discontinuidad se cruzan, la segunda cuando tales curvas se separan<sup>3</sup>.

A continuación damos el resumen de la solución exacta al problema de Riemann para el sistema (5.2.4), nos basamos principalmente en la forma presentada en [5].

### 5.3.1 Solución en la región estrella

Para encontrar  $p^*$  resolvemos la siguiente ecuación:

$$f_L(p^*, W_L) + f_R(p^*, W_R) + u_R - u_L = 0,$$

donde

$$f_K(p^*, W_K) := \begin{cases} (p^* - p_K) \left[ \frac{A_K}{p^* + B_K} \right]^{\frac{1}{2}} & p^* > p_K, \quad (\text{Choque}) \\ \frac{2a_K}{\gamma-1} \left[ \left( \frac{p^*}{p_K} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right] & p^* \leq p_K, \quad (\text{Rarefacción}) \end{cases}$$

con  $W_K = (\rho_K, u_K, p_K)$ ,  $A_K = \frac{2}{(\gamma+1)\rho_K}$ ,  $B_K = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}p_K$  y  $a_K = \sqrt{\frac{\gamma p_K}{\rho_K}}$  para  $K \in \{L, R\}$ . La función  $f_K$  está bien definida, tiene una única solución y usualmente se utiliza el método de Newton para aproximar  $p^*$ . El valor inicial para la iteración que empleamos es:

$$p_0 = \max \left\{ tol, \frac{1}{2}(p_L + p_R) - \frac{1}{8}(u_R - u_L)(\rho_L + \rho_R)(a_L + a_R) \right\},$$

donde  $tol = \frac{|p_{i+1} - p_i|}{\frac{1}{2}|p_{i+1} + p_i|}$  es la tolerancia para la convergencia del método iterativo, tal propuesta se obtiene de la solución exacta al momento de linealizar el sistema en las variables primitivas  $\rho$ ,  $u$  y  $p$ .

La velocidad  $u^*$  se obtiene directamente de la fórmula

$$u^* = \frac{1}{2} [u_L + u_R + f_R(p^*) - f_L(p^*)].$$

Los valores siguientes dependen la aparición o no de una onda de choque o rarefacción; en la primera y última onda (1-onda y 3-onda), se dan en cada caso las respectivas

<sup>3</sup>Es fácil ver que las curvas características para una ecuación escalar de la forma  $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ , en realidad son rectas en el plano  $x - t$  de la forma  $x = f'(u_0(\xi))t + \xi$ .

velocidades de onda  $S_L, S_R, S_{HL}$  y  $S_{HR}$ .

Onda de choque en la 1-onda ( $p^* > p_L$ )

$$\rho_L^* = \rho_L \left[ \frac{\frac{p^*}{p_L} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}}{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{p^*}{p_L} + 1} \right], \quad S_L = u_L - a_L \left[ \frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{p^*}{p_L} + \frac{\gamma-1}{2\gamma} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Onda de rarefacción en la 1-onda ( $p^* \leq p_L$ )

$$\rho_L^* = \rho_L \left[ \frac{p^*}{p_L} \right]^{\frac{1}{\gamma}}, \quad S_{HL} = u_L - a_L, \quad S_{TL} = u^* - a_L \left[ \frac{p^*}{p_L} \right]^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}$$

$$W_L^{rare} = \begin{cases} \rho = \rho_L \left[ \frac{2}{\gamma+1} + \frac{\gamma-1}{(\gamma+1)a_L} (u_L - x/t) \right]^{\frac{2}{\gamma-1}}, \\ u = \frac{2}{\gamma+1} \left[ a_L + \frac{\gamma-1}{2} u_L + x/t \right], \\ p = p_L \left[ \frac{2}{\gamma+1} + \frac{\gamma-1}{(\gamma+1)a_L} (u_L - x/t) \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}. \end{cases}$$

Onda de choque en la 3-onda ( $p^* > p_R$ )

$$\rho_R^* = \rho_R \left[ \frac{\frac{p^*}{p_R} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}}{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{p^*}{p_R} + 1} \right], \quad S_R = u_R + a_R \left[ \frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{p^*}{p_R} + \frac{\gamma-1}{2\gamma} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Onda de rarefacción en la 3-onda ( $p^* \leq p_R$ )

$$\rho_R^* = \rho_R \left[ \frac{p^*}{p_R} \right]^{\frac{1}{\gamma}}, \quad S_{HR} = u_R + a_R, \quad S_{TR} = u^* + a_R \left[ \frac{p^*}{p_R} \right]^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}.$$

$$W_R^{rare} = \begin{cases} \rho = \rho_R \left[ \frac{2}{\gamma+1} - \frac{\gamma-1}{(\gamma+1)a_R} (u_R - x/t) \right]^{\frac{2}{\gamma-1}}, \\ u = \frac{2}{\gamma+1} \left[ -a_R + \frac{\gamma-1}{2} u_R + x/t \right], \\ p = p_R \left[ \frac{2}{\gamma+1} - \frac{\gamma-1}{(\gamma+1)a_R} (u_R - x/t) \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}. \end{cases}$$

### 5.3.2 El flujo numérico HLL

La solución descrita en la sección anterior para el problema de Riemann se le conoce como solución exacta, a pesar de utilizar un método iterativo para aproximar a  $p^*$ . Justo esa parte del procedimiento resulta la más costosa computacionalmente, es por eso que se han buscado estrategias para simplificar la obtención de los valores en la región estrella. Una estrategia consiste en desistir de buscar aproximaciones para los valores  $\rho^*$ ,  $p^*$  y  $u^*$ , mejor aproximar directamente al flujo numérico  $F_{j+1/2}^n$ . Eso es justamente lo que se intenta hacer en el método propuesto por Harten, (vea [1]).

Consideremos la región  $[x_L, x_R] \times [0, T]$  la cual contiene la estructura de la onda. Suponemos que tal onda se obtiene a partir de la solución exacta para el problema en un

determinado instante de tiempo, esto es, pedimos  $x_L \leq TS_L$  y  $x_R \geq TS_R$  con  $S_L, S_R$  las velocidades de onda mayores producidas por los estados  $U_L$  y  $U_R$  respectivamente,  $T$  es el tiempo final pre-establecido. La forma integral de la ley de conservación en tal intervalo se lee:

$$\int_{x_L}^{x_R} U(x, T) dx = \int_{x_L}^{x_R} U(x, 0) dx + \int_0^T F(U(x_L, t)) dt - \int_0^T F(U(x_R, t)) dt. \quad (5.3.8)$$

La parte derecha de la igualdad se puede evaluar fácilmente, pues

$$\int_{x_L}^{x_R} U(x, T) dx = x_R U_R - x_L U_L + T(F_L - F_R). \quad (5.3.9)$$

Para la parte de la izquierda hacemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \int_{x_L}^{x_R} U(x, T) dx &= \int_{x_L}^{TS_L} U(x, T) dx + \int_{TS_L}^{TS_R} U(x, T) dx + \int_{TS_R}^{x_R} U(x, T) dx \\ &= \int_{TS_L}^{TS_R} U(x, T) dx + (TS_L - x_L)U_L + (x_R - TS_R)U_R. \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

Comparando (5.3.8) y (5.3.10) obtenemos:

$$\frac{1}{T(S_R - S_L)} \int_{TS_L}^{TS_R} U(x, T) dx = \frac{S_R U_R - S_L U_L + F_L - F_R}{S_R - S_L}. \quad (5.3.11)$$

Ahora, suponiendo que se conocen las velocidades, es natural proponer como solución para la región estrella el promedio anterior; esto es,

$$U^{HLL} = \frac{S_R U_R - S_L U_L + F_L - F_R}{S_R - S_L}. \quad (5.3.12)$$

El método HLL para aproximar el problema de Riemann consiste en usar

$$U(x, t) = \begin{cases} U_L, & \text{si } x \leq tS_L; \\ U^{HLL}, & \text{si } tS_L \leq x \leq tS_R; \\ U_R, & \text{si } x \geq tS_L. \end{cases} \quad (5.3.13)$$

O bien en términos del flujo numérico

$$F_{i+1/2}^{HLL} = \begin{cases} F_L, & \text{si } 0 \leq S_L; \\ \frac{S_R U_R - S_L U_L + F_L - F_R}{S_R - S_L}, & \text{si } S_L \leq 0 \leq S_R; \\ F_R, & \text{si } 0 \geq S_L. \end{cases} \quad (5.3.14)$$

Para este trabajo utilizamos la propuesta de Roe dada en [9] para estimar las velocidades  $S_L$  y  $S_R$ :

$$S_L \approx \tilde{u} - \tilde{a}, \quad S_R \approx \tilde{u} + \tilde{a}, \quad (5.3.15)$$

donde:

$$\tilde{u} = \frac{\sqrt{\rho_L}U_L + \sqrt{\rho_R}U_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad \tilde{a} = \left[ (\gamma - 1) \left( \frac{\sqrt{\rho_L}H_L + \sqrt{\rho_R}H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} - \frac{1}{2}\tilde{u}^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Recordemos que  $H = (E + p)/\rho$ , entonces  $H_L = (E + p)/\rho_L$  y  $H_R = (E + p)/\rho_R$ .

## 5.4 Pruebas numéricas

Veamos cuatro pruebas donde presentamos las 4 posibilidades para las ondas 1 y 3, las cuales son choque-choque, choque-rarefacción, rarefacción-choque y rarefacción-rarefacción. Presentamos resultados numéricos utilizando la solución exacta al problema de Riemann; en cada caso, se emplea un problema de prueba que consiste en el problema directo de Riemann con sus vectores estados  $U_L, U_R$  dados. Suponemos para todos los casos que  $\gamma = 1.4$ , se indican los tiempos finales. Un problema de Riemann en este caso modela el conocido problema “shock tube”, el cual supone que dos gases, a distintas presiones y densidades e inicialmente en reposo, se encuentran confinados en un mismo tubo y sólo los separa una delgada membrana, la ruptura abrupta de dicha membrana representa el problema de Riemann.

**Prueba 1:** Rarefacción-Choque

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1.0, 0.0, 1.0)_L, \\ (0.125, 0.0, 0.1)_R \end{cases}, \quad t = 0.15.$$

Los resultados se muestran en la Figura 5.2.

**Prueba 2:** Rarefacción-Rarefacción

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1.0, -2.0, 0.4)_L, \\ (1.0, 2.0, 0.4)_R \end{cases}, \quad t = 0.012.$$

Los resultados se muestran en la Figura 5.3.

**Prueba 3:** Choque-Rarefacción

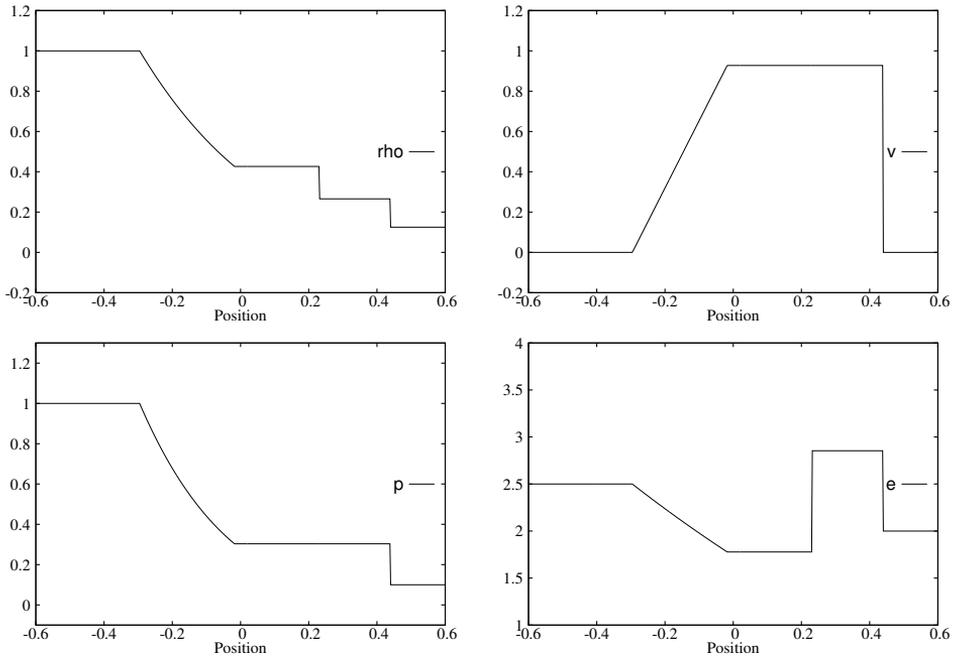
$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1.0, 0.0, 0.01)_L, \\ (1.0, 0.0, 100.0)_R \end{cases}, \quad t = 0.035.$$

Los resultados se muestran en la Figura 5.4.

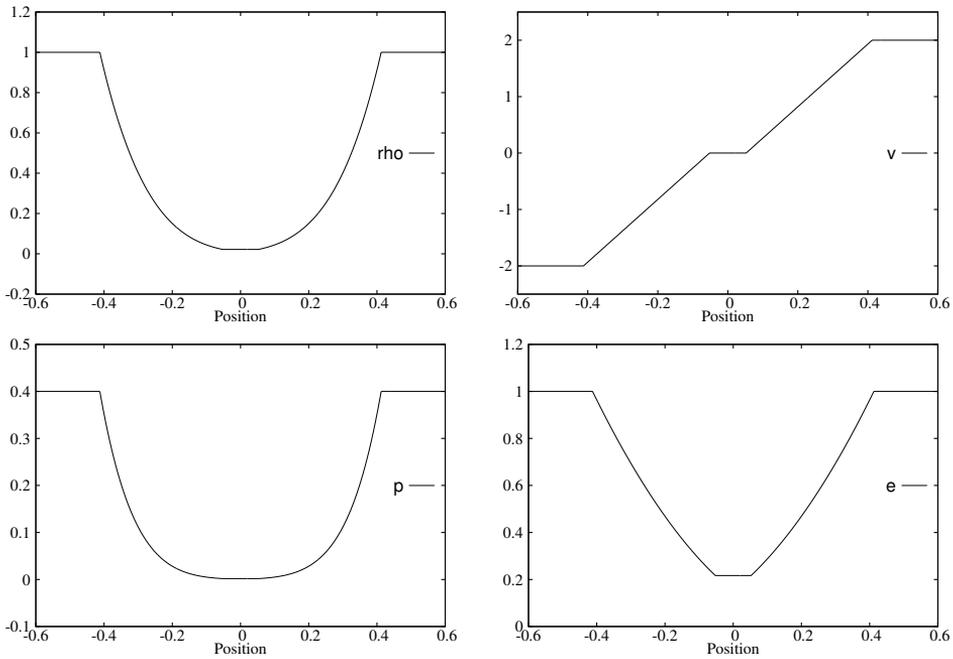
**Prueba 4:** Choque-Choque

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (5.99924, 19.5975, 460.894)_L, \\ (5.99242, -6.19633, 46.095)_R \end{cases}, \quad t = 0.035.$$

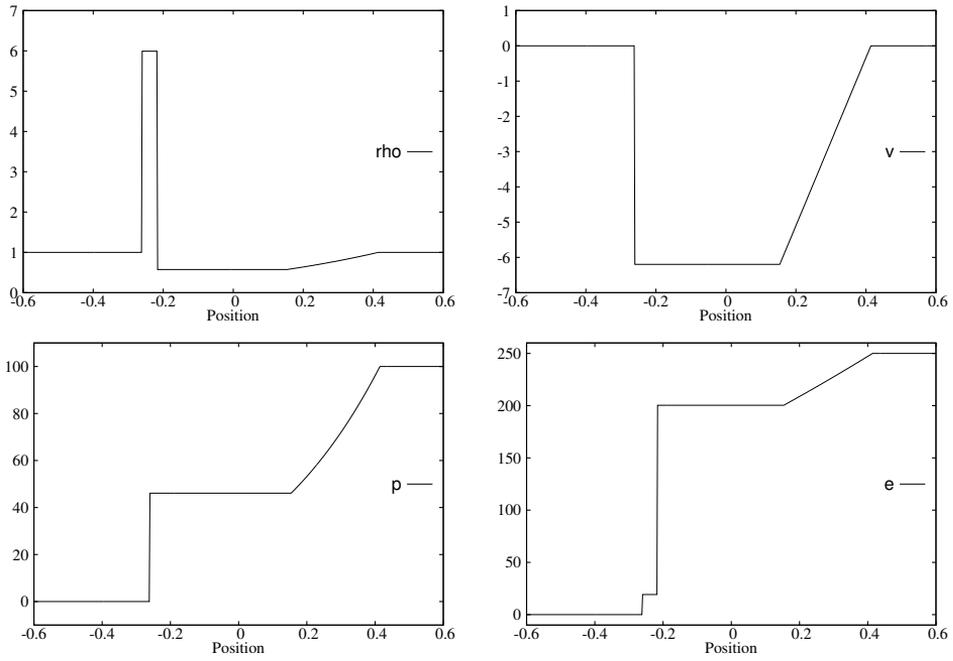
Los resultados se muestran en la Figura 5.5.



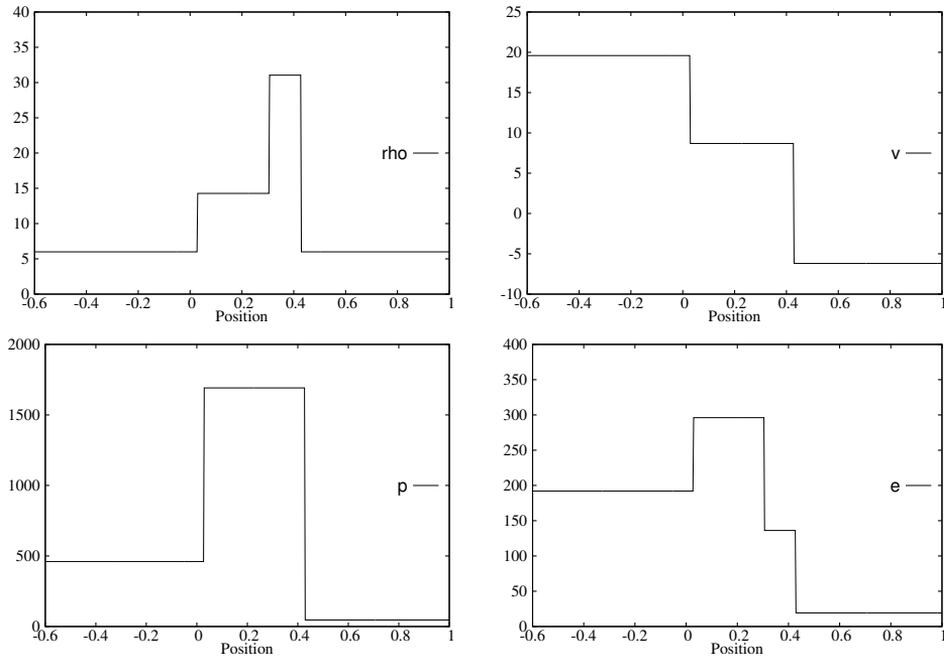
**Figura 5.2:** Resultados de la prueba 1. Ocurre una onda de rarefacción a la izquierda (1-onda) y una de choque a la derecha (3-onda).



**Figura 5.3:** Resultados de la prueba 2. Ocurren dos ondas de rarefacción.



**Figura 5.4:** Resultados de la prueba 3. Ocurre una onda de choque a la izquierda (1-onda) y una de rarefacción a la derecha (3-onda).



**Figura 5.5:** Resultados de la prueba 4. Ocurren dos ondas de choque.

Por último, en la Figura 5.6 se muestran los resultados obtenidos al aplicar el flujo numérico  $F_{j+1/2}^{HLL}$  dado por (5.3.14), utilizamos el problema de Riemann dado por la prueba 1.

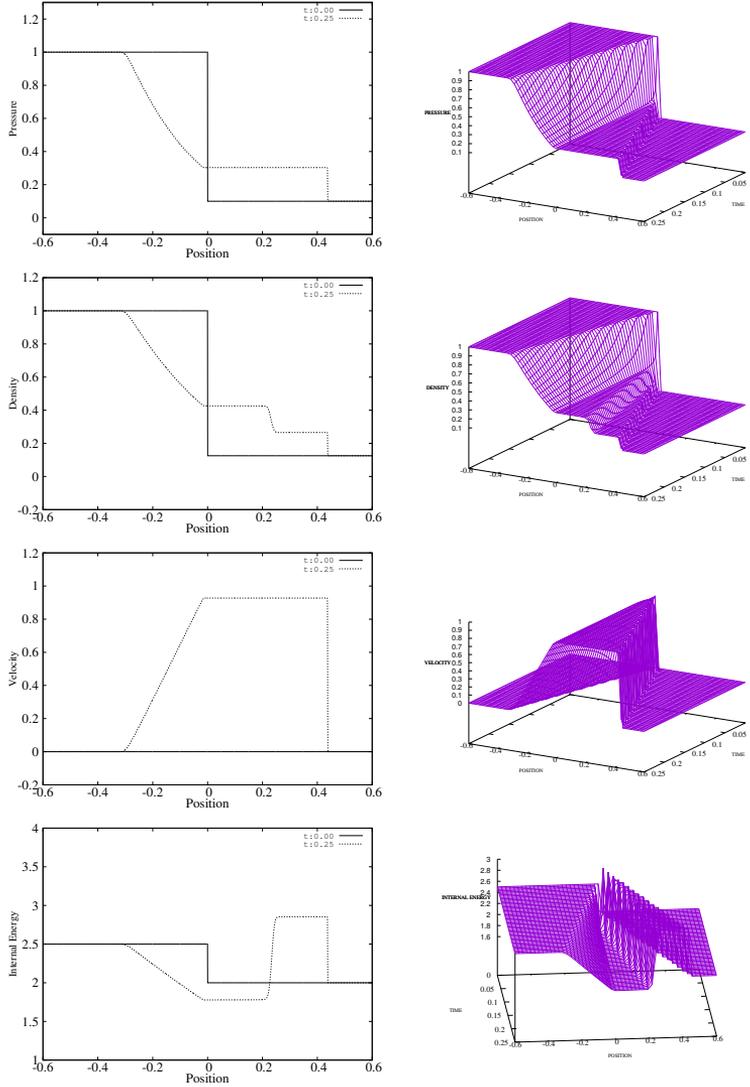


Figura 5.6: Resultados del método HLL para la prueba 1.

## 5.5 Conclusiones

Presentamos la descripción del método conservativo de tipo Godunov, la descripción de la solución exacta al problema de Riemann y mostramos la propuesta de aproximar directamente al flujo físico mediante el método HLL. Presentamos además una aplicación a un problema básico en la dinámica de gases, conocido como “shock tube”, comparamos y mostramos los resultados. Realizamos una implementación en C/C++, la cual utiliza las técnicas usuales de paralelización para esquemas de volumen finito explícitos.

# Bibliografía

- [1] A. Harten, P. D. Lax, and B. van Leer, **On Upstream Differencing and Godunov-Type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws**, SIAM Review, 25(1), 35-61, 1983.
- [2] A. Jeffrey, **Quasilinear Hyperbolic Systems and Waves**, Pitman, 1976.
- [3] B. van Leer, **Flux Vector-Splitting for the Euler Equations**, Technical Report. ICASE, NASA Langley Research Center, USA, 1982.
- [4] E. F. Toro, M. Spruce, and W. Speares **Restoration of the Courant Surface in the HLL-Riemann Solver**, Technical Report CoA-9204, Department of Aerospace Science, Collegue of Aeronautics, Cranfield Institute of Technology, UK, 1992.
- [5] E. F. Toro, **Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics 3ed**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.
- [6] Helge Holdem, et al. **Splitting Methods for Partial Differential Equations with Rough Solutions, Analysis and Matlab Programs**, European Mathematical Society, 2010.
- [7] J. Glimm, **Solution in the Large for Nonlinear Hyperbolic Systems of Equations**, Comm. Pure Appl. Math., 18, 697-715, 1965.
- [8] J. L. Steger and R. F. Warming, **Flux Vector Splitting of the Inviscid Gas-dynamic Equations with Applications to Finite Difference Methods**, J. Comput Phys., 40, 263-293, 1981.
- [9] P. L. Roe, **Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes**, J. Comp. Phys., 43, 357-372, 1981.
- [10] R Courant, E. Isaacson, and M. Rees **On the Solution of Nonlinear Hyperbolic Differential Equations by Finite Differences**. Comm. Pure Appl. Math., 5, 243-255, 1952.
- [11] R. H. Sanders and K. H. Prendergast, **On the Origin the Three Kiloparsec Arm**, Astrophys. J., 188, 489-500, 1974.
- [12] S. K. Godunov, **A Finite Difference Method for the Computation of Discontinuous Solutions of the Equations of Fluid Dynamics**, Mat. Sb., 47, 357-393, 1959.
- [13] S. Osher and F. Solomon, **Upwind Difference Schemes for Hyperbolic Conservation Laws**, Math. Comp, 38,158, 339-374, 1982.