

Capítulo 6

La Matemática en la que se Sustenta la Tomografía Axial Computarizada

Jesús Manuel García Ruíz¹
Silvia Reyes Mora²

Resumen: Este trabajo se enmarca dentro de la modelación Matemática en la Ingeniería. Se exponen los aspectos físicos y matemáticos en los que descansa la estructura y el funcionamiento de la tomografía computarizada. Los aspectos físicos están relacionados con la adquisición de los datos y la modelación matemática del problema de reconstrucción de imágenes. Los aspectos matemáticos abarcan el uso de la transformada de Radon y de la transformada de Fourier, así como sus propiedades más importantes.

Palabras clave: Transformada de Radon, tomografía axial computarizada.

6.1 Introducción

La Tomografía Axial Computarizada (TAC), nace como un método o una herramienta en medicina mediante visualización por rayos X. El fundamento de la tomografía es la adquisición de una imagen por rayos X, de un corte transversal de un objeto, para distintos ángulos de rotación con respecto al mismo. Cada una de estas imágenes es una proyección del objeto y el problema consiste en obtener la estructura interna del objeto a partir de todas las posibles proyecciones ([Ferreira2008]).

¹chuchinkoff@hotmail.com. Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Tecnológica de la Mixteca.

²sreyes@mixteco.utm.mx. Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Tecnológica de la Mixteca.

Esta técnica busca superar tres limitaciones en la radiología convencional. Primero, la imposibilidad de mostrar en una imagen radiológica bidimensional toda la información contenida en una escena tridimensional, debido a la superposición de los objetos en la imagen que se tenía; segundo, la limitada capacidad para distinguir tejidos blandos; y finalmente, la imposibilidad de cuantificar las densidades de los tejidos ([Hounsfield1980]). Tras la pronta inclusión de la tomografía en la práctica clínica, no sólo se propusieron diferentes geometrías, sino que también se buscaron métodos que ofrecieran aproximaciones que permitieran reconstruir la imagen con el menor costo computacional posible. Esto llevó a que la retroproyección y la retroproyección filtrada [Shepp1974], originalmente propuestos en astronomía, fueran rápidamente adoptadas.

Los métodos matemáticos en los cuales se basa la TAC fueron desarrollados por A.M. Cormack en 1962 ([Cormack1963]), sin embargo desde 1917 Johann Radon planteó el problema de reconstruir una función f si se conocen sus integrales sobre rectas arbitrarias.

Si la ecuación normal de una recta es $p = x \cos \phi + y \operatorname{sen} \phi$, la integral sobre la recta se puede escribir como

$$F(p, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p \cos \phi - s \operatorname{sen} \phi, p \operatorname{sen} \phi + s \cos \phi) ds, \quad (6.1.1)$$

donde la función F es una *proyección* en una dimensión de la función f a un ángulo ϕ . Si se conoce esta F para todo ángulo ϕ , entonces a la función F se llamará la transformada de Radon bidimensional de la función f ([Stanley1983]). Así, el problema directo consiste en hallar $F(p, \phi)$ a partir del conocimiento de $f(x, y)$ mientras que el problema inverso es hallar $f(x, y)$ a partir del conocimiento de todas las proyecciones $F(p, \phi)$. El interés principal radica en hallar fórmulas de inversión de la transformada de Radon. Por ejemplo Minkowsky escribió el operador de inversión en término de funciones esféricas, Funk redujo el problema de la inversión en la transformada de Abel [Gindikin1992], mientras que Helgason aborda la transformada de Radon en geometría integral en espacios homogéneos [Helgason1999]. Usaremos esta última referencia para consultar algunas propiedades básicas de la transformada de Radon.

6.2 El modelo matemático de la TAC

Considere un plano fijo a través del cuerpo humano. Denote con $\rho(x, y)$ el cambio de densidad en el punto (x, y) y suponga que L es una recta en el plano que interseca al cuerpo. Suponga que se envía un haz delgado de rayos X al interior del cuerpo a lo largo de la dirección determinada por la recta L y se mide qué tanto es atenuada la intensidad del rayo cuando pasa a través del cuerpo. Parametrizando

L mediante

$$p e^{i\phi} + s e^{i\phi} \in \mathbb{C}, s \in \mathbb{R},$$

donde se hace la identificación de \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 . Se tiene que la atenuación de la intensidad I está descrita aproximadamente por $dI = -\gamma\rho I ds$ con $\gamma > 0$. Integrando a lo largo de la recta L se tiene

$$\ln I(s) = -\gamma \int_{s_0}^s \rho(p e^{i\phi} + s e^{i\phi}) ds,$$

o asumiendo que ρ es de soporte compacto, el algoritmo de la variación de intensidad del haz al ser aplicado en la dirección L viene dado por

$$\ln I(\infty) = -\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \rho(p e^{i\phi} + s e^{i\phi}) ds.$$

De esta forma se ve que a partir del conocimiento de la distribución de las densidades en el interior del cuerpo, la cual corresponde a los factores de atenuación del haz de rayos X, se pueden calcular todas las integrales de línea. Esta es la llamada transformada de Radon

$$\check{f}(p, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(p e^{i\phi} + s e^{i\phi}) ds, \quad p \in \mathbb{R}, \phi \in [0, \pi). \quad (6.2.1)$$

El problema directo consiste en calcular la transformada de Radon cuando ρ es dada, mientras que el problema inverso consiste en hallar a la función de densidades ρ si se conocen los valores de su transformada de Radon.

Se tiene que el problema inverso es un problema mal planteado en el sentido de Hadamard. En efecto, suponga que ρ tiene simetría radial y considere las rectas L paralelas al eje Y . Se tiene que $\rho = \rho(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, y el rayo L_x que pasa a través de $(x, 0)$ se puede parametrizar por (x, s) , $s \in \mathbb{R}$. Esto conduce a

$$V(x) := \ln(\infty) = -2\gamma \int_0^{\infty} \rho(\sqrt{x^2 + y^2}) ds. \quad (6.2.2)$$

Si nuevamente se asume que ρ es de soporte compacto contenido en X donde $X := \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq R\}$, R suficientemente grande, mediante el cambio de variable $s = \sqrt{r^2 - x^2}$ en (6.2.2) se llega a

$$V(x) = -2\gamma \int_x^{\infty} \frac{r \rho(r)}{\sqrt{r^2 - x^2}} dr = -2\gamma \int_x^R \frac{r \rho(r)}{\sqrt{r^2 - x^2}} dr.$$

Un último cambio adicional en las variables $z = R^2 - r^2$ y $y = R^2 - x^2$ transforma esta ecuación en la siguiente *ecuación integral de Abel* para la función $z \mapsto \rho(\sqrt{R^2 - z})$:

$$V(\sqrt{R^2 - y}) = -\gamma \int_0^y \frac{\rho(\sqrt{R^2 - z})}{\sqrt{y - z}} dz, \quad 0 \leq y \leq R.$$

Así, el problema inverso consiste en hallar ρ en esta última ecuación conociendo V , el cual es un problema mal planteado.

¿Qué tan serio es que este problema inverso sea mal planteado? Como ya se sabe, la estabilidad de la solución no está asegurada, por lo que en aplicaciones deben hallarse métodos que aseguren una buena estimación de la función f , ya que regularmente existen perturbaciones en la recolección de datos tales como factores de ruido. Para ello, se utiliza la regularización (filtros) para hallar a la mejor aproximación de la solución.

6.2.1 Adquisición de datos a partir de integrales de línea

Una imagen tomográfica o perfil consiste en las medidas de flujo de radiación a través de un objeto para distintos ángulos de incidencia. Considere un corte transversal que se divide en *vóxels* con dimensiones Δx , Δy , Δz donde a cada vóxel puede asignarse una atenuación μ (Figura 6.1).

Considérese también un rayo de intensidad I_0 , que penetra un objeto a lo largo de

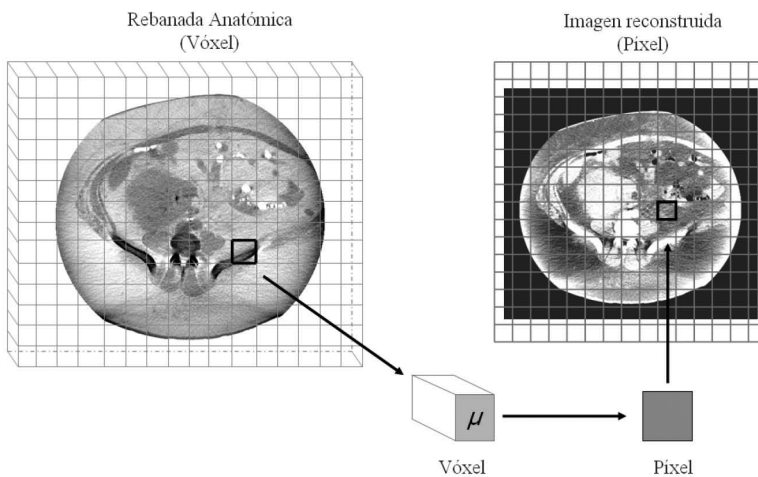


Figura 6.1: Proceso de adquisición de una imagen³

una trayectoria L , en línea recta, pasando por cada vóxel (o región discretizada del objeto) con una distribución no homogénea de atenuaciones $\mu(x)$. La intensidad del rayo que alcanza el detector $I(x)$ depende no sólo de la distancia atravesada x sino también de la atenuación $\mu(x)$ de cada punto en su trayectoria, obedeciendo la ley de Beer-Lambert:

$$I(x) = I_0 e^{-\int_L \mu(x) dx}. \quad (6.2.3)$$

Dado que es posible medir tanto I_0 como la intensidad de salida $I(x)$ en el

detector del tomógrafo, resulta conveniente escribir (6.2.3) como:

$$p(x) = -\ln \left(\frac{I(x)}{I_0} \right) = \int_L \mu(x) dx. \quad (6.2.4)$$

La ecuación (6.2.4) constituye una integral de línea o transformada de Radon de los coeficientes de atenuación lineal a través del recorrido de los rayos X. La *proyección* $p(x)$, formada por las integrales de línea paralelas o en abanico tiene implicaciones importantes. La primera, que el detector registra la integral de línea y ésta depende de las atenuaciones en cada región del objeto en la trayectoria del rayo. La segunda, que aunque se usa información volumétrica, el detector registra la proyección $p(x)$, que es una señal unidimensional para cada ángulo ϕ . Una de las suposiciones hechas es que cada vóxel contiene una atenuación uniforme (que corresponde a un tejido específico), lo cual no es necesariamente cierto, ya que es muy probable que existan vóxeles con dos o más materiales simultáneamente. Este efecto es llamado el efecto del volumen parcial que en algunas aplicaciones específicas (que no se abordan en este trabajo) debe ser corregido.

6.3 Sustento teórico de la solución del problema

La transformada de Radon se puede invertir con la transformada inversa de Radon, la cual se enuncia cuando la dimensión del espacio es impar. Pero también se tiene una definición para el caso en que la dimensión de espacio sea par. En adelante \mathbf{x}, \mathbf{y} y \mathbf{z} denotan vectores en \mathbb{R}^n mientras que $\boldsymbol{\xi}$ es un vector unitario en \mathbb{R}^n , p un escalar y $\Delta_{\mathbf{x}}$ el operador Laplaciano. Note que para un vector arbitrario $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, se cumple

$$\begin{aligned} \int f(\mathbf{y}) |\boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})| d\mathbf{y} &= \int \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{y}) |p| \delta(p - \boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})) dp d\mathbf{y} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int f(\mathbf{x} + \mathbf{z}) |p| \delta(p - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{z}) d\mathbf{z} dp \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |p| \check{f}(p + \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dp, \end{aligned}$$

donde en el último paso se usa la propiedad de traslación de la transformada de Radon.

Integrando sobre la esfera unitaria en \mathbb{R}^n (denotada por S^{n-1}) se tiene

$$\int_{|\boldsymbol{\xi}|=1} \int f(\mathbf{y}) |\boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})| d\mathbf{y} d\boldsymbol{\xi} = \int_{|\boldsymbol{\xi}|=1} \int_{-\infty}^{\infty} |p| \check{f}(p + \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dp d\boldsymbol{\xi}, \quad (6.3.1)$$

con $d\boldsymbol{\xi}$ el elemento de superficie en la esfera unitaria. Por otro lado, se tiene que la integral del lado izquierdo de (6.3.1) puede reescribirse usando la siguiente

identidad dada en [Hilbert1962]:

$$4(2\pi)^{n-1}(-1)^{(n-1)/2}f(\mathbf{x}) = \Delta_{\mathbf{x}}^{(n+1)/2} \int_{|\boldsymbol{\xi}|=1} \int f(\mathbf{y})|\boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})|d\mathbf{y}d\boldsymbol{\xi},$$

la cual es válida para n impar, $n \geq 3$. Note que el operador Laplaciano de la igualdad anterior se puede descomponer como $\Delta_{\mathbf{x}}^{(n+1)/2} = \Delta_{\mathbf{x}}^{(n-1)/2} \Delta_{\mathbf{x}}$, de donde se obtiene:

$$4(2\pi)^{n-1}(-1)^{(n-1)/2}f(\mathbf{x}) = \Delta_{\mathbf{x}}^{(n-1)/2} \Delta_{\mathbf{x}} \int_{|\boldsymbol{\xi}|=1} \int_{-\infty}^{\infty} |p|\check{f}(p + \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dp d\boldsymbol{\xi}. \quad (6.3.2)$$

Haciendo el cambio de variables $t = p + \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}$ se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |p|\check{f}(p + \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dp &= \int_{-\infty}^{\infty} |t - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}|\check{f}(t, \boldsymbol{\xi}) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} |t - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}|\check{f}(t, \boldsymbol{\xi}) dt + \int_{\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}}^{\infty} (t - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x})\check{f}(t, \boldsymbol{\xi}) dt \\ &= \int_{\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}}^{\infty} (t - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x})\check{f}(t, \boldsymbol{\xi}) dt - \int_{-\infty}^{\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} (t - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x})\check{f}(t, \boldsymbol{\xi}) dt. \end{aligned}$$

Usando la regla de Leibniz para diferenciar una integral y recordando la regla de la cadena se prueba que

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{x}} \int_{-\infty}^{\infty} |p|\check{f}(p + \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dp &= \Delta_{\mathbf{x}} \int_{\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}}^{\infty} (t - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x})\check{f}(t, \boldsymbol{\xi}) dt \\ &\quad - \Delta_{\mathbf{x}} \int_{-\infty}^{\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} (t - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x})\check{f}(t, \boldsymbol{\xi}) dt \\ &= -2\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi} \check{f}(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}). \end{aligned}$$

Dado que $\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi} = 1$ se tiene

$$\Delta_{\mathbf{x}} \int_{-\infty}^{\infty} |p|\check{f}(p + \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dp = -2\check{f}(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}).$$

Combinando esta última expresión con (6.3.2) se obtiene la fórmula de inversión de la transformada de Radon para n impar mayor o igual que 3.

Proposición 6.3.1 *Suponga que $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ con n impar, $n \geq 3$. Dada $\check{f}(p, \boldsymbol{\xi})$ se puede recuperar a la función f mediante*

$$f(\mathbf{x}) = C_n \Delta_{\mathbf{x}}^{(n-1)/2} \int_{|\boldsymbol{\xi}|=1} \check{f}(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \quad (6.3.3)$$

$$= C_n \int_{|\boldsymbol{\xi}|=1} \left(\frac{\partial}{\partial p} \right)^{n-1} \check{f}(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}. \quad (6.3.4)$$

donde

$$C_n = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{2(2\pi)^{n-1}} = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}}.$$

Como se vió anteriormente, encontrar una fórmula explícita de inversión para la transformada de Radon es muy complicado. En vez de eso, en esta sección se da un teorema que establece la relación entre la transformada de Radon y la transformada de Fourier lo cual permite recuperar a la función f de manera más sencilla.

Para ello note que dada $f \in \mathcal{D}$ localmente integrable se cumple:

$$\begin{aligned} F_n(f) &= \int f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \\ &= \int \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i t} \delta(t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) dt d\mathbf{x}, t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Usando el teorema de Fubini para intercambiar el orden de integración se tiene:

$$F_n(f) = \tilde{f}(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i t} \delta(t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} dt,$$

luego, si $\mathbf{k} = s \boldsymbol{\xi}$ y $t = sp$ con $s \in \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{\xi}$ un vector unitario en \mathbb{R}^n , entonces:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(s \boldsymbol{\xi}) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i sp} \left(\int f(\mathbf{x}) \delta(p - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} \right) dp \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(p, \boldsymbol{\xi}) e^{-2\pi i sp} dp. \end{aligned}$$

Es decir, se obtiene:

$$F_n(f) = F_1(\check{f}) = F_1(\mathcal{R}\{f\}),$$

donde \check{f} es la transformada de Radon n -dimensional de la función f .

Así, se ha podido establecer la relación que involucra la transformada de Radon con la transformada de Fourier. Razón por lo cual, se establece en el teorema siguiente ya que esta relación es fundamental para este trabajo, pues como se verá más adelante, los métodos de inversión más utilizados se fundamentan en esta relación.

Proposición 6.3.2 *Sea $f \in \mathcal{D}$ una función localmente integrable en \mathbb{R}^n . Entonces se tiene*

$$F_n(f) = F_1(\check{f}). \quad (6.3.5)$$

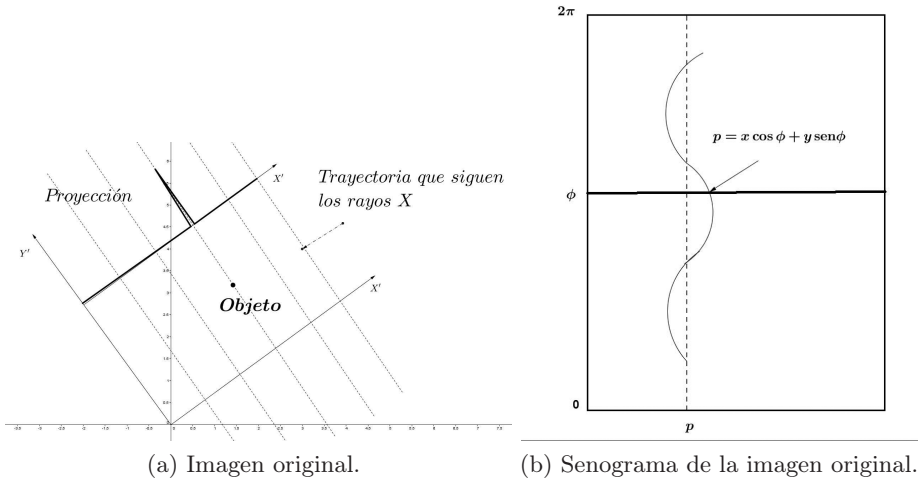


Figura 6.2: Representación de la imagen original y su respectivo senograma.

6.4 Reconstrucción de imágenes

En la reconstrucción tomográfica se presentan una serie de proyecciones medidas de 0 a 2π (aunque teóricamente sólo se necesitan proyecciones que cubran hasta π) en el *senograma* o transformada de Radon. Un senograma es el conjunto de proyecciones del objeto variando ϕ de 0 a 2π como lo ilustra la Figura 6.2.

Si se denota como $f(x, y)$ al mapa de atenuación del objeto que se quiere reconstruir y $\check{f}(p, \phi)$ la proyección de $f(x, y)$ a un ángulo ϕ , entonces se tiene que $p = x \cos \phi + y \sin \phi$. De donde

$$\check{f}(p, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) ds,$$

la cual es la transformada de Radon bidimensional de la función f , la cual se puede reescribir como:

$$\check{f}(p, \phi) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \delta(p - x \cos \phi - y \sin \phi) dx dy.$$

Las proyecciones tomográficas pueden expresarse como la transformada de Radon del mapa de atenuaciones del objeto que se desea reconstruir, con lo cual el problema de la reconstrucción es equivalente a encontrar la inversa de la transformada de Radon.

Para ello recuérdese que la transformada de Fourier de la expresión anterior es:

$$F_1\{\check{f}(p, \phi)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(p, \phi) e^{-2\pi i t p} dp.$$

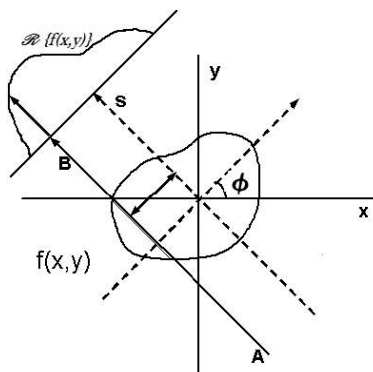


Figura 6.3: Diagrama que muestra la transformada de Radon o proyección de un objeto a un ángulo ϕ .

El *Teorema de Cortes de Fourier*, establece que la transformada unidimensional de Fourier de una proyección $\check{f}(p, \phi)$ de un objeto es igual a la transformada bidimensional de Fourier de la función $f(x, y)$ evaluada en la recta de esta proyección, es decir:

$$F_2\{f\} = F_1\{R(f)\}. \quad (6.4.1)$$

El teorema de cortes de Fourier indica que la proyección al ángulo ϕ produce una sección transversal de la transformada bidimensional de Fourier del objeto original como lo ilustra la Figura 6.4.

La transformada inversa de Fourier de $F_2\{f\}$ deja como resultado la reconstrucción completa de $f(x, y)$, es decir:

$$f(x, y) = F_2^{-1}\{F_1\{R(f)\}\}.$$

6.4.1 Retroproyección filtrada

Como se vio en la sección anterior, es posible recuperar a la función f usando el teorema de cortes de Fourier, sin embargo; al momento de implementar este método, resulta muy costoso en cuestiones computacionales debido a la gran cantidad de proyecciones que se realizan. Para esto, se han investigado diferentes técnicas de implementación de este tipo de reconstrucción. Entre ellos destaca el *algoritmo de retroproyección filtrada*, el cual se describirá en esta sección.

Definición 1 Considere una función arbitraria $\psi(t, \xi)$ localmente integrable, donde $t = \xi \cdot \mathbf{x} = x \cos \phi + y \sin \phi$. Se define el operador de retroproyección B como

$$B(\psi)(x, y) = \int_0^\pi \psi(x \cos \phi + y \sin \phi, \xi) d\phi, \quad (6.4.2)$$

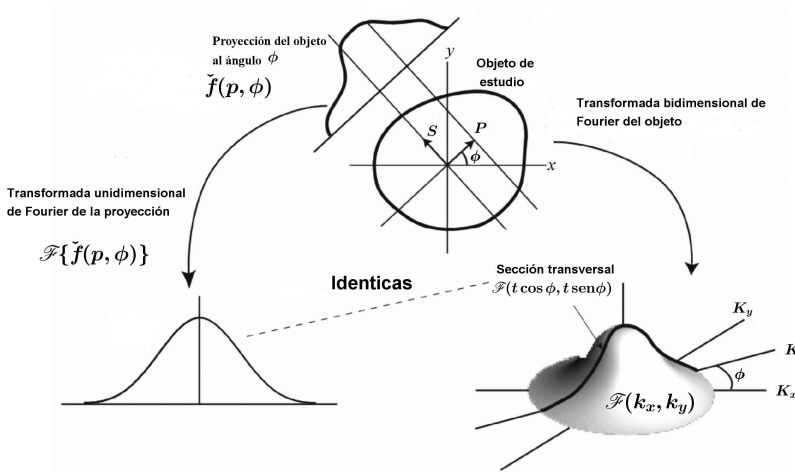


Figura 6.4: Ilustración del teorema de cortes de Fourier.

o en coordenadas polares mediante

$$B(\psi)(r, \theta) = \int_0^\pi \psi(r \cos(\theta - \phi), \phi) d\phi, \quad (6.4.3)$$

donde $x = r \cos \theta$ y $y = r \text{sen} \theta$.

Recordando la fórmula de retroproyección filtrada, se tiene:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \mathcal{F}_1\{\check{f}(p, \phi)\} e^{2\pi i t k} |k| dk d\phi \\ &= \int_0^\pi Q_\phi(x \cos \phi + y \text{sen} \phi) d\phi, \end{aligned} \quad (6.4.4)$$

donde:

$$Q_\phi(p) = \int_{-\infty}^\infty S_\phi(k) |k| e^{2\pi i k p} dk.$$

Por lo tanto es posible recuperar a la función f aplicando un filtro $|k|$. El objetivo de usar este filtro es recuperar las altas frecuencias que se han atenuado en el proceso de retroproyección. Con todo, el algoritmo de retroproyección filtrada puede implementarse como sigue:

- Aplicar la transformada de Fourier unidimensional a las proyecciones para obtener $S_\phi(k)$.
- Multiplicar $S_\phi(k)$ por el filtro $|k|$.
- Calcular la transformada inversa de Fourier unidimensional de $S_\phi(k)|k|$ para obtener las proyecciones filtradas $Q_\phi(p)$.

- Aplicar el operador de retroproyección a $Q_\phi(p)$.

Note que como $Q_\phi(p) = \mathbb{F}_1^{-1}\{|k| \mathbb{F}_1\{R(f)\}\}$, entonces por el teorema de convolución $Q_\phi(p)$ se puede expresar como

$$\begin{aligned} Q_\phi(p) &= \mathbb{F}_1^{-1}\{|k|\} * \mathbb{F}_1^{-1}\{\mathbb{F}_1\{R(f)\}\} \\ &= \mathbb{F}_1^{-1}\{|k|\} * R(f). \end{aligned} \quad (6.4.5)$$

Observe que la función:

$$E(p) = \mathbb{F}_1^{-1}\{|k|\} = \int_{-\infty}^{\infty} |k| e^{2\pi i k p} dk$$

no existe para todos los valores de p . Para ello considere $p = 0$, luego $E(0)$ es simplemente el área bajo la curva $|k|$, sin embargo, cuando $k \rightarrow \pm\infty$ se tiene que $E(0) \rightarrow \infty$. Así, la ecuación (6.4.5) no puede aplicarse directamente.

Para ello suponga que la transformada de Fourier de la proyección es de soporte compacto. Bajo este supuesto, se tiene que:

$$Q_\phi(p) = \int_{-\Gamma}^{\Gamma} S\phi(k) |k| e^{2\pi i k p} dk.$$

Esta ecuación indica que para calcular la proyección filtrada $Q_\phi(p)$, primero hay que calcular la transformada de Fourier unidimensional de la transformada de Radon para obtener $S\phi(k)$, multiplicándola después por $|k|$ en el rango de $(-\Gamma, \Gamma)$ para posteriormente calcular la transformada inversa de Fourier unidimensional. Desafortunadamente en la práctica esto no es tan sencillo de realizar puesto que no es tan sencillo discretizar el filtro. Para asegurar un buen muestreo, el ancho de banda Γ tiene que satisfacer el criterio de muestreo de Nyquist ([Hsieh2003]):

$$\Gamma = \frac{1}{2\delta} \text{ ciclos/mm},$$

donde δ es el intervalo de muestreo de la proyección en milímetros. Bajo esta condición, se puede definir la función $H(w)$ como:

$$H(w) = \begin{cases} |w|, & \text{si } |w| < \Gamma; \\ 0, & \text{si } |w| \geq \Gamma, \end{cases}$$

cuya transformada inversa de Fourier es la función:

$$\begin{aligned} h(p) &= \int_{-\Gamma}^{\Gamma} |w| e^{2\pi i k p} dk \\ &= \frac{-1 + \cos(2\pi p \Gamma) + 2\pi p \Gamma \text{sen}(2\pi p \Gamma)}{2p^2 \pi^2}. \end{aligned}$$

Mediante algunos cálculos se ve que la función h puede expresarse como

$$h(p) = \frac{1}{2\delta^2} \left(\frac{\text{sen}(2\pi p\Gamma)}{2\pi p\Gamma} \right) - \frac{1}{4\delta^2} \left(\frac{\text{sen}(\pi p\Gamma)}{\pi p\Gamma} \right)^2. \quad (6.4.6)$$

Dado que la función $H(w)$ es una función par en la variable w , $h(p)$ también es una función par ([Hsieh2003],[Hsu1970]). Con todo, la ecuación (6.4.4) queda como:

$$f(x, y) = \int_0^\pi \int_{-p_m}^{p_m} \check{f}(p', \phi) h(p - p') dp', \quad (6.4.7)$$

donde p_m es el valor a partir del cual se tiene $\check{f}(p', \phi) = 0$ para todo p' tal que $|p'| > p_m$. Aquí se usa el hecho de que f es de soporte compacto. Dado que en las computadoras los cálculos de esta fórmula de retroproyección filtrada se realizan mediante valores enteros múltiplos de δ , entonces sustituyendo $t = n\delta$ en la ecuación (6.4.6) se tiene:

$$h(n\delta) = \begin{cases} 1/4\delta^2, & \text{si } n = 0; \\ 0, & n \text{ par}; \\ -1/(n\pi\delta)^2, & n \text{ impar.} \end{cases}$$

En resumen, en esta sección se analizó la fórmula de retroproyección filtrada, observando que aunque teóricamente es posible reconstruir a la función f , en la aplicación resulta complejo aplicarla debido a la naturaleza de trabajar con un número finito de proyecciones y la discretización del kernel truncado $|k|$.

Bibliografía

- [Cormack1963] CORMACK, A. **Representation of a function by its line integrals with some radiological applications.** Journal of Applied Physics 34 (1963) pp. 2722–2727.
- [Ferreira2008] FRANCO FERREIRA, L. **Desarrollo, puesta en marcha y caracterización de un sistema de Tomografía Axial Computarizada para ensayos no destructivos..** Servicio de Publicaciones e Intercambio Científico, 2008.
- [Gindikin1992] GINDIKIN, S. G. **Some notes on the Radon transform and integral geometry.** Springer 1 (1992), 23–32.
- [Giraldo2008] GIRALDO, J. R., CLAVIJO, C. A., AND MCCOLLOUGH, C. **Tomografía computarizada por rayos x: Fundamentos y actualidad.** Revista de Ingeniería Biomédica 2 (2008), 13–31.
- [Helgason1999] HELGASON, S. **The Radon transform.** second ed. Birkhäuser, Pearson Prentice Hall, 1999.
- [Hilbert1962] HILBERT, D., AND COURANT, R. **Methods of Mathematical Physics.** Interscience, 1962.
- [Hounsfield1980] HOUNSFIELD, G. **Computed medical imaging.** Science 1 (1980), 22–28.
- [Hsieh2003] HSIEH, J. **Computed Tomography: principles, design, artifacts and recent advances..** Washington, SPIE Press, 2003.
- [Hsu1970] HSU, H. P. **Fourier analysis.** Simon and Schuster, 1970.
- [Shepp1974] SHEPP, L., AND LOGAN, B. **The Fourier reconstruction of a head section.** Transactions on nuclear science 1 (1974), 21–43.
- [Stanley1983] STANLEY DEANS, R. **The Radon transform and some of its applications.** University of South Florida, 1983.