

Ensayos

Muerte Súbita del Entrelazamiento de dos Qubits con Puntos Cuánticos (QDs)

Recibido: 31-07-2017, Aceptado: 01-11-2017 (Artículo Arbitrado)

Resumen

El entrelazamiento de sistemas cuánticos es un aspecto clave para entender la dinámica y el comportamiento de sistemas mixtos (matriz de densidad) como bits cuánticos bipartitas (qubits). Principalmente, se requiere una manera fiable y precisa de medir el grado de enredo del sistema. Una medida cuantitativa ampliamente utilizada es el Entrelazamiento de Formación (Entanglement of Formation) de un estado mixto, definido como el número mínimo requerido de singuletes para crear un conjunto de estados puros que representen la matriz de densidad del sistema. En este trabajo investigamos el entrelazamiento entre dos puntos cuánticos semiconductores (Quantum-Dots). Consideramos el sistema de dos QDs incrustados en una cavidad individual tipo Jaynes-Cummings y acoplados al modo electromagnético interno. Los resultados analíticos muestran que el entrelazamiento entre los QDs, evolucionan en el tiempo y se producen los llamados efectos de muerte súbita por igual. Estos resultados son exclusivamente de carácter mecánico cuántico y extiende la capacidad de comprensión del entrelazamiento cuántico en una nueva dirección considerando la interacción no lineal de Förster incluida en el modelo.

Abstract

Entanglement of quantum systems is a key part of understanding the dynamics and behavior of mixed systems (density matrix) as bipartite quantum bits (qubits). Above all else, a reliable and accurate way of measuring the entanglement degree of the system is required. A widely used quantifiable measure is the entanglement of formation of a mixed state, defined as the minimum number of singlets required to create a set of pure states that represents the density matrix of the system. In this paper the entanglement between two semiconductor quantum dots (QDs) is investigated. We consider the system of two QDs embedded in a Jaynes-Cummings type cavity coupled to internal electromagnetic mode. The analytical results show that the entanglement between the QDs evolve over time and the so-called sudden death effects occur equally. These results are purely quantum mechanical and improve our understanding of the power of quantum entanglement in a new direction taking into account nonlinear Förster Interaction.

Résumé

L'enchevêtrement des systèmes quantiques est un aspect clé pour comprendre la dynamique et le comportement des systèmes mixtes (matrice de densité) comme les bits quantiques Qubits. Il est nécessaire de mesurer de manière fiable et précise le degré d'enchevêtrement du système. Une mesure quantitative amplement utilisée est celle de l'Enchevêtrement de Formation d'un état mixte, défini comme étant le nombre minimum de singulets pour créer un ensemble d'états purs qui représentent la matrice de densité du système. Dans ce travail, on a étudié l'enchevêtrement entre 2 points quantiques semi-conducteurs (Quantum-Dots). On a pris en compte le système de 2 QDs incrustés dans une cavité individuelle de type Jaynes-Cummings et couplés au mode électromagnétique interne. Les résultats sont exclusivement de caractère mécanique quantique et nous permettent de mieux comprendre l'enchevêtrement quantique en prenant en compte l'interaction non linéaire de Förster incluse dans le modèle.

S. Sánchez-Sánchez^{1*}, V.I. Moreno Oliva^{1**}, E. Román Hernández^{1***}

*ssanys1@hotmail.com, **vmorenofcfm@hotmail.com, ***rohe_00@hotmail.com

Palabras clave: Bits cuánticos, Computación e Información Cuánticas. Medidas de Concurrencia y Entrelazamiento de Formación. **Keywords:** Quantum-bits, Quantum Information and Computation, Concurrence and Entanglement of Formation Measures. **Mots-clés:** Bits quantiques, Informatique et Information Quantiques. Mesures de Concurrence et Enchevêtrement de Formation.

Introducción

El entrelazamiento (enredo o enmarañamiento) cuántico (EPR paradox 1935) ha desempeñado un papel muy trascendental en el procesamiento de información cuántica, también en la teleportación cuántica (Nielsen, Chuang 2000), codificación cuántica (Bennett et.al. 1993) y la

¹Universidad del Istmo, campus Tehuantepec

computación paralela (Di Vincenzo 1995). Por lo tanto, se necesita una medida precisa para cuantificar el grado de entrelazamiento para el sistema de qubits que estén en colaboración o competencia con el cambio de interacción. Por varios años, muchos autores han estudiado el entrelazamiento debido a su enorme importancia a nivel fundamental, también debido a sus aplicaciones en teoría de la información y computación cuánticas (Nielsen, et.al. 2000). El entrelazamiento ha marcado una nueva forma de reinterpretar la naturaleza cuántica en la tecnología informática debido a la incorporación de unidades de procesamiento cuántico con los llamados bits cuánticos (qubits), representados como unidades duales que abren infinitas posibilidades de procesamiento en paralelo, al menos teóricamente, mucho más rápido que cualquier procesador computacional clásico. Actualmente fue lanzada la primer supercomputadora cuántica llamada D-Wave 2000Q System (2016) la cual es la versión más reciente de esta compañía que viene trabajando en investigación y desarrollo desde los inicios de la década de los 2000. Desde el punto de vista teórico es común la situación de primero desarrollar modelos avanzados que subsecuentemente sean probados y aplicados. Por lo tanto es importante implementar modelos físicos que permitan la incorporación de forma factible en los diferentes sistemas donde la inercia tecnológica pueda conducir a los elementos básicos de un procesador cuántico mejorado y mayormente eficiente, algunos de estos elementos más factibles son los puntos cuánticos (QDs por sus siglas en inglés). A pesar de que por lo general se refieren a los QDs como estructuras tipo atómicas, hay diferencias sustanciales, sobre todo en el intercambio de energía de interacción (interacción de Förster), (Sanchez-Mondragon, et.al., 2005; Alejo-Molina, et.al. 2009; Sanchez-Sanchez, et.al., 2011), oscilaciones de Rabi (Larson J. and Moya-Cessa H. 2008), etc. que se han utilizado como base en propuestas de implementación en computadoras cuánticas, y por lo tanto merecen un análisis más cuidadoso. Esto es más interesante porque el carácter físico y la estructura matemática de los estados entrelazados no han sido bien comprendidos y el ajuste en la interacción de Förster abre nuevas posibilidades para hacer frente a estas preguntas fundamentales. Hay dos problemas importantes para el entrelazamiento. Por un lado se

trata de encontrar un método para determinar si un estado dado es separable (o no entrelazado), y el otro, es determinar la mejor medida que cuantifique la cantidad de enredo o entrelazamiento de un estado predefinido. Con el fin de resolver el primer problema, se han hecho muchos esfuerzos, véase, por ejemplo (Bennett, et.al. 1992; Hill, Wootters, 1997). Así mismo la búsqueda de una medida apropiada para el entrelazamiento también ha recibido mucha atención. Se han diseñado modelos como el entrelazamiento de formación, la destilación y la entropía relativa, (Bennett, et.al. 1996), la concurrencia, (Hill, et.al., 1997 y Wootters 2001), la concurrencia relacionada a las medidas, o el operador positivo entre otras. Aunque el entrelazamiento de formación se define para sistemas bipartitas de dimensiones arbitrarias, hasta ahora no se ha encontrado ninguna formulación analítica explícita para el entrelazamiento de formación para sistemas mayores a un par de qubits, excepto para algunos estados simétricos especiales. Otro problema serio que debe ser considerado en el entrelazamiento de un sistema cuántico, como ya se mencionó anteriormente, es que puede degradarse debido a la interacción con el ruido de fondo u otros sistemas generalmente llamados de medio ambientes de-coherentes (en relación a la De-coherencia o pérdida de Coherencia). El interés inicial originalmente se ocupó de las consecuencias de la medición a nivel cuántico y de la transición cuántico-clásica (Joos, et.al. 2003). Más recientemente, la de-coherencia del entrelazamiento se ha estudiado en relación con los obstáculos para realizar varios esquemas de procesamiento de información cuántica. Yu y Eberly (2004 y 2006) han demostrado que el entrelazamiento puede decaer a cero de forma abrupta, en un tiempo finito, un fenómeno llamado Muerte Súbita del Entrelazamiento (Entanglement Sudden Death).

En este artículo consideramos un doble sistema de puntos cuánticos acoplado al modo de la cavidad del tipo Jaynes-Cummings (Jaynes and Cummings, 1993), por lo tanto, investigamos el entrelazamiento entre dos puntos cuánticos, cada uno incrustado en su propia cavidad. De esta manera, mostramos analíticamente que el entrelazamiento tiene efectos interesantes como la evolución temporal, así como el llamado efecto de muerte súbita, pero en una forma mucho más atenuada. Por lo tanto, estudiamos este

sistema en el contexto de electrodinámica cuántica de cavidades (CQED por sus siglas en inglés) y la óptica cuántica. Como se mencionó anteriormente, el sistema de dos puntos cuánticos primeramente es entrelazado, después de ser incrustados en la cavidad. Sin embargo debemos aclarar que esto no es un trabajo sobre sistemas de QDs para aplicaciones de computación cuántica. Es sólo una propuesta fundamental sobre QDs semiconductores en óptica cuántica y CQED, que utilizamos para llevar a cabo el estudio teórico, apoyados en el procedimiento del entrelazamiento de formación como medida cuantitativa para el entrelazamiento entre los dos qubits; es decir, el sistema de dos puntos cuánticos más las dos cavidades que funcionan como reservorios para los puntos. Este trabajo lo dividimos de la siguiente manera: En la segunda sección que es la más extensa, se introduce al concepto de Entrelazamiento de Formación y la Función de Concurrencia, así mismo se presenta el modelo de nuestro sistema junto con la metodología de solución. En la sección tres se muestran los resultados teóricos así como la parte gráfica de estos resultados. En la cuarta sección la discusión de nuestros resultados junto con las conclusiones.

1. Metodología, Planteamiento y Desarrollo

1.1 Concurrencia y Entrelazamiento de Formación.

El entrelazamiento es uno de los conceptos más fundamentales de la mecánica cuántica, éste corresponde a la presencia de correlaciones no locales entre diferentes partes de un sistema cuántico que no pueden explicarse con la teoría clásica. Es decir, un estado puro de un par de sistemas cuánticos (bipartita) se dice que esta entrelazado o enmarañado si no es factorizable (es decir, si el estado total no puede ser escrito como un producto de estados individuales de la partícula) y un estado mixto esta entrelazado si se puede representar como la mezcla de estados puros factorizables. Para estados cuánticos puros y mixtos, existen buenas medidas del grado de entrelazamiento. En el caso de estados puros de un sistema bipartita existe una sola medida ampliamente aceptada de entrelazamiento, mientras que para estados mixtos de tales sistemas hay tres medidas que han sido ampliamente estudiadas. Una

de éstas, el entrelazamiento de la formación, es un tema de este trabajo. Utilizamos la Concurrencia de Wootters et.al. (1997, 2001) como una medida en el sistema estudiado en este trabajo, principalmente por su importancia para estados mixtos y la conveniencia de su definición y normalización.

1.2 Modelo para el sistema de dos puntos cuánticos (QDs)

El elemento clave en el procesamiento de la información cuántica es el llamado bit cuántico (Nielsen, et.al. 2000). Por esta razón, comprender su comportamiento en entornos para computación cuántica es esencial para llevar a cabo operaciones externas que efectúen cálculos específicos en ubicaciones de qubits por operaciones lógicas con nuevos algoritmos adaptados a estos qubits. De tal forma que deberíamos formar redes de qubits a intervalos diferentes haciendo operaciones completas. En nuestro caso tenemos una pequeña red de dos QDs en los nodos de la red bajo este estudio que proporcionará los medios para comprender la transferencia del entrelazamiento a una determinada distancia en la retícula de la red. Los qubits que proponemos son un sistema de dos puntos cuánticos que se localizan en su respectivo mono-modo (\hat{a} , \hat{a}^\dagger y \hat{b} , \hat{b}^\dagger), en cavidades sin pérdidas de manera que una cavidad incluye solamente uno de tales puntos. Así, cada nodo de nuestra red consiste de una cavidad en la que hay un QD. Así limitaremos nuestra atención a la dinámica de entrelazamiento entre dos nodos de este tipo. Denotaremos el punto en la primera cavidad nodal por A, y en el primer modo por \hat{a} , el segundo punto en la segunda cavidad nodal por B y en el segundo modo por \hat{b} , como se ilustra en la Fig. 1. Vamos a estar utilizando el modelo QDs con el Hamiltoniano (Sánchez-Sánchez S. et. al., 2009 y 2011; Quiroga and Johnson, 1999; Yöncü, et.al., 2006 y 2007) para especificar las interacciones en nuestro sistema, esto incluye la interacción Förster. Los Hamiltonianos que usaremos en las siguientes secciones son las ecuaciones (1), (2) y (3). Consideramos L puntos cuánticos semiconductores idénticos que están igualmente acoplados entre sí a través de la interacción de Coulomb. Los QDs interactúan con un campo cuantizado (interacción dipolar) en una cavidad de alta Q. Entonces el sistema acoplado QD-s-campo es descrito por el Hamiltoniano

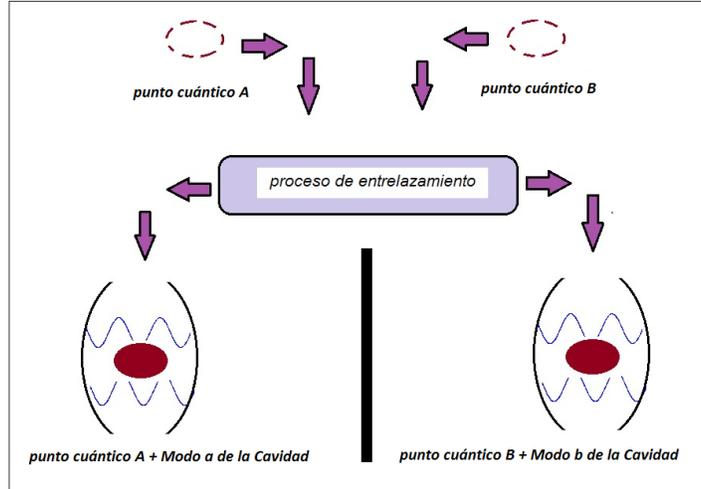


Figura 1. Bosquejo del sistema compuesto por dos puntos cuánticos previamente entrelazados. Cada punto es colocado en su cavidad nodal respectivamente sin interacción a posteriori entre ellos.

(Sánchez-Mondragón et. al. 2005; Sánchez-Sánchez S. et. al. 2009 y 2011).

Con el fin de analizar dos subsistemas A y B, tenemos los Hamiltonianos (hemos definido la constante de Planck $\hbar = 1$)

$$H^{(A)} = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \epsilon J_z^a + g_a (J_+^a \hat{a} + \hat{a}^\dagger J_-^a) + W_a (J_a^2 - (J_z^a)^2), \quad (1a)$$

$$H^{(B)} = \omega \hat{b}^\dagger \hat{b} + \epsilon J_z^b + g_b (J_+^b \hat{b} + \hat{b}^\dagger J_-^b) + W_b (J_b^2 - (J_z^b)^2). \quad (1b)$$

Donde ϵ es el intervalo de banda prohibida del QD, $g_a = g_b = g$ es la intensidad de acoplamiento entre el campo y los QDs, ω es la frecuencia de campo, y $W_a = W_b = W$, representa la interacción de Coulomb inter-punto. El proceso de interacción de Coulomb conocido como Proceso de Förster intercambia energía, pero no requiere la transferencia física de los electrones ni huecos. Para un acoplamiento uniforme, estos QDs se colocan equidistantes entre sí de modo que los puntos se encuentran en una línea para $L = 2$, en los vértices de un triángulo equilátero para $L = 3$ y en los vértices de una pirámide regular para $L = 4$. El Hamiltoniano (1) puede ser reescrito de una manera mucho más conveniente en la representación del momento angular, con los cambios señalados en referencias: (Sánchez-Sánchez, et.al. 2011; Sánchez-Mondragón, et.al.,2005; Sánchez-Sánchez, et.al., 2009; Quiroga, et.al., 1999), en estos trabajos se encuentra que puede consistir en dos partes, la primera con el Hamiltoniano de Dicke H_{DK} , y el otro es el Hamiltoniano de la interacción Förster

H_F , definidos como $H_{DK} = \Delta J_z^{a,b} + g(J_+^{a,b} \hat{a} + \hat{a}^\dagger J_-^{a,b})$ y $H_F = W (J_{a,b}^2 - (J_z^{a,b})^2) = W J_+^{a,b} J_-^{a,b}$ respectivamente. Donde la constante $\Delta = \epsilon - \omega$, (también se puede definir como $-\Delta = \omega - \epsilon$) es la desintonía o desafinación (detuning) entre el campo electromagnético y la banda prohibida. El Hamiltoniano para L QDs puede ser reescrito como $H = \omega N + Q_L$, con $N = \hat{a}^\dagger \hat{a} + J_z + L/2$ que representa el número de átomos y fotones, y $Q_L = H_{DK} + H_F$, son constantes de movimiento. Se debe notar que el término de Förster $H_F = W J_+^{a,b} J_-^{a,b}$, es no lineal. Además introducimos una nueva constante ϵ' , definida como $\epsilon' = \epsilon - W$. Sin embargo, hay otra forma de reescribir el Hamiltoniano (1), utilizando el álgebra $SU(2)$ del momento angular, de tal forma que el Hamiltoniano incluye explícitamente el desafinamiento Δ que de ahora en adelante llamaremos Desafinamiento (Detuning) de Förster Δ' , así obtenemos

$$H^{(A)} = \omega(\hat{a}^\dagger \hat{a} + J_z^a) + g(J_+^a \hat{a} + \hat{a}^\dagger J_-^a) - \Delta' J_z^a + W_a J_+^a J_-^a, \quad (2a)$$

$$H^{(B)} = \omega(\hat{b}^\dagger \hat{b} + J_z^b) + g(J_+^b \hat{b} + \hat{b}^\dagger J_-^b) - \Delta' J_z^b + W_b J_+^b J_-^b. \quad (2b)$$

Los parámetros definidos como

$-\Delta' = \Delta + W = \omega - \epsilon + W = \omega - \epsilon'$. Cambiando el nuevo el hamiltoniano, con frecuencia de campo ω , las ecuaciones (2) adquieren la forma

$$H^{(A)} = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \epsilon' J_z^a + g(J_+^a \hat{a} + \hat{a}^\dagger J_-^a) + W_a J_+^a J_-^a, \quad (3)$$

$$H^{(B)} = \omega \hat{b}^\dagger \hat{b} + \epsilon' J_z^b + g(J_+^b \hat{b} + \hat{b}^\dagger J_-^b) + W_b J_+^b J_-^b.$$

2.3 Diagonalización del Hamiltoniano para los dos QDs

A partir de ahora, utilizaremos el Hamiltoniano (3), para cada uno de los subsistemas con el fin de diagonalizar el Hamiltoniano, es decir, se divide en dos subsistemas que se representan como $H_T = H^{(A)} + H^{(B)}$. Esto simplificará la tarea de estudiar la evolución temporal del sistema de campo-QD. Partiendo de la condición inicial que representa el vacío de los excitones (Sánchez-Sánchez S. et.al. 2011), (Alejo-Molina A. et.al. 2005), (Quiroga and Johnson, 1999; Reina, Quiroga, Jhonson 2000.), es decir, el estado donde el subespacio es ópticamente activo $|j = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{a^2 + b^2}|\downarrow\rangle$; mientras que el subespacio $j = 0$ permanece oscuro. Elegimos la base de eigenestados del operador J^2 y J_z , $|\downarrow\rangle = |j = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2}\rangle$ y $|\uparrow\rangle = |j = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}\rangle$; como una adecuada representación para este problema $|\downarrow\rangle$ representa el vacío para los excitones, $|\uparrow\rangle$ denota un estado simétrico de un solo excitón des-localizado. Si representamos el estado del campo dentro de cada cavidad por el estado de Fock $|n_a; n_b\rangle$ y consideramos los QD's en el estado entrelazado que involucra los estados del vacío y de excitón $|\uparrow\downarrow\rangle \pm |\downarrow\uparrow\rangle$, entonces tendremos un subespacio invariante generado por el producto directo (tensorial) $\{|\uparrow\downarrow\rangle \otimes |00\rangle; |\downarrow\uparrow\rangle \otimes |00\rangle; |\downarrow\downarrow\rangle \otimes |10\rangle; |\downarrow\downarrow\rangle \otimes |01\rangle\}$. A partir de estos vectores base determinamos los elementos de matriz para el hamiltoniano (3), y así obtenemos los eigenvalores y eigenvectores diagonalizando la matriz. La matriz queda explícitamente como

$$H_T = H^{(A)} + H^{(B)} = \begin{pmatrix} W & 0 & g & 0 \\ 0 & W & 0 & g \\ g & 0 & \Delta' & 0 \\ 0 & g & 0 & \Delta' \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Donde $-\Delta' = \omega - \epsilon' = \Delta + W$. Un caso interesante es cuando $\Delta' = 0 + W = W$, es decir, cuando el sistema está en resonancia. En la siguiente subsección usaremos este caso con el fin de calcular la función de Concurrencia y de esta forma el Entrelazamiento de Formación, por ahora calculamos el caso general para la diagonalización del Hamiltoniano. El polinomio característico para la matriz (4) está dado por $P(\lambda) = [g^2 + (W - \lambda)\lambda - (W - \lambda)\Delta']^2$. En ambas cavidades con la misma frecuencia de campo ω , pero por razones de simplicidad definimos la siguiente constante $\delta = [4g^2 + W^2 - 2W\Delta' - (\Delta')^2]^{\frac{1}{2}} = [W(W - 2\Delta') + (4g^2 + \Delta'^2)]^{\frac{1}{2}}$; los eigenvalores adquieren la siguiente forma:

$$\lambda_{E_1, E_2} = \left(\frac{1}{2}\right)[W + \Delta' - \delta] \text{ y } \lambda_{E_3, E_4} = \left(\frac{1}{2}\right)[W + \Delta' + \delta]$$

Debido al producto directo (tensorial) de los estados cuánticos $|jk\rangle = |j, k\rangle = |j\rangle \otimes |k\rangle$ forman una base de cuatro dimensiones en el espacio de Hilbert $SU(2) \otimes SU(2)$. Entonces los correspondientes eigenvectores (eigenfunciones) normalizados son

$$\begin{aligned} |\lambda_1\rangle &= (4g^2 + \Omega_1^2)^{-1/2}[\Omega_1|\uparrow\downarrow; 00\rangle + 2g|\downarrow\downarrow; 10\rangle], \\ |\lambda_2\rangle &= (4g^2 + \Omega_1^2)^{-1/2}[\Omega_1|\uparrow\uparrow; 00\rangle + 2g|\downarrow\uparrow; 01\rangle], \\ |\lambda_3\rangle &= (4g^2 + \Omega_2^2)^{-1/2}[\Omega_2|\uparrow\downarrow; 00\rangle + 2g|\downarrow\downarrow; 00\rangle], \\ |\lambda_4\rangle &= (4g^2 + \Omega_2^2)^{-1/2}[\Omega_2|\uparrow\uparrow; 00\rangle + 2g|\downarrow\uparrow; 00\rangle]. \end{aligned} \quad (5)$$

También definimos las frecuencias y parámetros por $\Omega_1 = W - \delta - \Delta'$ y $\Omega_2 = W + \delta - \Delta'$. Entonces usando los eigenvectores anteriores obtenemos la función de onda para cualquier tiempo. Por esta razón necesitamos considerar el estado inicial del sistema de puntos cuánticos. Una elección conveniente para el estado inicial es un estado de Bell.

Por razón de generalidad, usamos el estado inicial $|\psi_{qd}\rangle = [c_1|\uparrow\downarrow\rangle + c_2e^{i\phi}|\downarrow\uparrow\rangle]$, donde las constantes son reales y satisfacen $c_1^2 + c_2^2 = 1$. También se podría considerar el estado inicial del campo como coherente, o térmico. Entonces el estado inicial (de Bell) para el sistema acoplado de QDs-campo se puede escribir como

$$|\Psi(0)\rangle = |\psi_{qd}(0)\rangle \otimes |00\rangle = [c_1|\uparrow\downarrow\rangle + c_2e^{i\phi}|\downarrow\uparrow\rangle] \otimes |00\rangle. \quad (6)$$

Ahora estamos en posición de hallar la función de onda del sistema, puesto que los eigenestados forman un conjunto completo. Usando los eigenvalores y eigenvectores (5), junto con el estado inicial (6) en su forma

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \sum_{k=1}^{N=4} \exp(-i\lambda_k t) \langle \lambda_k | \Psi(0) \rangle | \lambda_k \rangle \\ &= e^{-i\lambda_1 t} \langle \lambda_1 | \Psi(0) \rangle | \lambda_1 \rangle + e^{-i\lambda_2 t} \langle \lambda_2 | \Psi(0) \rangle | \lambda_2 \rangle \\ &\quad + e^{-i\lambda_3 t} \langle \lambda_3 | \Psi(0) \rangle | \lambda_3 \rangle + e^{-i\lambda_4 t} \langle \lambda_4 | \Psi(0) \rangle | \lambda_4 \rangle. \end{aligned}$$

Por medio de la ortogonalidad de la base de vectores podemos obtener los coeficientes en función del tiempo $x_i(\Omega, t) \equiv x_i(t) = \langle jm, n | \Psi(t) \rangle$. Esto es, de manera explícita

$$x_1(t) = c_1 \frac{(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)e^{-i(\lambda_1 + \lambda_3)t}}{(4g^2 + \Omega_1^2)(4g^2 + \Omega_2^2)}$$

$$\begin{aligned}
x_2(t) &= e^{i\phi_0} \left[c_1 \frac{4g^2 e^{-i\lambda_2 t}}{(4g^2 + \Omega_1^2)} + c_2 \frac{4g^2 e^{-i\lambda_4 t}}{(4g^2 + \Omega_2^2)} \right], \\
x_3(t) &= c_1 \frac{2g\Omega_1}{(4g^2 + \Omega_1^2)} e^{-i\lambda_1 t}, \\
x_4(t) &= c_2 \frac{2g\Omega_2}{(4g^2 + \Omega_2^2)} e^{-i\lambda_2 t}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Donde el parámetro ϕ_0 proviene de la condición inicial de Bell. Entonces la solución del sistema en términos de la base estándar se puede expresar como una simple combinación lineal, es decir,

$$|\Psi(t)\rangle = x_1(t)|\uparrow\downarrow\rangle + x_2(t)|\downarrow\uparrow\rangle + x_3(t)|\downarrow\downarrow\rangle$$

Los coeficientes $x_i(t)$ son expresados en las ecuaciones (8). Basados en estos resultados que obtuvimos anteriormente, en la siguiente sección hallaremos la matriz de densidad, como también su versión reducida con el fin de calcular la concurrencia y el entrelazamiento de formación.

2.4 Entrelazamiento de Formación para dos QDs y su implementación como Qubits

Por simplicidad, supondremos que ambas cavidades están inicialmente preparadas en el estado vacío $|0_a\rangle \otimes |0_b\rangle$ y los dos QD's están en un estado puro entrelazado especificado por un estado de Bell. Bajo estas premisas, nunca se tendrá más de un fotón en cada cavidad, así el modo en la cavidad es esencialmente similar a un sistema de dos niveles. Esto permite una medida uniforme del entrelazamiento cuántico junto con la función de concurrencia para ambos puntos y los modos en las cavidades. De acuerdo a lo anterior debemos notar en principio, que hay seis formas diferentes que proporcionan información acerca del entrelazamiento total que puede surgir. Podemos denotar las formas más simples posibles de la siguiente manera (Yönac, Yu, Eberly 2006 y 2007):

Por consideraciones de simetría nos pueden proporcionar las relaciones más naturales entre estas. En este artículo ponemos nuestra atención al caso C^{AB} . Así debemos notar que tenemos seis sistemas individuales y cuatro qubits, es decir, los dos QDs (A y B, ver figura 1) representan dos qubits y dos cavidades (a y b) que representan $C^{AB}, C^{Aa}, C^{Ab}, C^{Bb}, C^{Ba}$ qubits, más la combinación en la interacción entre estos sistemas como lo muestran las cuatro concurrencias. Sin embargo nos

enfocamos únicamente a la combinación de nuestro interés AB con el fin de medir el grado de enredo. Para calcular el entrelazamiento de formación necesitamos hallar la matriz de densidad general para los coeficientes $x_i(t)$ (Yönac, Yu, Eberly 2006 y 2007. Yu, Eberly 2003). Es decir, debemos calcular los elementos de matriz para la matriz de densidad reducida, con el fin de obtener una matriz de espín y vuelta (Spin-flipped) que es un ingrediente esencial en la función de concurrencia para el entrelazamiento de formación. Ahora mostramos la matriz resultante

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |x_1|^2 & x_1 x_2^* & x_1^*(x_3 + x_4) \\ 0 & x_1^* x_2 & |x_2|^2 & x_2^*(x_3 + x_4) \\ 0 & x_1^*(x_3 + x_4) & x_2^*(x_3 + x_4) & |x_3|^2 + |x_4|^2 \end{pmatrix}. \tag{10a}$$

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & w \\ 0 & b & z & 0 \\ 0 & z^* & c & 0 \\ w^* & 0 & 0 & d \end{pmatrix}. \tag{10b}$$

En la combinación de los cuatro qubits que usamos como sistema, aparecen la mayoría de las características de carácter universal. Pero el caso más simple es en primer instancia reducirlo a una forma de dos-qubit, obtenida al hacer la traza sobre los dos qubits, produciendo un estado mezclado de dos-qubits que siempre tendrá la forma-X estándar (Yönac, et.al. 2006 y 2007. Yu, Eberly 2003). Donde $a + b + c + d = 1$. Segundo, puesto que la concurrencia de estados mezcla es fácilmente hallada como: $C = 2\max\{0, |z| - \sqrt{ad}, |w| - \sqrt{bc}\} \equiv 2\max\{0, Q\}$. Además, encontramos el caso $w = 0$ y esta ecuación se convierte en: $C = 2\max\{0, |z| - \sqrt{ad}\} \equiv 2\max\{0, Q\}$. Donde queda claro que Q está definida por:

$$Q = |z| - \sqrt{ad}. \tag{11}$$

Esta será una cantidad importante. Debido a que esto tiene ciertas propiedades de conservación que derivan de Q en algunos casos, porque puede ser negativo, mientras que la concurrencia C no puede. La información sobre el enredo de dos QD's está contenida en la matriz de densidad reducida $\hat{\rho}^{AB}$ de los dos puntos que se pueden obtener de las expresiones (9) y (10) trazando sobre las partes fotónicas del estado puro total. La matriz 4×4 que explícitamente se escribe en la base $\{|\uparrow\uparrow\rangle; |\uparrow\downarrow\rangle; |\downarrow\uparrow\rangle; |\downarrow\downarrow\rangle\}$, (Yu, Eberly 2004, 2006, y 2002, 2007) está dada como

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |x_1|^2 & x_1 x_2^* & 0 \\ 0 & x_1^* x_2 & |x_2|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |x_3|^2 + |x_4|^2 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Esta matriz está en la forma estándar X del estado mezcla de dos-qubits (puntos cuánticos), que fue destacado anteriormente por Yu y Eberly (2002,2007) para el caso de dos átomos de dos niveles. Una vez más los elementos de la matriz dependientes del tiempo están dados por (5), donde analizamos el caso cuando la desafinación (detuning) es cero: $\Delta' = \omega - \epsilon' = \Delta + W = 0 + W = W$, es decir, en resonancia. Debe tenerse en cuenta que sólo se mantiene la interacción de Förster constante. El total de constantes definidas en las ecuaciones para los coeficientes en (8) y los eigen-vectores (5) son: $\Omega_1 = W - \delta - \Delta' = -2g$; $\Omega_2 = W + \delta - \Delta' = 2g$ y $\delta = [W(W - 2\Delta') + (4g^2 + \Delta'^2)]^{1/2}$, por lo

$$\begin{aligned} |\lambda_1\rangle &= (1/\sqrt{2}) [|\downarrow\downarrow; 10\rangle - |\uparrow\downarrow; 00\rangle] \text{ orma} \\ |\lambda_2\rangle &= (1/\sqrt{2}) [|\downarrow\downarrow; 01\rangle - |\uparrow\downarrow; 00\rangle]. \\ |\lambda_3\rangle &= (1/\sqrt{2}) [|\uparrow\downarrow; 00\rangle + |\downarrow\downarrow; 10\rangle]. \\ |\lambda_4\rangle &= (1/\sqrt{2}) [|\uparrow\uparrow; 10\rangle - |\downarrow\uparrow; 00\rangle]. \end{aligned} \quad (13)$$

Los coeficientes deben normalizarse. Por lo tanto, las constantes c_1 y c_2 en las ecuaciones (8) deben obedecer la condición de normalización, también en comparación con los vectores propios obtenidos en las ecuaciones (13), estos últimos son estados enmarañados de Bell (caso resonante) donde las constantes son en realidad de $1/\sqrt{2}$, excepto por el signo. Así, las ecuaciones de los coeficientes son

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{e^{-i2Wt}}{8\sqrt{2}g^2}, \\ x_2(t) &= e^{i\phi_0} [e^{-i(W-g)t} + e^{-i(W+g)t}], \\ x_3(t) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i(W-g)t}, \\ x_4(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i(W+g)t}. \end{aligned} \quad (14)$$

Ahora mostramos que la concurrencia de la matriz de densidad (12), con referencias a la ecuación (11), es dada por la función Q_{AB}

$$Q_{AB}(t) = |z| - \sqrt{ad} = |x_1^* x_2 + x_1 x_2^*| - \sqrt{0},$$

$$Q_{AB}(t) = \frac{1}{16g^2} |\cos(gt)(e^{-iWt}e^{-i\phi_0} + e^{iWt}e^{i\phi_0})|, \quad (15)$$

$$Q_{AB}(t) = \frac{1}{8g^2} \left\{ \begin{array}{l} |\cos(gt) \cos(Wt + \phi_0)|, \text{ o bien} \\ |\cos(gt)(\cos(\phi_0)\cos(Wt) - \sin(\phi_0)\sin(Wt))|. \end{array} \right.$$

Así, la función de concurrencia se puede entender en una forma dual, la primera simplemente como una función del tiempo, que permanece constante, y la otra como una función de dos variables, es decir, como una función del tiempo y el parámetro de fase. Ahora utilizamos sólo la parte en términos de funciones cosenos. En las gráficas siguientes mostramos varios casos para ambas funciones con diferentes valores de los parámetros W y g , así como la variación del parámetro ϕ_0 (el cual proviene de la c. i. de Bell). Debemos tener en cuenta que las gráficas tienen un comportamiento oscilación coseno, pero auto-moduladas con una función de la misma naturaleza, es decir, coseno-coseno, y la amplitud no excede de este valor, como debe ser para Entrelazamiento de Formación. Los gráficos se muestran en la siguiente sección de resultados. Las funciones para Concurrencias se dan como

$$C_{AB}(t) = \frac{1}{8g^2} |\cos(gt) \cos(Wt + \phi_0)|; \quad \text{con } \phi_0 = \text{fijo}$$

$$C_{AB}(t, \phi) = \frac{1}{8g^2} |\cos(gt) \cos(Wt + \phi)|; \quad \text{con } \phi = \text{variable ind.} \quad (16)$$

Resultados

Para evaluar el resultado entre el sistema de variables dinámicas, en primer lugar queremos mostrar los resultados analíticos en casos límite para los parámetros físicos, después ilustramos gráficamente el comportamiento de la función de concurrencia respecto a la evolución del sistema enredado, trazadas contra el tiempo.

$$Q_{AB}(t) = \frac{1}{8g^2} \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cos(\phi_0) [\cos(g+W)t + \cos(g-W)t] \\ -\frac{1}{2} \sin(\phi_0) [\sin(g+W)t - \sin(g-W)t] \end{array} \right|$$

$$Q_{AB}(t) = \begin{cases} \frac{1}{8g^2} |\cos(\phi_0)\cos(gt) - \sin(\phi_0)\sin(gt)| & ; \text{ con } W = 0. \\ \frac{1}{8g^2} \cos(gt + \phi_0) & \end{cases} \quad (17b)$$

Cuando $g \gg W$, tenemos en este caso que g es el parámetro dominante, es decir, la constante de acoplamiento entre el campo de radiación y los QDs,

$$Q_{AB}(t) = \frac{1}{8g^2} |\cos(gt) \cos(Wt + \phi_0)|,$$

$$Q_{AB}^2(t) = \left(\frac{1}{8g^2}\right)^2 \cos^2(gt) \cos^2(Wt + \phi_0) \quad (18)$$

Otro caso interesante es cuando agregamos un parámetro γ a los parámetros de interacción, de tal forma que $W = g + \gamma$, con $W > \gamma$, $g > \gamma$; lo que nos permite obtener expresiones analíticas más generales, además de poder manipular este parámetro de forma numérica y perturbativa.

$$Q_{AB}(t) = \frac{1}{16g^2} \left| \begin{array}{l} \cos(\phi_0) [\cos(2g + \gamma)t + \cos(\gamma t)] \\ - \sin(\phi_0) [\sin(2g + \gamma)t + \sin(\gamma t)] \end{array} \right|,$$

(19a)

$$Q_{AB}(t) = \frac{1}{16g^2} \left| \begin{array}{l} \cos(\phi_0) (2\cos^2(gt)\cos(\gamma t) - \sin(2gt)\sin(\gamma t)) \\ + \sin(\phi_0) (2\sin^2(gt)\sin(\gamma t) - \sin(2gt)\cos(\gamma t)) \end{array} \right|$$

(19a)

Y su módulo al cuadrado se obtiene

$$Q_{AB}^2(t) = \left(\frac{1}{16g^2}\right)^2 \left\{ \begin{array}{l} (2\cos(gt))^2 [\cos((g + \gamma)t + \phi_0)]^2 = \\ (2\cos(gt))^2 \times \\ \times [\cos(\phi_0) (\cos(gt)\cos(\gamma t) - \sin(gt)\sin(\gamma t)) - \\ - \sin(\phi_0) (\sin(gt)\cos(\gamma t) + \cos(2gt)\sin(\gamma t))]^2 \end{array} \right. \quad (20)$$

Ahora mostramos las gráficas de Concurrencia en la fig.2 para diferentes valores de los parámetros, así como en dos y en tres dimensiones. El caso 3D consideramos a ϕ_0 como variable independiente, lo que nos permite visualizar las zonas de contorno de Muerte Súbita de la Concurrencia, las cuales son mínimas. En la fig.2 (a) se muestra la Concurrencia $C1_{AB}(t)$, donde las oscilaciones que fluctúan en el intervalo de tiempo, casi llegan a ser de uno (su máximo) para el entrelazamiento de formación. Similarmente la segunda Concurrencia en (b) $C2_{AB}(t)$, con los parámetros: $W = 0.5$; $g = 0.365$; $\phi_0 = \pi/4$. Pero en este

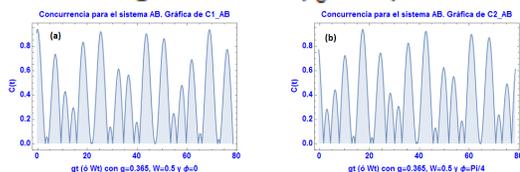


Figura 2: Gráficas para la Concurrencia $C1_{AB}(t)$, en (a) con los parámetros $W = 0.5$; $g = 0.365$; $\phi_0 = 0$. Similarmente en (b) $C2_{AB}(t)$ mismos parámetros, pero con corrimiento de fase de $\pi/4$.

En la fig.3 se muestra el gráfico 3D para la Concurrencia $C_{AB}(t, \phi_0)$ para los parámetros: $W = 0.5$ y $g = 0.365$, sin ser proporcionales, en un dominio regular no extendido como en las gráficas de la figura 3.

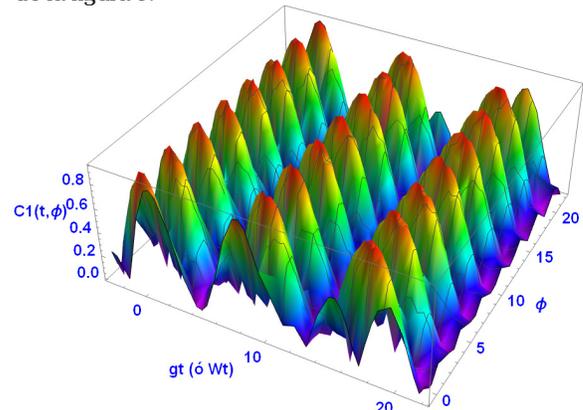


Figura 3. Gráfico 3D para la Concurrencia $C_{AB}(t, \phi)$. Para los parámetros $W = 0.5$; $g = 0.365$. $W = 0.5$; $g = 0.365$.

En la figura 4, graficamos cuatro combinaciones de parámetros; donde podemos observar que las cuatro combinaciones para la constante g son proporcionales a W . La combinación más óptima es para los gráficos (b) y (d). El gráfico (c) excede ligeramente el límite permisible para el entrelazamiento de formación y la concurrencia de uno. Ésto se debe a que las constantes de interacción difieren en un porcentaje igual (o mayor) al 30%, como se observa claramente en los datos anteriores.

En la figura 5, se muestra la Concurrencia para los mismos parámetros, pero graficados en un dominio más estrecho, con el fin de mostrar más detalles en las zonas de los mínimos de la función $C_{AB}(t)$. En el gráfico (a) $g = 0.80W$; el (b) $g = 0.75W$; en (c) $g = 0.70W$ y en el (d) $g = 0.72W$. En 3D con las variables independientes $C_{AB}(t, \phi_0)$, está en la fig.7. En la figura 6 se muestran las gráficas 3D y sus respectivos contornos para las denominadas Zonas de Muerte Súbita para $C_{AB}(t, \phi_0)$, las cuales son casi imperceptibles debido a la naturaleza no lineal de la interacción. Se tiene dos casos: $W = 0.5$ y $g = 0.72W$, $g = 0.80W$ y el parámetro $\phi_0 \rightarrow \phi$ es variable. Esto es debido al estado inicial de Bell. Podemos ver que las zonas de contorno de muerte súbita son

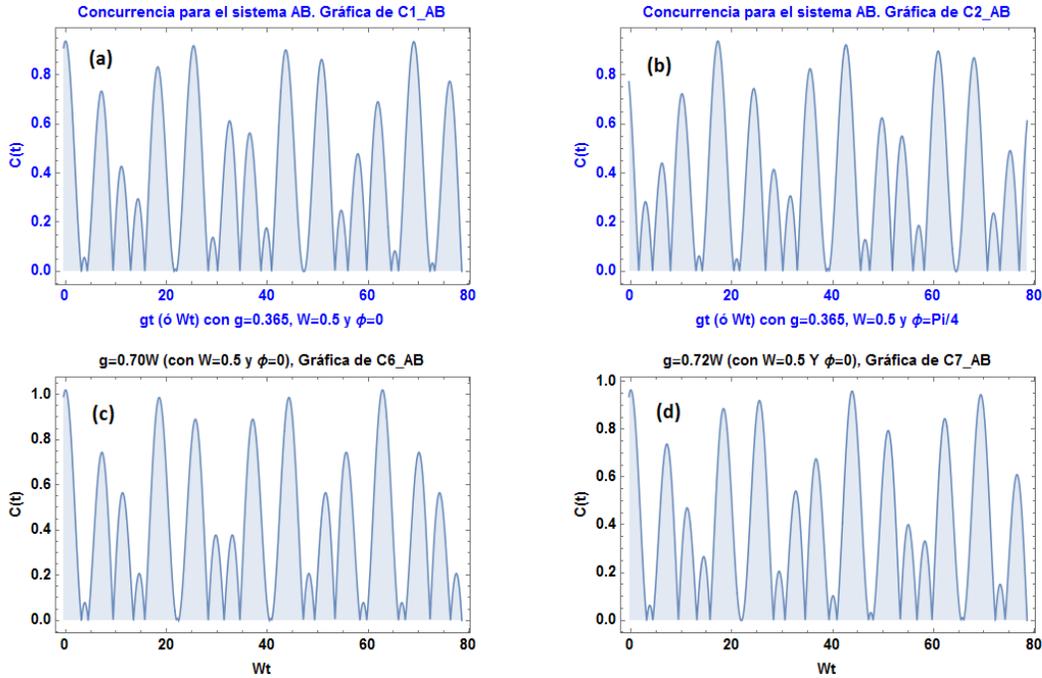


Figura 4: Concurrencias $C_{AB}(t)$. Con los parámetros: $W = 0.5$ y el gráfico (a) con $g = 0.365W$; el gráfico (b) con $g = 0.75W$; gráfico (c) con $g = 0.70W$; y gráfico (d) con $g = 0.72W$.

mínimos en los gráficos a la derecha y sumamente estrechos. Lo interesante es notar que en esta pequeña zona se ha re-escalado por motivos de simplicidad ya que no hay una muerte súbita total como en el caso

atómico estudiado en las referencias (Yu y Eberly 2004, 2006 y 2002, 2007; Yöncac, et.al. 2006 y 2007.; Mitra et.al. 2007). Lo que también se ve en los gráficos anteriores de figuras 2 a 5 en sus puntos mínimos

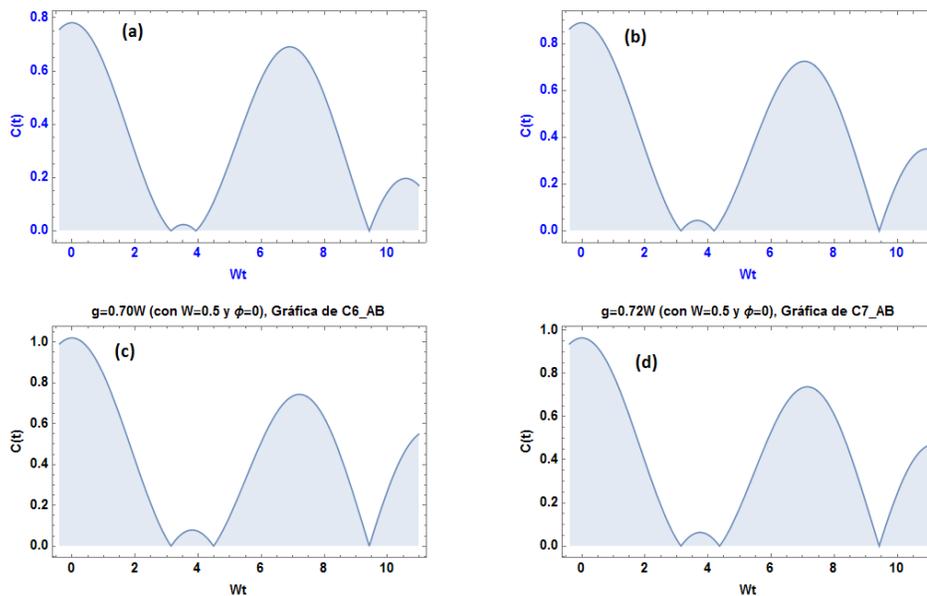


Figura 5. Concurrencia, $C_{AB}(t)$, con los mismos parámetros: $W = 0.5$ y $g = 0.80W, 0.75W, 0.70W$ y $0.72W$; en un dominio más angosto.

Finalmente mostramos los contornos de la función de Concurrencia de forma más definida para tener una mejor idea del comportamiento de la muerte súbita del entrelazamiento en la fig.7. Los gráficos de contorno para las llamadas zonas de muerte súbita para $C_{AB}(t, \phi_0)$; para el caso: $W = 0.5$ y $g = 0.72W$, el parámetro ϕ se considera variable. También consecuencia del estado inicial de Bell. Podemos ver que las zonas de contorno para la muerte súbita son mínimos

en los gráficos sombreados, pero sin llegar a ser totalmente nulas.

Discusión y Conclusiones

En este trabajo se estudió el comportamiento dinámico de un sistema de dos QDs incrustados en su propia cavidad y previamente enredados, usando el estado

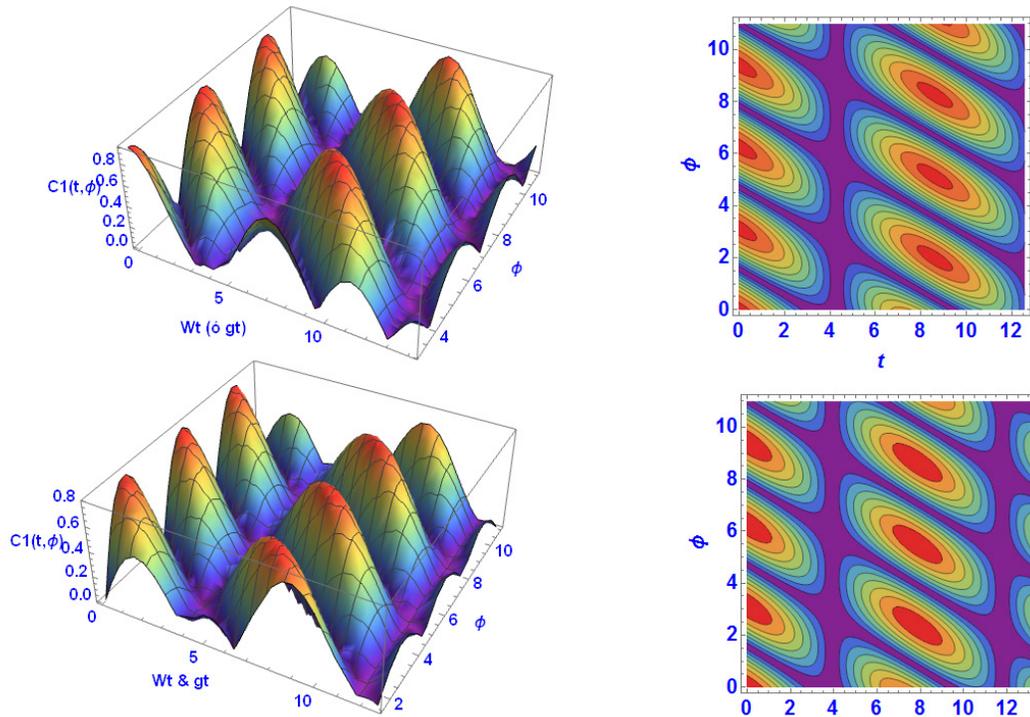
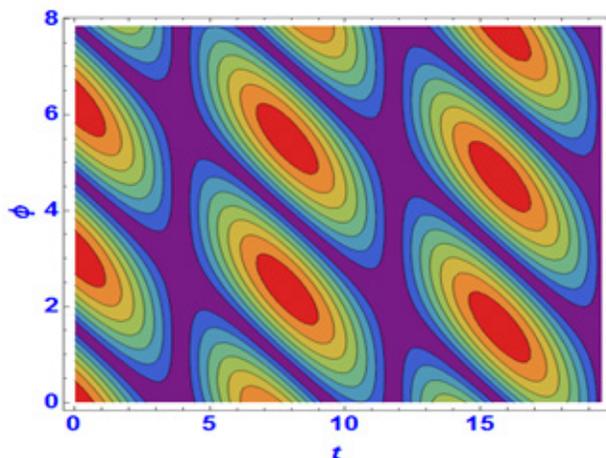


Figura 6. Gráficas en 3D y sus contornos para las denominadas Zonas de Muerte Súbita de la Concurrencia $C_{AB}(t, \phi_0)$, con los dos casos: $W = 0.5$ y $g = 0.72W$, $g = 0.80W$. El parámetro ϕ_0 se considera variable.



inicial tipo Bell bajo el contexto de la teoría de la Electrodinámica Cuántica de Cavidades (C-QED) tomando en consideración la interacción no lineal de Förster en el proceso de transferencia de energía no radiativa, que está representada en el Hamiltoniano para puntos cuánticos como un operador no lineal adicional a los términos lineales, mostrando rasgos de comportamiento más novedosos. Este comportamiento nos permite conocer mejor la dinámica particular de las

Figura 7: Contornos para las llamadas zonas de muerte súbita para $C_{AB}(t, \phi_0)$ con mayor rango de definición que en fig.6; con los parámetros: $W = 0.5$ y $g = 0.72W$, el parámetro ϕ_0 se considera variable.

correlaciones de transferencia y comunicación cuántica entre dos qubits, representados por los dos QDs; en otras palabras, como es el proceso de entrelazamiento después de que los qubits se enredan y se introducen en la cavidad, en este fenómeno de comunicación a distancia sin interacción, es decir, como evoluciona este estado entrelazado en el tiempo, considerando el estado inicial de Bell, incluyendo el parámetro ϕ_0 como constante y variable en el caso 3D. Para entender y cuantificar este proceso sin ambigüedad, utilizamos una medida eficiente para el entrelazamiento entre estados independientes.

Esta medida es la concurrencia y el entrelazamiento de formación para dos qubits (Hill, Wootters 1997, y Wootters, 2001). La medida se define sólo para dos qubits como entidades de dos estados, porque no hay una extensión de este método para más qubits que permitan calcular con precisión el entrelazamiento entre ellos. Vemos que nuestros resultados muestran que entre las dos cavidades con un punto cada una, el entrelazamiento entre el sistema depende de ambos parámetros de interacción, es decir, las interacciones campo-QDs (\mathcal{G}) y la de Förster (W). Ambas interacciones deben ser del mismo orden de magnitud, porque si cualquiera de los dos difiere significativamente entre sí, entonces tenemos que las oscilaciones excederán ligeramente el límite para el entrelazamiento de formación. De esta forma, se observa que los parámetros de interacción deben ser controlados con precisión y no deben ser muy diferentes en orden de magnitud. La mejor manera de controlarlos es haciendo que uno de los dos parámetros sea submúltiplo del otro por un porcentaje mínimo, como podemos ver en las curvas (4), (5) y (6).

Otra característica muy importante es la denominada Muerte súbita del sistema enredado, ya que podemos notar de nuestra investigación, que al visualizar en los diferentes gráficos en las figuras (4) y (5) el comportamiento con mayor precisión en las gráficas de contorno (6) y (7), que la forma de las zonas de muerte súbita son mínimos, sin embargo no hay muerte súbita total del entrelazamiento como ocurre en el caso estudiado para sistemas de átomos por Yu y Eberly (2004, 2006 y 2002, 2007), o el caso de QDs estudiados en las referencias: (Quiroga, et.al. 1999; Reina, et.al. 2000 y Mitra et.al. 2007). Estos últimos autores incluso no mencionan el caso de la muerte súbita como en la situación

atómica. Podemos decir que para el sistema de QDs casi no existe muerte súbita, es prácticamente nula, ya que las zonas mínimas son muy agudas, es decir, son curvas coseno suaves en las que no se obtienen zonas semi-lisas considerables, como en el sistema de átomos donde las zonas sombreadas representan el área de muerte súbita del estado enredado. Esto nos permite concluir que el sistema de puntos cuánticos que representan dos qubits es más eficiente para transportar el entrelazamiento sin pérdida de correlaciones cuánticas. Lo cual significa una buena propuesta para su implementación en primera instancia experimental y segundo tecnológica en los computadores cuánticos entre otras novedosas aplicaciones.

Bibliografía

- Alejo-Molina A., Sánchez-Mondragón J.J., Sánchez-Sánchez S., Detuning Colectivo del Modelo de L Puntos Cuánticos, XLVIII Congreso Nacional SMF / XVIII Reunión Anual de la AMO Guadalajara Jalisco 2005.
- Barenco A., Deutsch D., Ekert A., and Jozsa R., Phys. Rev. Lett. 74, 4083 (1995).
- Bennett C.H., G. Brassard G., Crepeau C., Jozsa R., Peres A., and Wootters W.K., Phys. Rev. Lett. 70 (1993) 1895.
- Bennett C.H., DiVincenzo D.P., Smolin J.A., and Wootters W.K., Phys. Rev. A 54 (1996) 3824.
- Bennett C.H., Bernstein H.J., Popescu S., and Schumacher B., Phys. Rev. A 53 (1996) 2046.
- Bennett C.H., Brassard G., Popescu S., Schumacher B., Smolin J., and Wootters W.K., Phys. Rev. Lett. 76 (1996) 722.
- D-Wave 2000Q System 2016. (<https://www.dwavesys.com/d-wave-two-system>).
- DiVincenzo D.P., Science 270 (1995) 255.
- EPR paradox: Einstein A, Podolsky B, Rosen N; (1935). Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? Phys. Rev. 47 (10): p. 777-780.
- Hill S. and Wootters W.K., Phys. Rev. Lett. 78, 5022 (1997).
- Jaynes E.T. and Cummings F.W., Proc. IEEE 51, 89 (1963); H. Paul, Ann. Phys. (Berlin) 466, 411 (1963); B.W. Shore and P. L. Knight, J. Mod. Opt. 40, 1195 (1993).
- Joos E, Zeh H D, Kiefer C, Giulini D, Kupsch K and Stamatescu I-O (2003) Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory (Germany: Springer)

Kane B.E., *Nature (London)* 393, 133 (1998).

Larson J. and Moya-Cessa H., *Physica Scripta* 77 (6), 065704 (2008).

Loss D. and DiVincenzo D.P., *Phys. Rev. A* 57,120 (1998); Burkard D., Loss D., and DiVincenzo D.P., *Phys. Rev. B* 59, 2070 (1999).

Mitra A., Vyas R., and Erenso D., *Phys. Rev. A* 76 052317 (2007).

Nielsen M.A. and Chuang I.L., *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2000).

Quiroga L. and Johnson N.F., *Phys. Rev. Lett.* 83, 2270 (1999).

Reina J.H., Quiroga L., and Johnson N.F., *Phys. Rev. A.* 62, 012305 (2000).

Sanchez-Sanchez S., Sanchez-Mondragon J.J., Garcia-Melgarejo J.C., Alejo-Molina A., 22nd Congress of the International Commission for Optics: Light for the Development of the World, edited by Ramón Rodríguez-Vera, Rufino Díaz-Urbe, *Proc. of SPIE Vol. 8011, 801140* 2011 SPIE · CCC code: 0277-786X/11/\$18 · doi: 10.1117/12.903406

Sánchez Sánchez S., Sánchez Mondragón J.J., Castillo Soria F.R., *Representación de Puntos Cuánticos en la Base Atómica Coherente*, Memorias en extenso del LII Congreso Nacional de Física (SMF). Reunión Anual de Óptica (AMO). Acapulco Guerrero Octubre de 2009.

Sanchez-Mondragon J.J., Alejo-Molina A., Sanchez-Sanchez S. and Torres-Cisneros M., “Comparison of the Dicke Model and the Hamiltonian for n Quantum Dots”, *Quantum Dots, Nanoparticles, and Nanoclusters II*, edited by Diana L. Huffaker, Pallab K. Bhattacharya, *Proceedings of SPIE Vol. 5734* (SPIE, Bellingham, WA, 2005)

Wootters W.K., *Phys. Rev. Lett.* 80, 2245 (1998). *Quantum Inf. Comput.* 1, 27 (2001).

Yönac M., Yu T. and Eberly J. H., *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 39 (2006) S621-S625.

Yönac M., Yu T. and Eberly J. H., *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 40 (2007) S45-S59.

Yu T. and Eberly J. H. 2004 *Phys. Rev. Lett.* 93 140404.

Yu T. and Eberly J. H. *Optics Communications* 264 (2006) 393–397

Yu T. and Eberly J. H. 2002 *Phys. Rev. B* 66 193306;

Yu T. and Eberly J. H. 2003 *Phys. Rev. B* 68 165322.

Yu T. and Eberly J. H. *Quantum Information & Computation* Vol. 7 Issue 5, July 2007 Pages 459-468.