

Capítulo 3

Efecto de las Inspecciones en Redes Sociales

Juan Carlos Nuño¹
Francisco J. Muñoz²
Mario Primicerio³

Abstract:

We consider a population that forms a social network. Information flows through the links of the network. The population is randomly inspected whether the individuals adopt a legal conduct (payers) or not (evaders). Inspected evaders are obligated to be a law abiding citizen (payers). These payers can become evaders with a rate of recidivism ρ , whose values range from $\rho = 0$ (never) to $\rho = 1$ (immediately). We study the way in which the structure of the network determines the effect of the inspection. It is assumed that a unique inspection is performed on a population formed entirely by evaders. The population distribution change over time until reaching its stationary state. We show that during this evolution the interface that separates both subpopulations reaches a maximum number of nodes at a given time and these values depends on the network structure. The network is modeled as a Watts-Strogatz Small World network whose topology can be calibrated with the parameter p (probability of rewiring). We apply a local updating rule that takes into account the proportion of nearest neighbors in each state. We discuss these results within the context of tax evasion where inspection strategies may be relevant.

Keywords: Social Network, Tax evasion, Interface dynamics

Resumen: Consideramos una población que forma una red social. La información fluye a través de los enlaces de la red. La población es inspeccionada aleatoriamente asumiendo que los individuos adoptan una conducta legal

¹juancarlos.nuno@upm.es. Departamento de Matemática Aplicada. Universidad Politécnica de Madrid. 28040 Madrid, España.

²f.j.munoz.ortega@gmail.com. Sin adscripción.

³mario.primicerio@math.unifi.it. Dipartimento di Matematica e Informatica, viale Morgagni- 50134 Firenze, Italia. Gruppo Nazionale Fisica Matematica e Istituto per le Applicazioni del Calcolo.

(pagadores) o no (evasores). Los evasores son obligados a ser ciudadanos obedientes (pagadores). Estos pagadores inspeccionados pueden volver a defraudar con una tasa de reincidencia ρ , cuyo valor va desde $\rho = 0$ (nunca) hasta $\rho = 1$ (inmediatamente). Estudiamos el caso en el que la estructura de la red determina el efecto de la inspección. Se asume que se realiza una única inspección sobre una población formada enteramente por evasores, y, como resultado, la distribución de la población cambia con el tiempo hasta alcanzar un estado estacionario. Mostramos que durante esta evolución la interfase que separa las dos subpoblaciones alcanza un valor máximo de nodos en un tiempo dado y estos valores dependen de la estructura de la red. La red se modela como una red *Small World* de Watts-Strogatz cuya topología puede calibrarse con el parámetro p (probabilidad de reenlazado). Aplicamos una regla local de actualización que tiene en cuenta la proporción de vecinos más cercanos en cada estado. Discutimos estos resultados dentro del contexto de la evasión de impuestos donde las estrategias de inspección pueden ser relevantes.

3.1 Introducción

El comportamiento de los individuos en la mayoría de las sociedades está condicionado por diversos fenómenos externos. Según su grado de actuación estos fenómenos pueden ser globales; por ejemplo, el causado por la limitación de recursos, o locales, a través de las interacciones entre individuos "vecinos". Las interacciones son de muy diverso carácter e influyen de distinta forma en la evolución del comportamiento de la población en su conjunto. Un ejemplo concreto se da con la transmisión de opiniones donde la actitud personal depende en gran medida de la opinión de amigos, vecinos, colegas, conocidos y, a escala global, de la opinión pública (ver [12]). La forma en que unos individuos opinan, afecta a la opinión de otros, generando así, mediante contagios individuo a individuo, una transmisión de la información. La difusión de la opinión no queda determinada exclusivamente por la existencia del contacto (enlace) sino que, en la propagación intervinen de forma relevante otros dos factores: (i) La regla de contagio (ver [9]) y (ii) la geometría (topología) de la red de interacción (ver [22]).

Aunque este trabajo tiene un alcance más amplio, está inspirado por el problema de la evasión de impuestos (ver [17]). La información que se transmite entre los individuos de la población tiene que ver, por tanto, con su actitud frente al cumplimiento de las obligaciones fiscales. Se supone que los individuos adoptan una determinada conducta porque la consideran ventajosa y la comentan con sus vecinos. Los vecinos adoptarán o no esta conducta en el futuro, en función de las reglas de contagio que se establezcan en el modelo. Notemos que los vecinos de un determinado individuo (nodo) no son equivalentes ya que ellos a su vez reciben otras influencias de sus propios vecinos. Esta interacción compleja entre los individuos de una población induce una dinámica de opinión que no es inmediata de resolver (ver [20]).

Una forma de controlar el comportamiento de una red social, es mediante intervenciones o inspecciones (ver [19]). En nuestras sociedades, las inspecciones por parte de un organismo supervisor tienen un efecto disuasorio para prevenir conductas delictivas

como la evasión de impuestos (ver [1, 23]). Sin embargo, estas inspecciones son costosas y, por lo tanto, tienen que llevarse a cabo de una manera racional (ver [16, 14]). En este trabajo afrontamos cómo las inspecciones pueden condicionar el establecimiento de una conducta delictiva frente al pago de impuestos en una población de individuos que interaccionan formando una red o grafo.

Nuestro modelo incorpora las inspecciones y analiza el efecto que tiene sobre la propagación de la información. Consecuentemente, el modelo considera que los individuos solo pueden tener dos conductas o, equivalentemente, dos estados de influencia: (A) pagador o (B) evasor (ver [18, 13]). Estudiamos el efecto de realizar una única inspección inicial sobre una población formada completamente por evasores. Esto es consistente con el hecho de asumir que las inspecciones ocurren en una escala de tiempo mayor que el período de relajación de la población. El trabajo no solo estudia la distribución de la población en el equilibrio sino que, además, incorpora el análisis de cómo se mueve la interfase entre las poblaciones de evasores y pagadores.

Los evasores inspeccionados se vuelven pagadores y, por haber sido inspeccionados se modifica su comportamiento frente a la influencia del entorno. En concreto, un evasor inspeccionado convertido a pagador tiene un factor de abandono de ese estado, ρ , que toma valores desde $\rho = 0$ (pagador eterno), hasta $\rho = 1$ (inspección sin efecto temporal). Con este factor se pretende captar la disuasión que supone la inspección. Es interesante resaltar que en el caso extremo $\rho = 0$, los individuos inspeccionados que ya nunca serán evasores juegan un papel equivalente al descrito para los zelotes o individuos testarudos que nunca cambian de opinión (ver [8, 10]).

Los modelos de grafos o redes complejas son idóneos para simular la evolución de una opinión en una sociedad interconectada (ver [2]). Los individuos están relacionados unos con otros mediante enlaces sociales, estos enlaces son los que permiten la transmisión de, por ejemplo, la propensión a pagar impuestos. Como ya hemos comentado, la forma en la que el flujo de información ocurre, es decir la regla que rige la transmisión entre individuos, y la estructura de la red social son dos de los aspectos principales que determinan la evolución de la opinión y, en nuestro caso, la influencia final de las inspecciones (ver [13]).

Debido a que la información concerniente a la evasión de impuestos se puede considerar como materia delicada, los canales sociales por donde transcurre esta información son muy específicos. En general, un individuo comparte su conducta fiscal exclusivamente con los más allegados lo cual induce una red de contactos que se puede asimilar a un red de tipo *Small World* (ver [21]). Efectivamente, estas redes pueden presentar de manera simultánea un alto índice de agrupamiento (*clustering*) y un valor pequeño de la longitud del camino medio entre nodos (*average path length*). El modelo de *Small World* de Watts-Strogatz es de especial interés ya que, por una parte es sencillo de manejar y, por otra, permite ser ajustado a distintas situaciones mediante el calibrado del parámetro p , conocido como probabilidad de reenlazado o redirección de enlaces. Además, la generación de la red es sencilla: se parte de una red regular en anillo con N nodos conectados simétricamente cada uno con sus k vecinos más cercanos y se transforma reenlazando nodos elegidos aleatoriamente con probabilidad p . Notemos que la reasignación de los enlaces conserva el valor medio de la conectividad k de la red para todo p . Como se observa en la Figura 3.1, el parámetro p permite modular la geometría de la red, desde la red regular tipo anillo ($p = 0$) hasta una red aleatoria ($p = 1$).

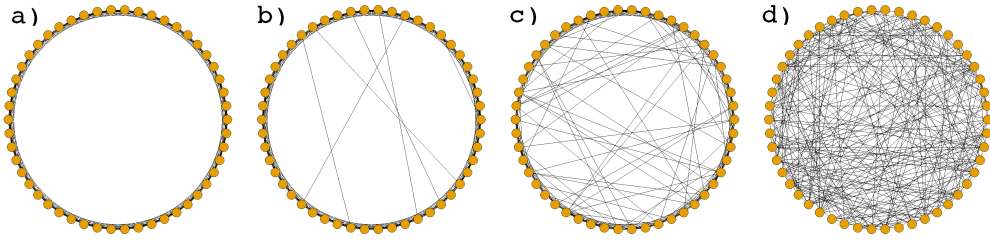


Figura 3.1: Ejemplo de redes *Small World* donde la probabilidad de reenlazado p , toma los valores a) $p = 0$, b) $p = 0.01$, c) $p = 0.1$ y d) $p = 1$.

3.2 Modelo en red

La influencia temporal de una inspección sobre una red formada inicialmente por individuos evasores dependerá de: 1) la intensidad de la inspección, ν , es decir, el número de individuos inspeccionados respecto del total de la población, 2) la prevalencia en los individuos inspeccionados del efecto o castigo de la inspección, que aquí modulamos con el parámetro ρ (probabilidad de olvidar el castigo), 3) la topología de la red, queda determinada en las redes *Small World* por los parámetros p y k , y 4) la regla local de difusión o actualización de los estados de los nodos.

En relación con el último punto, como ya hemos comentado, las interacciones entre individuos de la población permiten que la información se propague a través de los nodos. En cada paso de tiempo, cada nodo es influido por el estado actual de sus vecinos. Se pueden definir muchas reglas locales de transmisión/contagio entre nodos vecinos (ver [9, 5]). En este trabajo nos vamos a centrar en una forma probabilística de actualizar el estado de un individuo a partir de la valoración de los estados de los vecinos. En concreto, definimos la probabilidad de cambio de un nodo i con conectividad media $\hat{k}(i)$ de un estado S_2 a un estado S_1 como el cociente $N(i)_{S_1}/k(i)$, donde $N(i)_{S_1}$ es el número de vecinos que en ese paso de tiempo están en el estado S_1 , es decir:

$$P(i)_{S_2 \rightarrow S_1} = \frac{N(i)_{S_1}}{\hat{k}(i)}. \quad (3.2.1)$$

Por lo tanto, la probabilidad de permanecer en el estado S_2 es:

$$P(i)_{S_2 \rightarrow S_2} = 1 - P(i)_{S_2 \rightarrow S_1}. \quad (3.2.2)$$

De forma similar se define la probabilidad de cambio desde el estado S_1 al estado S_2 .

En un primer paso, supondremos que el efecto de la inspección y detección es para siempre; es decir, $\rho = 0$. Además, consideraremos la situación que inicialmente es más desfavorable; esto es, que en el momento de la inspección, toda la población está formada por evasores. Además, supondremos que inicialmente una proporción ν de individuos son inspeccionados. El efecto inmediato de esta inspección es que en la población va a existir una proporción ν de pagadores perpetuos desde el inicio. En otras palabras, la inspección ha reducido el número de nodos que pueden adoptar el estado evasor en cada

paso de tiempo. Más adelante, veremos cuál es el efecto de considerar que los individuos inspeccionados tienen una probabilidad $\rho > 0$ de convertirse de nuevo en evasores.

Dada una distribución inicial, la población evoluciona hasta un estado de equilibrio caracterizado por una distribución de evasores y pagadores. Para cada combinación de parámetros inicial mostraremos la evolución temporal del valor promedio de 10 realizaciones de cada simulación. En todos los casos la población total se fija en $N = 1000$ y la inspección inicial será de un individuo, por lo que $\nu = 0.001$. Las redes han sido creadas con el paquete *igraph* de *R* (igraph.org/r/) (ver [6]) siguiendo el modelo *Small World* de Watts-Strogatz (ver [21]) con un número medio de enlaces por nodo, o conectividad media, $\hat{k} = 5$. La población inicial en todos los casos, corresponde con la situación menos desfavorable para la lucha contra la evasión de impuestos que es que todos los individuos sean evasores. Las simulaciones barrerán todo el rango de variación de p , esto es el intervalo $[0, 1]$.

3.3 Aproximación de campo medio

De la teoría de transmisión de enfermedades infecciosas se sabe que las reglas de contagio locales continuas dan lugar a términos de difusión promedios de tipo *bimolecular*, en el sentido de que la tasa de transmisión desde un estado *Susceptible* a un estado *Infectado* es proporcional al producto del número de miembros en ambos estados (ver, por ejemplo, [15]). Dado que las redes *Small World* de Watts-Strogatz son homogéneas, es decir, tienen una única escala de conectividad, el comportamiento estadístico de todos los nodos es similar y en un nivel de campo medio, la dinámica de la población se puede describir mediante Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Para un tiempo t dado, denominamos $x(t)$ e $y(t)$ a las densidades de pagadores y evasores en la población, respectivamente. Se asume que la población está formada inicialmente por evasores de los que una pequeña fracción ν son inspeccionados y permanecen como pagadores para siempre (esto es, $\rho = 0$). Por lo tanto, sólo una fracción $1 - \nu$ de la población puede cambiar de estado a medida que el tiempo pasa y en cada paso de tiempo, se satisface la condición de normalización $x(t) + y(t) = 1 - \nu$.

Comencemos considerando el caso más simple, una red homogénea en la que cada nodo está conectado con todos los demás nodos ($k = N$). En cada paso de tiempo de la evolución de la fracción de pagadores $z(t) = x(t) + \nu$ se describe por una ecuación que expresa el hecho de que la tasa de cambio del número de pagadores es la diferencia entre la tasa en la que los evasores se convierten en pagadores y la tasa en la que los pagadores se convierten en evasores. De acuerdo con la regla de contagio continua, resulta la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dz}{dt}(t) = \alpha[z(t)(1 - z(t)) - (1 - z(t))(z(t) - \nu)], \quad (3.3.1)$$

donde α es una constante que representa la escala temporal de evolución de la población ([11]). Así, tenemos la ecuación de campo medio:

$$\frac{dz}{dt}(t) = \alpha\nu(1 - z(t)). \quad (3.3.2)$$

En el caso de redes generales, es razonable asumir que la escala temporal depende tanto de la conectividad media \hat{k} como del parámetro p y, por lo tanto, se puede escribir:

$$\frac{dz}{dt}(t) = \Theta_0(\hat{k}, p)\nu(1 - z(t)). \quad (3.3.3)$$

Esta ecuación es lineal y por lo tanto se puede resolver de manera analítica. Si suponemos la condición inicial $z(0) = \nu$, entonces, la solución del Problema de Valor Inicial es:

$$z(t) = 1 - (1 - \nu)e^{-\nu\Theta_0(\hat{k}, p)t}. \quad (3.3.4)$$

Para $\hat{k} > 0$, el único punto de equilibrio es $z = 1$, independientemente del valor de ν , lo que significa que la población asintótica está formada exclusivamente por pagadores. Notemos la diferencia con respecto al caso de la propagación logística de una epidemia donde los contagios actúan en un único sentido, desde los individuos infectados a los susceptibles.

La dependencia funcional de Θ_0 con p se puede ver en las simulaciones numéricas de la población (ver Figura 3.5). La comparación de los datos numéricos con la solución de la ecuación diferencial, para los valores de $\hat{k} = 5$ y $N = 1000$ permite obtener un buen ajuste con la función:

$$\Theta_0(\hat{k}, p) = \alpha(\hat{k}) - \beta(\hat{k})e^{-\gamma(\hat{k})p}, \quad (3.3.5)$$

donde $\alpha(5) = 1.072$, $\beta(5) = 0.8966$, $\gamma(5) = 9.043$. Un análisis más pormenorizado de este ajuste se puede encontrar en [13].

3.4 Evolución de la red: influencia de la inspección

En la sección anterior ya se comentó que cuando la regla local de difusión es de tipo probabilística y continua, las inspecciones que convierten en eternos pagadores a los nodos inspeccionados que eran evasores llevan a la población a un estado de consenso en el que todos los individuos son pagadores. El mismo efecto ha sido descrito por otros autores cuando se consideran individuos zelotes que nunca ceden su opinión en redes sociales (ver [10, 8]). En estos casos, como el único estado de equilibrio asintóticamente estable es una población de pagadores, el problema a resolver ya no es de índole cualitativo sino dinámico. Específicamente, nos interesa conocer cómo se lleva a cabo la convergencia hacia el equilibrio en función de los parámetros que definen el sistema y las condiciones iniciales.

En un trabajo previo ya estudiamos cómo la tasa de cambio en la ecuación de campo medio dependía de la conectividad y la propia estructura de la red (además, del tamaño de la población, (ver [13])). Así mismo, detectamos que la aproximación de campo medio no producía resultados aceptables para conectividades bajas y redes casi-regulares, es decir, con valores de p bajos. Concretamente, para $\hat{k} = 5$, $N = 5000$, $\nu = 0.02$, las discrepancias se detectaban cuando $p < 0.1$. Una explicación plausible a esta discordancia es la fuerte relevancia de las fluctuaciones locales debido a la regularidad de la red que no permite contactos a larga distancia y que, unido a la escasez de pagadores iniciales modifican la tasa de contagio en los primeros instantes de la propagación. Como se propone en [13], una forma de ajustar los datos de las simulaciones y el modelo de campo medio consiste en suponer que la tasa de crecimiento de la población de

pagadores depende del tiempo de forma que durante un período inicial es superior a la tasa asintótica a la que tiende exponencialmente.

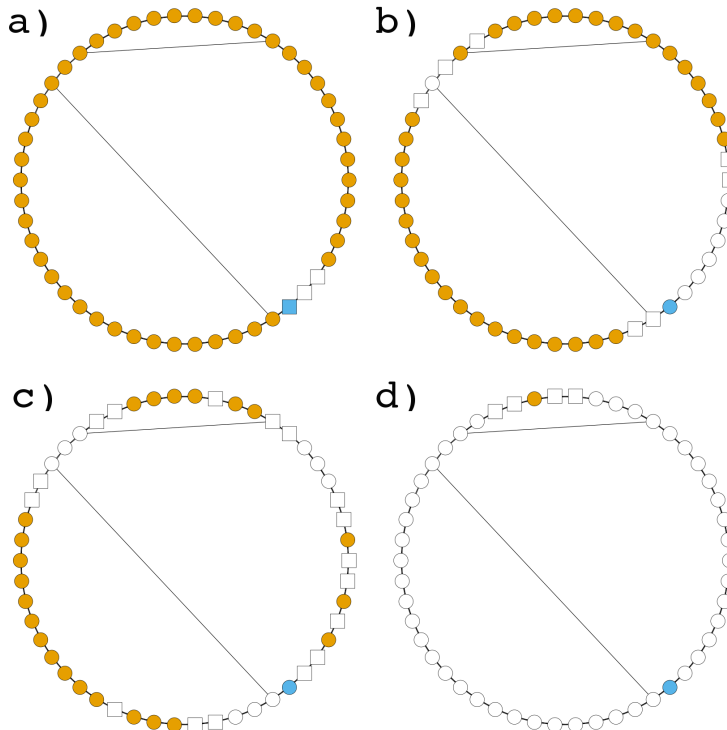


Figura 3.2: Evolución de una red de pagadores (blanco), evasores (amarillo) e inspeccionado (azul) para diferentes pasos de tiempo en una red con 50 nodos, $\hat{k} = 2$ y $p = 0.01$, tras la realización de la inspección. También se muestran los individuos que en esos pasos de tiempo forman parte de la interfase, es decir son pagadores con al menos un vecino evasor, mostrando dichos nodos con forma cuadrada.

En esta sección se muestran los resultados arrojados por la simulación de las redes *Small-World* tras la realización de una única inspección para el caso $\rho = 0$. Tal como se ha comentado previamente, este hecho lleva a una única situación de equilibrio donde todos los individuos de la red son pagadores. En la Figura 3.2, mostramos un ejemplo de cómo es la dinámica de la evolución, donde se representa para diferentes pasos de tiempo los estados pagador (en blanco) y evasor (en amarillo) de cada nodo en una red con 50 nodos, $\hat{k} = 2$ y $p = 0.01$, tras la realización de la inspección (el individuo inspeccionado se muestra en azul). También pueden apreciarse los individuos que en esos pasos de tiempo forman parte de la interfase, es decir son pagadores con al menos un vecino evasor (nodo con forma cuadrada).

Las evoluciones temporales del número de pagadores en las redes de 1000 nodos, inicialmente todos evasores y con un único individuo inspeccionado, para diferentes valores de p se encuentran en la Figura 3.3, donde cada curva representa el resultado promedio de 10 repeticiones con la misma configuración inicial; también se muestra un

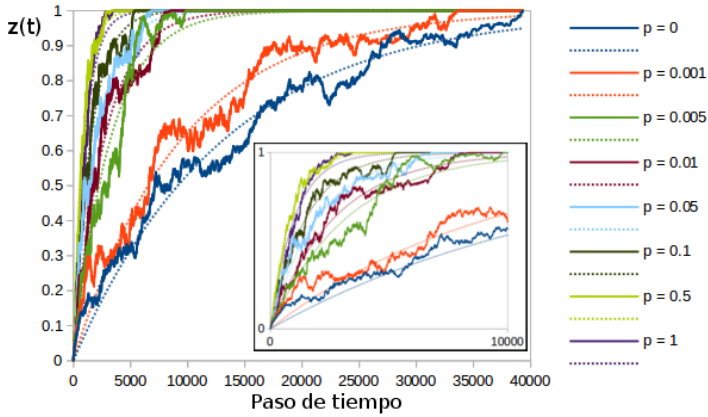


Figura 3.3: Evolución temporal del número de pagadores $z(t)$ para diferentes valores de p , con $\hat{k} = 5$, $\rho = 0$ y $\nu = 0.001$. Las curvas se han obtenido a partir de la media de 10 realizaciones con la misma condición inicial. Las líneas de puntos muestran el ajuste a la correspondiente solución teórica.

ajuste de los datos a la ecuación de campo medio (3.3.4), obteniendo unos valores del ajuste de Θ_0 que se detallan en la Tabla 3.1. Se puede ver que para todos los valores de p la población de pagadores crece hasta alcanzar el total de la población. Este crecimiento es lento para valores bajos de p . En cambio, para $p \geq 0.01$, los pagadores crecen muy rápidamente. La diferente velocidad de crecimiento en los primeros pasos de tiempo se aprecia mejor en la ventana de la Figura 3.3.

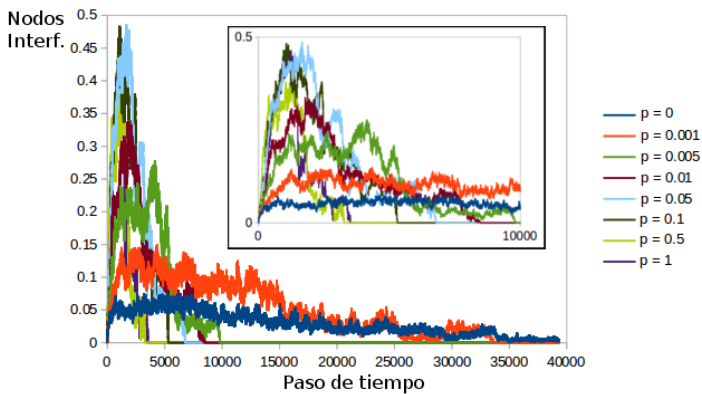


Figura 3.4: Evolución temporal del tamaño de la interfase, definida como el número de nodos pagadores con al menos un vecino evasor, para diferentes valores de p , con $\hat{k} = 5$, $\rho = 0$ y $\nu = 0.001$. Cada curva mostrada es el resultado promedio de 10 repeticiones con la misma configuración inicial.

Para profundizar en el estudio de la difusión en la red, parece interesante conocer la dinámica de la interfase entre pagadores y evasores (ver [3, 4]). Hay dos maneras sencillas de definir una interfase: (i) como el conjunto de nodos (evasores o pagadores)

p	Θ_0	R^2
0	0.075	0.976
0.001	0.106	0.966
0.005	0.309	0.943
0.01	0.369	0.967
0.05	0.501	0.972
0.1	0.658	0.978
0.5	1.182	0.992
1	0.970	0.966

Tabla 3.1: Valores de Θ_0 obtenidos al ajustar los resultados del número de pagadores $z(t)$ de las simulaciones numéricas con la ecuación (3.3.4) de campo medio para $\hat{k} = 5$, $\rho = 0$ y $\nu = 0.001$. Cada curva mostrada es el resultado promedio de 10 repeticiones con la misma configuración inicial. Notemos el alto valor de los coeficientes R^2 , lo que implica unos ajustes adecuados.

que tienen algún vecino de otro tipo, (ii) como el conjunto de enlaces (arcos) que unen nodos de distinto tipo (ver [18]). Seguimos suponiendo que inicialmente, se realiza una inspección sobre una proporción ν de la población total de evasores y que los individuos inspeccionados permanecen como pagadores durante todo el tiempo restante. Ya sabemos que, en este caso, la población final está formada totalmente por pagadores. En consecuencia, la interfase a tiempo inicial está formada por ν nodos (y, aproximadamente, $\nu \hat{k}$ enlaces). En el equilibrio, obviamente, no quedará ninguna interfase. Entre ambas situaciones, el movimiento de la interfase depende de las características de la red, en concreto de su conectividad media y el valor del parámetro de reenlace, p . En la Figura 3.4 se muestran las evoluciones de las interfases para diferentes valores de p . Es interesante destacar que para valores altos de p , hay momentos de tiempo donde casi el 50% de la población forma parte de la interfase, en cambio para valores bajos de p apenas se llega a un 10%. La relación entre p y el tamaño máximo de la interfase, se muestra en la Figura 3.4. Observemos el rápido crecimiento del máximo tamaño de la interfase con p y la estabilización a partir de $p = 0.1$. Esto está relacionado con las propiedades topológicas de las redes *Small World* que para valores bajos de p se asemeja a redes regulares, con alta longitud del camino medio y que pasan a ser casi aleatorias con un pequeño crecimiento de p , donde drásticamente se reduce esta longitud del camino medio.

3.5 Influencia de ρ en el equilibrio de la población

En la secciones anteriores se ha considerado el caso extremo en el que los evasores inspeccionados se convierten en pagadores para siempre. Esta hipótesis se puede relajar para permitir que los individuos escarmentados, que son pagadores que provienen de evasores inspeccionados, puedan reincidir y cambiar su estado a evasor (ver [7]). En esta sección, supondremos que los individuos escarmentados pueden ser contagiados por los vecinos evasores pero con una eficiencia menor que el contagio de los individuos

pagadores (no inspeccionados). Para ello, como antes, supondremos una regla probabilística de transmisión pero que se ve reducida en el caso de los individuos escarmentados. Formalmente, suponemos que la probabilidad de pasar del estado escarmentado al estado evasor queda reducida por un factor ρ frente a la probabilidad de transición de pagador a evasor $P_{x \rightarrow y}$:

$$P_{e \rightarrow y}(i) = \rho P_{x \rightarrow y} = \rho \frac{N_y(i)}{\hat{k}_i}, \quad (3.5.1)$$

con $0 \leq \rho \leq 1$. Notemos que el caso $\rho = 1$ se corresponde con la situación simétrica en el que las inspecciones no tienen algún efecto sobre los evasores inspeccionados.

Además de esta transición por contagio, se puede suponer que los escarmentados pueden pasar al estado pagador de manera espontánea siguiendo la ley:

$$P_{e \rightarrow x}(i) = \lambda, \quad (3.5.2)$$

con $\lambda \leq 1$.

Los pasos elementales que tienen lugar en la población cuando $\rho > 0$ son:

$$\begin{aligned} X + Y &\rightarrow 2Y, \\ Y + X &\rightarrow 2X, \\ E + Y &\rightarrow 2Y, \\ E &\rightarrow X; \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

donde X, Y y E son los pagadores, evasores y escarmentados, respectivamente. Las tasas de cambio de cada uno de los procesos son $\alpha, \rho\alpha$ y λ , respectivamente. La dinámica de las concentraciones de cada subpoblación queda definida por el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} x'(t) &= e(t)(\alpha y(t) + \lambda), \\ y'(t) &= -(1 - \rho)\alpha y(t) e(t), \\ e'(t) &= -e(t)(\rho\alpha y(t) + \lambda). \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

Como ya sabemos, estas variables no son independientes ya que $x(t) + y(t) + e(t) = N$, para todo t . Así, resulta conveniente estudiar la ecuación de las órbitas en el plano $Y - E$:

$$\frac{dy(e)}{de} = \frac{-(1 - \rho)\alpha y(e)}{\rho\alpha y(e) + \lambda}. \quad (3.5.5)$$

Si suponemos las condiciones iniciales $y(0) = N - e(0)$ y $e(0) = \nu N$, implica que: $y(\nu) = (1 - \nu)N$. Para esta condición la solución de la ecuación anterior resulta:

$$\rho y + \frac{\lambda}{\alpha} \ln(y) = (1 - \rho)e + N(\rho - \nu) + \frac{\lambda}{\alpha} \ln(N(1 - \nu)). \quad (3.5.6)$$

Analicemos primero el caso $\lambda = 0$, esto es, cuando la memoria de haber sido inspeccionado no desaparece espontáneamente. En este caso, la ecuación de las órbitas es lineal y las órbitas son rectas. En la Figura 3.6 inciso *a*, se muestran las correspondientes órbitas para el caso $N = 1000$, $\nu = 0.1$ y $\alpha = 0.01$ para diferentes valores de ρ . Como se aprecia, existe un valor $\rho = \rho_c$ para el que la población de escarmentados y evasores se anula de manera simultánea. Específicamente, para estas condiciones,

$$\rho_c = \nu. \tag{3.5.7}$$

Para este valor de ρ la correspondiente órbita pasa por el origen (ver Figura 3.6 inciso b):

$$\nu y = (1 - \nu) e. \tag{3.5.8}$$

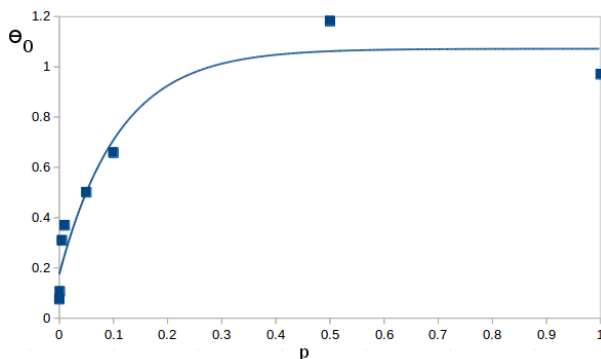


Figura 3.5: Dependencia funcional de Θ_0 con ρ y ajuste con la ecuación (3.3.5). El resto de los valores de los parámetros se toman como en la Figura 3.4.

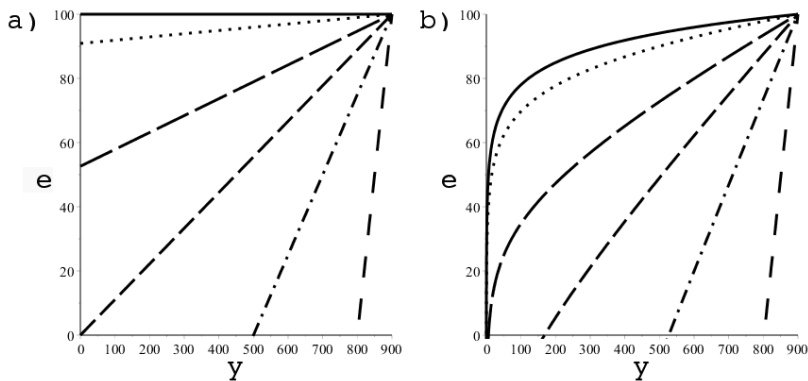


Figura 3.6: Órbitas en el plano $y - e$ que pasan por el punto $(N(1 - \nu), \nu N)$ para los casos a) $\lambda = 0$ y b) $\lambda = 0.1$, en ambos casos (línea continua) $\rho = 0$, (línea punteada) $\rho = 0.01$, (línea discontinua larga) $\rho = 0.05$, (línea discontinua) $\rho = 0.1$, (línea discontinua con puntos) $\rho = 0.2$, y (línea discontinua espaciada) $\rho = 0.5$. El valor del resto de los parámetros es: $N = 10^3$, $\nu = 10^2$ y $\alpha = 0.01$. Notemos que en el caso a) $\rho = 0$ proporciona una órbita horizontal asociada con un valor constante de e , igual a la condición inicial ν . En el caso b), siempre se cumple que e se anula antes que se anule y , en concreto, para $\rho = 0$, el valor del corte con el eje $e = 0$ es $y_c = 900 e^{-10}$.

Cuando $\lambda > 0$, las órbitas se curvan: como se observa, las órbitas para todo valor de $0 \leq \rho \leq 1$ cortan el eje X para algún valor $y > 0$. En concreto, cuando $\rho = 0$ se obtiene la órbita:

$$e = \frac{\lambda}{\alpha} \ln \left(\frac{y}{N(1-\nu)} \right) + \nu N, \quad (3.5.9)$$

que corta el eje de abscisas para el valor $y_c = N(1-\nu) e^{-\frac{\nu N \alpha}{\lambda}}$.

Cuando el tamaño de la población es finito, los resultados de campo medio obtenidos, no se cumplen exactamente. En la Figura 3.7, se representa la probabilidad de alcanzar una población formada exclusivamente por evasores en función del parámetro ρ para diferentes valores de p partiendo de la condición inicial $N = 1000$ y $\nu = 0.1$. Como se observa, el punto crítico $\rho_c = 0.1$, ya no es estricto, sino que marca un cambio de tendencia y debe leerse en términos probabilísticos. A diferencia del modelo determinista, debido a que los puntos de equilibrio son estados absorbentes, todas las simulaciones terminan o bien en cero o bien en uno y, por tanto, lo que se observa en la figura es una media aritmética de las simulaciones realizadas.

La Figura 3.7 muestra la media de 10 simulaciones para diferentes valores de ρ desde 0 hasta 1 y $p = 0$, $p = 0.01$, $p = 0.1$ y $p = 1$ de redes donde se ha inspeccionado inicialmente a 100 individuos, es decir, $\nu = 0.1$. En todas ellas se aprecia que para valores de $\rho < 0.1$ el estado final medio es cero o próximo a cero. Sin embargo, para valores mayores que este ρ , que corresponde con el ρ_c crítico determinista, aparecen simulaciones cuya población final está formada por solo evasores (en mayor número a medida que ρ aumenta).

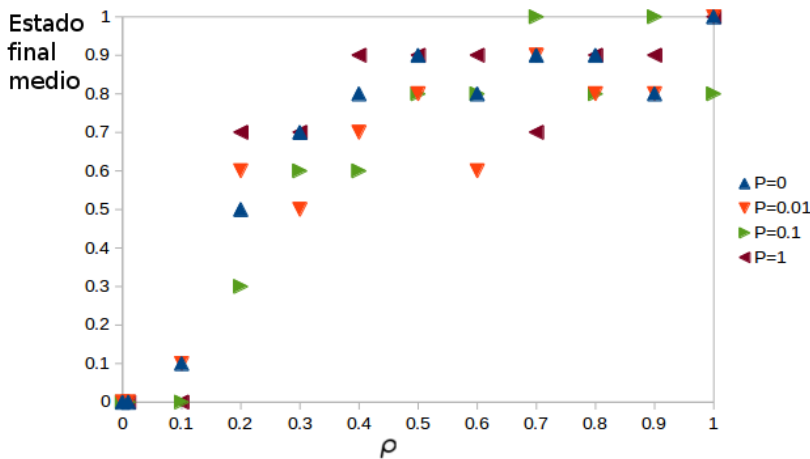


Figura 3.7: Media de 10 simulaciones para diferentes valores de ρ desde 0 hasta 1 y $p = 0$, $p = 0.01$, $p = 0.1$ y $p = 1$ de redes donde se ha inspeccionado inicialmente a 100 individuos, es decir, $\nu = 0.1$ y $\lambda = 0$.

3.6 Conclusiones

En este capítulo hemos estudiado una población que forma una red social y que permite la difusión de la información entre sus individuos conectados. En concreto, hemos considerado que los individuos pueden adoptar dos estados: pagador o evasor y que esta

conducta puede cambiar con el tiempo debido al contagio por otros individuos. Hemos supuesto que la ley de contagio local depende de la proporción de primeros vecinos que están en uno u otro estado. Además, es simétrica, en el sentido de que existe la misma probabilidad de ir de un estado al otro. La intervención externa sobre la población genera una asimetría en la dinámica que hace que la distribución final de la población sea de un tipo u otro. Como hemos visto, en el caso extremo de que los individuos inspeccionados permanezcan siempre en el estado pagador $\rho = 0$, el único estado final es una población formada enteramente por individuos pagadores, independiente de las características de la red. Cuando los evasores inspeccionados pueden volver a reincidir, esto es volver a caer al estado evasor, dependiendo de la tasa de reincidencia ρ , la distribución final varía. Los efectos de tamaño finito quedan reflejados en las simulaciones, donde la probabilidad de alcanzar el punto de equilibrio depende del parámetro p que determina la estructura de la red (además de su conectividad media \hat{k}).

Como decimos, este tipo de modelos requieren un análisis más detallado ya que la aproximación de campo medio no es siempre adecuada. Para estudiar cómo se aleja la dinámica de propagación de la información en una red de tipo *Small World* de Watts-Strogatz cuando p toma un valor muy pequeño, hemos estudiado la evolución de la interfase que se genera en la propagación. Por definición, la interfase está formada por nodos que tienen nodos vecinos en un estado diferente al suyo. En el caso $\rho = 0$, partiendo de una población inicial N formada por todos pagadores en la que se ha llevado a cabo una inspección de intensidad ν , la interfase está formada precisamente por estos ν nodos. A medida que el tiempo pasa, la interfase crece hasta llegar a un valor máximo que depende de p para luego disminuir hasta 0, debido a que el estado final de equilibrio está únicamente formado por individuos (nodos) pagadores. Tanto el valor máximo de nodos en la interfase como el momento en el que se alcanza este valor máximo dependen de p y de la conectividad media de la red \hat{k} . En la Figura 3.4 se muestra el cambio con el tiempo de las interfases para distintos valores de p para un valor $\hat{k} = 5$. Notemos que los valores de p que producen un valor más alto del máximo de la interfase que, además, aparece en un tiempo más temprano, corresponden con valores de p altos, esto es, a redes casi aleatorias. En el extremo opuesto, el caso $p = 0$ da lugar a una interfase con un número reducido de nodos que se mantiene un período más largo de tiempo antes de desaparecer. Este comportamiento está relacionado con la difusión lenta, es decir valores pequeños de Θ , que ocurre para valores de p bajos.

La realidad es que los individuos inspeccionados pueden reincidir. Esto implica considerar el caso $\rho > 0$ que se corresponde con una propensión al cambio por contagio local para los evasores que han sido inspeccionados (escarmentados). Notemos que el caso $\rho = 1$ corresponde con un efecto disuasorio nulo para los individuos inspeccionados. El análisis de la aproximación de campo medio en el caso en el que no hay paso espontáneo de estado escarmentado a estado pagador ($\lambda = 0$) muestra la existencia de un valor de ρ crítico $\rho_c = \nu$ por debajo del cual la desaparición de los individuos evasores está garantizada. Este resultado queda corroborado por las simulaciones de redes *Small World* para diferentes valores de p aunque el punto crítico adquiere una naturaleza probabilística. Cuando los escarmentados olvidan su estado de manera espontánea ($\lambda > 0$) este punto crítico desaparece y la extinción de la población evasora no ocurre para ningún valor de ρ . Obviamente, dado el tamaño finito que se usa en las simulaciones, este diagrama de bifurcación se verá modificado y requerirá un análisis más detallado.

Para finalizar, nos gustaría resaltar que este modelo, a pesar de su sencillez, puede

ser la base para estudiar otro tipo de intervenciones en redes sociales. En concreto, en la actualidad estamos investigando cuál es el efecto de la existencia de inspecciones corruptas en el comportamiento de una red social. Se podría esperar que si algunas de las inspecciones que se realizan son corruptas, es decir no solo no penalizan al evasor sino que le reafirman en su actitud, la erradicación de las malas conductas sería más complicada. Una forma de implementar este efecto consiste en asociar a cada individuo una predisposición al cambio en función de si ha sido inspeccionado legalmente o de manera ilícita. En el primero de los casos, el inspeccionado pagador adquiriría una menor propensión a volver a delinquir, mientras que el inspeccionado de manera ilegal permanecería en estado pagador y, además, se dotaría de una mayor resistencia al contagio por parte de sus vecinos pagadores. Resultados preliminares apuntan a dinámicas de la población no evidentes.

Agradecimientos

Nos gustaría agradecer la invitación y la hospitalidad recibida de los profesores de la Universidad Tecnológica de la Mixteca y, asimismo, felicitarlos por la inmejorable organización del Segundo Congreso Internacional de Modelación Matemática.

Bibliografía

- [1] A. L. Andrei, K. Comer and M. Koehler, **An agent-based model of network effects on tax compliance and evasion**, Journal of Economic Psychology, 40 C, 119-133, 2014.
- [2] V. Barash, **The dynamics of social contagion**, Doctoral Thesis (Faculty of the Graduate School of Cornell University, 2011.
- [3] C. M. Bordogna and E. V. Albano, **Study and characterization of interfaces in a two-dimensional generalized voter model**, Phys.Rev.E 83, 046111, 2011.
- [4] C. Castellano, D. Vilone and A. Vespignani, **Incomplete ordering of the voter model on small-world networks**, Europhys. Lett., 63 (1), 153-158, 2003.
- [5] D. Centola and M. Macy, **Complex Contagions and the Weakness of Long Ties**, American Journal of Sociology, Vol. 113, No. 3, 702-734, 2007.
- [6] G. Csardi and T. Nepusz, **The igraph software package for complex network research**, InterJournal, Complex Systems, 1695(5), 1-9, 2006.
- [7] C. Doyle, S. Sreenivasan, B. K. Szymanski and G. Korniss, **Social consensus and tipping points with opinion inertia**, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, Volume 443, 1, 316-323, 2016.
- [8] F. Colaiori and C. Castellano, **Consensus versus persistence of disagreement in opinion formation: the role of zealots**, IOP, 1742-5468, 2016.
- [9] N. O. Hodas and K. Lerman, **The simple rules of social contagion**, Scientific Reports,4, 4343, 2014.
- [10] H. Kashisaz, S. S. Hosseini and A. H. Darooneh, **The effect of zealots on the rate of consensus achievement in complex networks**, Physica A 402, 49-57, 2014.
- [11] M. Lloréns, J. C. Nuño, Y. Rodríguez, E. Meléndez-Hevia and F. Montero, **Generalization of the Theory of Transition Times in Metabolic Pathways: A Geometrical Approach**, Biophysical Journal, 77, 23-36, 1999.
- [12] L. Meacci, J. C. Nuño and M. Primicerio, **Fighting tax evasion: a cellular automata approach**. Adv. Math. Sci. Appl. 22(2), 597-610, 2012.
- [13] F. Muñoz, J. C. Nuño and M. Primicerio, **Effects of inspections in small world social networks with different contagion rules**, Physica A , 432, 76-86. 2015.

- [14] J. C. Nuño, M. A. Herrero and M. Primicerio, **Fighting cheaters: how and how much to invest**, Eur. J. Appl. Math. 21(4-5), 459-478, 2010.
- [15] R. Pastor-Satorras and A. Vespignani, **Immunization of complex networks**, Phys. Rev. E 65, 036104, 2002.
- [16] M. Perc, K. Donnay and D. Helbing, **Understanding Recurrent Crime as System-Immanent Collective Behavior**, PLoS ONE 8(10), e76063, 2013.
- [17] M. Pickhardt, and A. Prinz, **Behavioral dynamics of tax evasion – A survey**, Journal of Economic Psychology 40, 1-19, 2014.
- [18] K. Suchecki, V. M. Eguíluz and M. San Miguel, **Voter model dynamics in complex networks: Role of dimensionality, disorder, and degree distribution**, Phys. Rev. E 72, 036132, 2005.
- [19] T. W. Valente, **Network interventions**, Science. 337, 49, 2012.
- [20] A. Vespignani, **Modelling dynamical processes in complex socio-technical systems**, Nature Physics, 8, 2012.
- [21] D. J. Watts and S. H. Strogatz, **Collective dynamics of small-world networks**, Nature 393, 440, 1998.
- [22] D. J. Watts, **Six degrees: the science of a connected age**. Random House: London, UK, 2003.
- [23] G. Zaklan, F. W. S. Limab and F. Westerhoff, **Controlling tax evasion fluctuations**, Physica A 387, 5857-5861, 2008.