

Capítulo 6

Identificación Algebraica en Línea de los Coeficientes de Amortiguamiento y Rigidez de una Suspensión Pasiva de un Cuarto de Automóvil

Esteban Chávez Conde¹
Álvaro Cabrera Amado²
Rafael Castillo Rincón³
José Mercedes Pablo Altunar⁴

Abstract: A strategy for on-line identification of stiffness and damping coefficients of a passive suspension of a quarter car is presented, for purposes of monitoring and maintenance, based on a combination of the algebraic method and partially the Generalized Proportional Integral Observer. The second method considers the disturbance signal of interest as a bounded signal by a family of Taylor polynomials time-varying, and by an extension of Luenberger observer, the estimate is achieved. The scheme algebraic identification is obtained from the partial model of the system (estimated by the disturbance observer) and expressed in notation of operational calculation, and by the method of algebraic derivative the unknown initial conditions are cancelled, obtaining a formula for determining the unknown coefficients. The numerical simulation results shown the satisfactory performance of the proposed strategy.

Keywords: Vehicle passive suspension, algebraic identification, disturbance observer.

Resumen: Presentamos una estrategia para la identificación en línea de los coeficientes de amortiguamiento y rigidez de una suspensión pasiva de un cuarto de automóvil, para fines de monitoreo y mantenimiento, basada en una combinación del método algebraico y parcialmente el Observador Proporcional Integral Generalizado. El segundo método considera a la señal

¹echavez@unpa.edu.mx. Departamento de Mecatrónica, Universidad del Papaloapan.

²acabrera@unpa.edu.mx. Departamento de Mecatrónica, Universidad del Papaloapan.

³rcastillo@unpa.edu.mx. Departamento de Mecatrónica, Universidad del Papaloapan.

⁴jmpablo@unpa.edu.mx. Departamento de Agrícola Tropical, Universidad del Papaloapan.

de perturbación de interés como una señal acotada por una familia de polinomios de Taylor variantes en el tiempo, y mediante una extensión del observador de Luenberger, se logra la estimación. El esquema de identificación algebraica se obtiene del modelo parcial del sistema (estimado por el observador de perturbación) y se expresa en notación del cálculo operacional, y mediante el método de la derivada algebraica se cancelan las condiciones iniciales desconocidas, obteniendo una fórmula para la determinación de los coeficientes desconocidos. Los resultados de simulación numérica muestran el desempeño satisfactorio de la estrategia propuesta.

6.1 Introducción

Algunas de las tareas básicas de la suspensión en un automóvil son: aislar el cuerpo del carro de las perturbaciones del terreno para proveer una calidad de comodidad y mantener un buen contacto de la rueda con el terreno (ver [11]). La suspensión pasiva de un automóvil está compuesta principalmente por amortiguadores y resortes (ver [4]); estos elementos sufren desgaste debido al perfil irregular del terreno, y se necesitan reemplazar para mantener continuamente el confort en los usuarios. Es común que el reemplazo de los amortiguadores se realice cuando el usuario ya no siente la misma calidad de comodidad, o por el tiempo de vida útil indicado en estos dispositivos. Cuando ocurre el desgaste en un amortiguador, cambia su coeficiente de amortiguamiento, al igual que en un resorte, cambia su constante de rigidez. De esta forma se puede determinar cuándo es necesario el reemplazo de estos dispositivos en la suspensión del automóvil. Sin embargo, no es posible medir directamente estos coeficientes; se tendría que someter a la suspensión a pruebas específicas de laboratorio, y después de algunas mediciones y cálculos, obtener los coeficientes; es decir, estimarlos fuera de línea. Por lo que estimar en línea los coeficientes de amortiguamiento y rigidez, resulta ser más práctico para propósitos de monitoreo y mantenimiento.

La estimación de parámetros en sistemas de suspensión de automóviles ha sido de interés para investigadores e ingenieros. Algunos trabajos relacionados a la estimación de parámetros en suspensiones de vehículos emplean mediciones de algunas variables y métodos de estimación basados en el modelo. Por ejemplo, Hernández-Alcántara *et al.* en [12], presentan esquemas de estimación usando un método de identificación paramétrica y otra basada en observador para una suspensión semiactiva que emplea un amortiguador magnetorreológico; siendo el objetivo principal la estimación del deterioro de la fuerza del amortiguador, considerado como una falla. Chase-Hoffman en [6], emplea un método de identificación de parámetros del tipo caja gris (de un software comercial), basado en el modelo y el uso de sensores inalámbricos de rápida instalación para la medición de algunas variables, con el fin de estimar parámetros de inercia y amortiguamiento. Kline-Shimp III en [14], presenta una estrategia de estimación de la masa del cuerpo del vehículo, basada en el método de caos polinomial y una matriz de masa para generar un modelo en el espacio de estado, y el uso de mediciones de aceleración para una suspensión pasiva de un cuarto de automóvil. Álvarez-Sánchez en [1], propone un controlador modos deslizante que requiere conocimiento de la masa del cuerpo del vehículo, que es identificada mediante un método algebraico, considerando mediciones de los desplazamientos verticales del cuerpo del vehículo y el neumático.

En este trabajo proponemos una estrategia para la estimación de los coeficientes de amortiguamiento y rigidez de una suspensión de un cuarto de automóvil, usando parcialmente el Observador Proporcional Integral Generalizado (ver [16], [17], y [15]), y el Método Algebraico (ver [9] y [7]). A partir del modelo dinámico parcial de la suspensión, diseñamos el observador de perturbación, considerando que las fuerzas de amortiguamiento y rigidez son desconocidas. Una vez estimadas estas fuerzas, se desarrollan unas fórmulas usando el método algebraico, para identificar los coeficientes de amortiguamiento y rigidez de la suspensión. El contenido del trabajo está organizado de la siguiente manera: en la Sección 6.2 describimos el modelo matemático del sistema de suspensión de un cuarto de automóvil; en la Sección 6.3 se desarrolla el observador de perturbación a partir de la dinámica parcial de la suspensión. El uso del método algebraico para la obtención de fórmulas para la identificación de los coeficientes de amortiguamiento y rigidez, se presenta en la Sección 6.4. En la Sección 6.5 mostramos los resultados de simulación numérica obtenidos. Finalmente, las conclusiones se describen en la Sección 6.6.

6.2 Modelo matemático de la suspensión pasiva

La suspensión pasiva de un automóvil está conformada principalmente por amortiguadores y resortes. En la Figura 6.1, mostramos un diagrama esquemático de un sistema de suspensión de un cuarto de automóvil; m_s representa la masa suspendida, que corresponde al cuarto de cuerpo del automóvil; m_u representa la masa no suspendida, que corresponde a la masa del neumático, del equipo de freno y elementos que conectan al neumático con el chasis del cuerpo de automóvil. La rigidez del resorte y el amortiguamiento del dispositivo amortiguador de la suspensión, están representados por k_s y c_s , respectivamente; k_t representa la rigidez del neumático. Las variables z_s y z_u representan los desplazamientos verticales de la masa suspendida y la no suspendida, respectivamente. Y la variable z_r representa el perfil de terreno.

Para el modelado matemático de la suspensión, se considera la propiedad ideal de un resorte, que es la rigidez; y la propiedad de amortiguamiento del dispositivo amortiguador (ver [21]). Usando las leyes de Newton (ver [3]) o las ecuaciones de Lagrange (ver [20] y [10]), se puede obtener el modelo dinámico de la suspensión de un cuarto de automóvil (ver [11], [4] y [17]). Con las leyes de Newton, se requiere dibujar los diagramas de cuerpo libre de cada una de las masas (cuerpos rígidos), suspendida y no suspendida, incluyendo las variables de desplazamiento, las fuerzas que intervienen en cada cuerpo rígido y sus ecuaciones respectivas. Empleando las ecuaciones de Lagrange, se definen las coordenadas y fuerzas generalizadas, se determina la energía disipativa y el Lagrangiano del sistema (a partir de las energías cinética y potencial de la suspensión); posteriormente, se calculan las derivadas parciales y en el tiempo, de las coordenadas generalizadas correspondientes.

Aplicando la segunda ley de Newton a los diagramas de cuerpo libre del sistema de suspensión pasiva mostrado en la Figura 6.2, y considerando expresiones lineales de las fuerzas⁵ (ver [21]): $f_{cs} = c_s(\dot{z}_s - \dot{z}_u)$, $f_{ks} = k_s(z_s - z_u)$ y $f_{kt} = k_t(z_u - z_r)$; obtenemos

⁵ $\dot{z}_i = \frac{dz_i}{dt}$, es la razón de cambio de z_i respecto del tiempo t , la velocidad. Así también $\ddot{z}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{dz_i}{dt} \right) = \frac{d^2 z_i}{dt^2}$, es la razón de cambio de \dot{z}_i respecto del tiempo t , la aceleración.

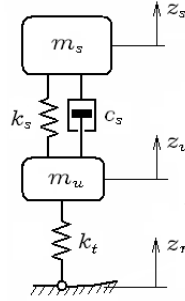


Figura 6.1: Diagrama esquemático de una suspensión pasiva de un cuarto de automóvil.

el modelo dinámico.

Del diagrama de cuerpo libre de la masa suspendida mostrado en la Figura 6.2(a), se tiene que:

$$\begin{aligned}
 (+) \uparrow \sum \mathbf{F} &= m_s \ddot{z}_s, \\
 -f_{cs} - f_{ks} &= m_s \ddot{z}_s, \\
 -c_s(\dot{z}_s - \dot{z}_u) - k_s(z_s - z_u) &= m_s \ddot{z}_s.
 \end{aligned} \tag{6.2.1}$$

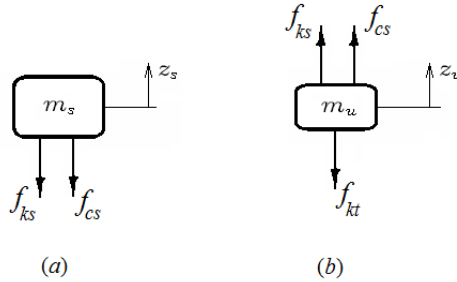


Figura 6.2: Diagramas de cuerpo libre del sistema de suspensión: (a) masa suspendida y (b) masa no suspendida.

Y del diagrama de cuerpo libre de la masa no suspendida mostrado en la Figura 6.2(b), se tiene que⁶:

$$\begin{aligned}
 (+) \uparrow \sum \mathbf{F} &= m_u \ddot{z}_u, \\
 f_{cs} + f_{ks} - f_{kt} &= m_u \ddot{z}_u, \\
 c_s(\dot{z}_s - \dot{z}_u) + k_s(z_s - z_u) - k_t(z_u - z_r) &= m_u \ddot{z}_u.
 \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

⁶Observamos que en ninguna de las sumas de fuerzas de los diagramas de cuerpo libre intervino la aceleración de la gravedad g , debido a que se considera la dinámica del sistema mecánico a partir del equilibrio, es decir, la deflexión estática de los resortes cancelan los términos de peso W de las masas m_s y m_u .

Parámetro	Valor
m_s	216.75 [kg]
m_u	28.85 [kg]
k_s	21700 [$\frac{N}{m}$]
k_t	184000 [$\frac{N}{m}$]
c_s	1200 [$\frac{N \cdot s}{m}$]

Tabla 6.1: Parámetros de la suspensión pasiva de un cuarto de automóvil.

Reordenando los términos de las ecuaciones (6.2.1) y (6.2.2) se tiene el *modelo matemático lineal* del sistema de suspensión pasiva de un cuarto de automóvil, dado por:

$$m_s \ddot{z}_s + c_s (\dot{z}_s - \dot{z}_u) + k_s (z_s - z_u) = 0, \quad (6.2.3)$$

$$m_u \ddot{z}_u - c_s (\dot{z}_s - \dot{z}_u) - k_s (z_s - z_u) + k_t (z_u - z_r) = 0. \quad (6.2.4)$$

Así también, el modelo matemático del sistema de suspensión pasiva, considerando las *dinámicas no lineales* de los elementos principales de la suspensión (resorte y amortiguador), está dado por (ver [2]):

$$m_s \ddot{z}_s + \mathcal{F}_{sc}(\dot{z}_s, \dot{z}_u) + \mathcal{F}_{sk}(z_s, z_u) = 0, \quad (6.2.5)$$

$$m_u \ddot{z}_u - \mathcal{F}_{sc}(\dot{z}_s, \dot{z}_u) - \mathcal{F}_{sk}(z_s, z_u) + k_t (z_u - z_r) = 0, \quad (6.2.6)$$

con,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{sk}(z_s, z_u) &= k_s (z_s - z_u) + k_{ns} (z_s - z_u)^3, \\ \mathcal{F}_{sc}(\dot{z}_s, \dot{z}_u) &= c_s (\dot{z}_s - \dot{z}_u) + c_{ns} (\dot{z}_s - \dot{z}_u)^2 \operatorname{sign}(\dot{z}_s - \dot{z}_u). \end{aligned}$$

La función $\mathcal{F}_{sk}(z_s, z_u)$ incluye la dinámica lineal y no lineal del resorte de la suspensión, donde $k_{ns} = (0.1)k_s$ es la constante de rigidez no lineal. Esta función es típica de un resorte duro. Así también $\mathcal{F}_{sc}(\dot{z}_s, \dot{z}_u)$, contiene la dinámica lineal y no lineal del amortiguador, siendo $c_{ns} = (0.1)c_s$ la constante de amortiguamiento no lineal y $\operatorname{sign}(\cdot)$ es la función *signum* estándar; como una fricción de Coulomb modificada (ver [21]).

La Figura 6.3 muestra resultados comparativos de los modelos matemáticos lineal (ecuaciones (6.2.3) y (6.2.4)) y no lineal (ecuaciones (6.2.5) y (6.2.6)), considerando un perfil de terreno (tipo 1) de la forma (ver [18]):

$$z_r(t) = \begin{cases} a \frac{(1 - \cos(8\pi t))}{2}, & \text{si } 0.5 \leq t \leq 0.75 \text{ y } 3.0 \leq t \leq 3.25; \\ 0, & \text{de lo contrario.} \end{cases} \quad (6.2.7)$$

con un valor de $a = 0.1$ [m].

Los parámetros de la suspensión corresponden a un vehículo comercial (Ford Fiesta MK2 [19]), y se enlistan en la Tabla 6.1.

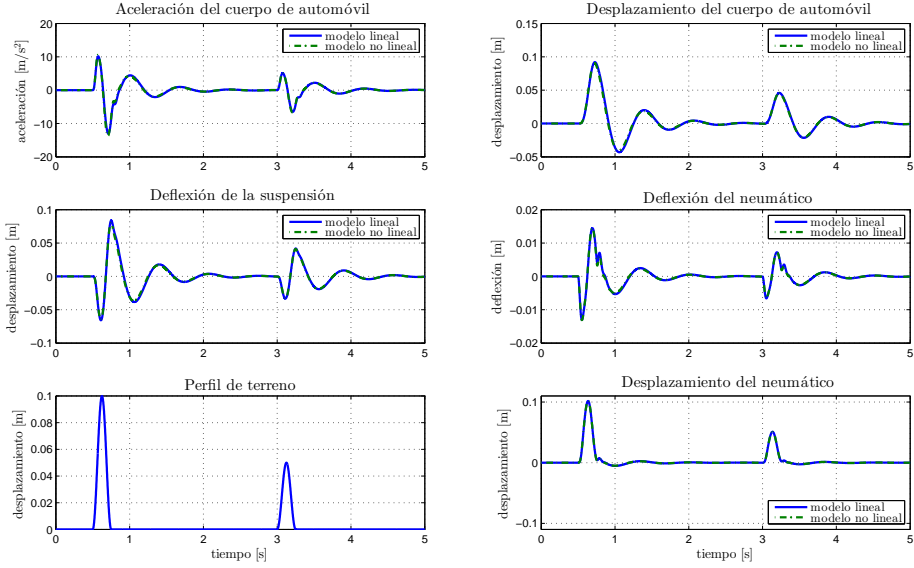


Figura 6.3: Comparación de los modelos matemáticos lineal y no lineal de la suspensión pasiva ante un perfil de terreno (tipo 1).

Así también, la Figura 6.4 muestra resultados comparativos de los modelos matemáticos lineal y no lineal, considerando un perfil de terreno (tipo 2) de la forma (ver [8]):

$$z_r(t) = \begin{cases} -0.0592(t - 3.5)^2 + 0.1332(t - 3.5)^2 + d(t), & \text{para } t \in [3.5, 5), \\ 0.0592(t - 6.5)^2 + 0.1332(t - 6.5)^2 + d(t), & \text{para } t \in [5, 6.5), \\ 0.0592(t - 8.5)^2 - 0.1332(t - 8.5)^2 + d(t), & \text{para } t \in [8.5, 10), \\ -0.0592(t - 11.5)^2 - 0.1332(t - 11.5)^2 + d(t), & \text{para } t \in [10, 11.5), \\ d(t), & \text{de lo contrario.} \end{cases} \quad (6.2.8)$$

donde $d(t) = 0.002 \sin(2\pi t) + 0.002 \sin(7.5\pi t)$ es la perturbación sinusoidal.

Considerando los perfiles de terreno tipo 1 y 2, dado por las ecuaciones (6.2.7) y (6.2.8), y de acuerdo a las Figuras 6.3 y 6.4: la aceleración \ddot{z}_s del cuerpo de automóvil, la deflexión de la suspensión ($z_s - z_u$), la deflexión del neumático ($z_u - z_r$), de los modelos matemáticos lineal y no lineal, son muy semejantes. Por lo que podemos considerar al modelo matemático lineal (ecuaciones (6.2.3) y (6.2.4)) como una adecuada aproximación de la dinámica del sistema de suspensión pasiva de un cuarto de automóvil.

Ahora bien, para la identificación de los coeficientes de amortiguamiento y rigidez de la suspensión se requiere la medición de algunas variables, ya sea de desplazamiento vertical, velocidad o aceleración. En este trabajo consideramos el uso mínimo de sensores, y de variables factibles de medir. Observamos de la

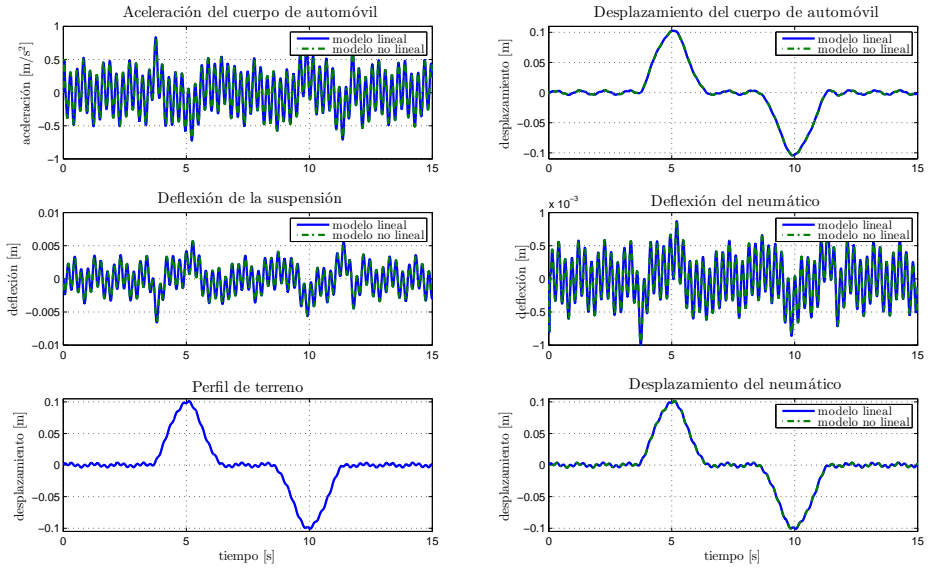


Figura 6.4: Comparación de los modelos matemáticos lineal y no lineal de la suspensión pasiva ante un perfil de terreno (tipo 2).

ecuación (6.2.3), que es conveniente la medición directa de la deflexión de la suspensión ($z_s - z_u$) mediante un sensor diferencial (por ejemplo, un transductor de desplazamiento lineal variable LVDT), la medición del desplazamiento vertical z_s o la aceleración \ddot{z}_s de la masa suspendida (cuerpo del vehículo). En [5] se indican algunos tipos de sensores que se emplean comúnmente en vehículos comerciales y de laboratorio.

6.3 Estimación de la dinámica parcial de la suspensión pasiva

Esta estrategia considera que se tiene disponible un sensor, para la medición del desplazamiento vertical z_s del cuerpo del vehículo y se conoce la masa suspendida m_s . Ahora, del modelo matemático lineal del sistema de suspensión pasiva, reescribimos la ecuación (6.2.3) como:

$$m_s \ddot{z}_s(t) + \xi(t) = 0, \quad (6.3.1)$$

con $\xi(t) = c_s(\dot{z}_s - \dot{z}_u) + k_s(z_s - z_u)$, que son el conjunto de fuerzas de rigidez y amortiguamiento de la suspensión. Consideramos a $\xi(t)$ como la señal de perturbación que deseamos estimar y que puede ser acotada por una familia de

polinomios de Taylor variantes en el tiempo ([18], [2], [3]), de la forma:

$$\xi(t) \approx p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 + p_4 t^4, \quad (6.3.2)$$

siendo p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 constantes reales desconocidas. Expresamos como un sistema dinámico en variables de estado a la señal de perturbación dada por la ecuación (6.3.2),

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3, \\ \dot{\xi}_3 &= \xi_4, \\ \dot{\xi}_4 &= \xi_5, \\ \dot{\xi}_5 &= 0, \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

donde $\xi_1 = \xi(t)$, $\xi_2 = \dot{\xi}(t)$, $\xi_3 = \ddot{\xi}(t)$, $\xi_4 = \xi^{(3)}(t)$, $\xi_5 = \xi^{(4)}(t)$. Escribimos la ecuación (6.3.1) en variables de estado, definiendo que $z_1 = z_s$ y $z_2 = \dot{z}_s$,

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -\frac{1}{m_s} \xi(t). \end{aligned} \quad (6.3.4)$$

Ahora, la dinámica extendida del sistema lineal perturbado se obtiene combinando las ecuaciones (6.3.3) y (6.3.4),

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -\frac{1}{m_s} \xi_1, \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3, \\ \dot{\xi}_3 &= \xi_4, \\ \dot{\xi}_4 &= \xi_5, \\ \dot{\xi}_5 &= 0. \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

El sistema lineal perturbado extendido, dado por la ecuación (6.3.5), es de estado completamente observable⁷ con la salida $y = z_1$. A partir de la ecuación

⁷El concepto de observabilidad es útil, al resolver el problema de reconstruir variables de estado no medibles, a partir de variables que sí lo son en el tiempo mínimo posible. Un sistema es observable en el tiempo t_0 si, con el sistema en el estado $\mathbf{x}(t_0)$, es posible determinar este estado a partir de la observación de la salida durante un intervalo de tiempo finito (*ver* Ogata en [12]). R. Kalman introdujo los conceptos de controlabilidad y observabilidad en sistemas dinámicos lineales (*ver* [8]), que son propiedades importantes en el diseño de sistemas de control en el espacio de estados.

(6.3.5) se propone un observador de Luenberger⁸ extendido de la forma:

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{z}}_1 &= \hat{z}_2 + \lambda_6(y - \hat{y}), \\
 \dot{\hat{z}}_2 &= -\frac{1}{m_s}\hat{\xi}_1 + \lambda_5(y - \hat{y}), \\
 \dot{\hat{\xi}}_1 &= \hat{\xi}_2 + \lambda_4(y - \hat{y}), \\
 \dot{\hat{\xi}}_2 &= \hat{\xi}_3 + \lambda_3(y - \hat{y}), \\
 \dot{\hat{\xi}}_3 &= \hat{\xi}_4 + \lambda_2(y - \hat{y}), \\
 \dot{\hat{\xi}}_4 &= \hat{\xi}_5 + \lambda_1(y - \hat{y}), \\
 \dot{\hat{\xi}}_5 &= \lambda_0(y - \hat{y}),
 \end{aligned} \tag{6.3.6}$$

donde $\hat{y} = \hat{z}_1$.

La dinámica de error del observador se obtiene restando la ecuación (6.3.6) de la ecuación (6.3.5),

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_1 &= e_2 - \lambda_6 e_1, \\
 \dot{e}_2 &= -\frac{1}{m_s}e_{z1} - \lambda_5 e_1, \\
 \dot{e}_{z1} &= e_{z2} - \lambda_4 e_1, \\
 \dot{e}_{z2} &= e_{z3} - \lambda_3 e_1, \\
 \dot{e}_{z3} &= e_{z4} - \lambda_2 e_1, \\
 \dot{e}_{z4} &= e_{z5} - \lambda_1 e_1, \\
 \dot{e}_{z5} &= -\lambda_0 e_1,
 \end{aligned} \tag{6.3.7}$$

donde, $e_1 = y - \hat{y}$, $e_2 = z_2 - \hat{z}_2$, $e_{z1} = \xi_1 - \hat{\xi}_1$, $e_{z2} = \xi_2 - \hat{\xi}_2$, $e_{z3} = \xi_3 - \hat{\xi}_3$, $e_{z4} = \xi_4 - \hat{\xi}_4$, $e_{z5} = \xi_5 - \hat{\xi}_5$.

La ecuación característica de la dinámica de error del observador está dada por:

$$s^7 + \lambda_6 s^6 + \lambda_5 s^5 + \alpha \lambda_4 s^4 + \alpha \lambda_3 s^3 + \alpha \lambda_2 s^2 + \alpha \lambda_1 s + \alpha \lambda_0 = 0, \tag{6.3.8}$$

donde, $\alpha = -\frac{1}{m_s}$.

⁸Luenberger propuso una metodología de diseño de observadores de estado para sistemas lineales (ver [9] y [12]).

Para el diseño de las ganancias del observador $\lambda_0, \dots, \lambda_3$, proponemos un polinomio característico deseado $p_d(s)$ de la forma⁹:

$$p_d(s) = (s + p)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)^3 = 0, \quad (6.3.9)$$

con $\zeta, \omega_n, p > 0$, tal que sea *Hurwitz*¹⁰.

Y las ganancias del observador quedan definidas como:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \frac{1}{\alpha}\omega_n^6 p, \\ \lambda_1 &= \frac{1}{\alpha}(\omega_n^6 + 6\zeta\omega_n^5 p), \\ \lambda_2 &= \frac{1}{\alpha}(6\zeta\omega_n^5 + 12\zeta^2\omega_n^4 p + 3\omega_n^4 p), \\ \lambda_3 &= \frac{1}{\alpha}(12\zeta^2\omega_n^4 + 3\omega_n^4 + 12\zeta\omega_n^3 p + 8\zeta^3\omega_n^3 p), \\ \lambda_4 &= \frac{1}{\alpha}(12\zeta\omega_n^3 + 8\zeta^3\omega_n^3 + 3\omega_n^2 p + 12\zeta^2\omega_n^2 p), \\ \lambda_5 &= 3\omega_n^2 + 12\zeta^2\omega_n^2 + 6\zeta\omega_n p, \\ \lambda_6 &= 6\zeta\omega_n + p. \end{aligned} \quad (6.3.10)$$

Con el observador de perturbación dado por la ecuación (6.3.6), y la medición del desplazamiento vertical z_s , se logra estimar el conjunto de fuerzas de amortiguamiento y rigidez de la suspensión.

A partir de la estimación del conjunto de fuerzas, se aplica el método algebraico para identificar los coeficientes de amortiguamiento y rigidez, tal como se desarrolla a continuación.

6.4 Identificación de los coeficientes de amortiguamiento y rigidez

Una vez obtenido $\hat{\xi}_1$, ya sea mediante el observador de perturbación dado por la ecuación (6.3.6) o por la medición de la aceleración \ddot{z}_s , consideramos que:

$$\hat{\xi}_1 = \xi_1 = \xi(t) = c_s(\dot{z}_s - \dot{z}_u) + k_s(z_s - z_u). \quad (6.4.1)$$

⁹La expresión: $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$, es la forma canónica de un sistema de segundo orden, en términos de la razón de amortiguamiento ζ y la frecuencia natural ω_n , descrito en variable compleja s (ver [12]).

¹⁰El criterio de estabilidad de *Hurwitz* establece que un sistema lineal de una entrada y una salida es estable, si y solo si, los polos del sistema se encuentran en el semiplano izquierdo del plano complejo s (ver [12]).

La ecuación (6.4.1) la reescribimos como sigue:

$$c_s \dot{x}(t) + k_s x(t) = u(t), \quad (6.4.2)$$

donde $x(t) = z_s - z_u$, $\dot{x}(t) = \dot{z}_s - \dot{z}_u$ y $u(t) = \hat{\xi}_1$; siendo $x(t)$ la variable de salida y $u(t)$ la variable de entrada en este sistema, con los parámetros desconocidos c_s y k_s . A partir de la ecuación (6.4.2), aplicamos el Método Algebraico (ver [9]). Usando el cálculo operacional, obtenemos la siguiente expresión:

$$c_s [sX(s) - x(0)] + k_s X(s) = U(s). \quad (6.4.3)$$

Derivando respecto de la variable compleja s cancelamos la influencia de las condiciones iniciales de la ecuación (6.4.3),

$$c_s \left[s \frac{d}{ds} X(s) + X(s) \right] + k_s \frac{d}{ds} X(s) = \frac{d}{ds} U(s). \quad (6.4.4)$$

Multiplicando a ambos miembros de la ecuación (6.4.4) por s^{-1} , obtenemos una expresión libre de derivadas en el dominio del tiempo,

$$c_s \left[\frac{d}{ds} X(s) + s^{-1} X(s) \right] + k_s s^{-1} \frac{d}{ds} X(s) = s^{-1} \frac{d}{ds} U(s). \quad (6.4.5)$$

Escribiendo la ecuación (6.4.5) en el dominio del tiempo, se obtiene una expresión *lineal* que contiene información importante para la identificación de los parámetros desconocidos,

$$c_s \pi_1(t) + k_s \pi_2(t) = q(t), \quad (6.4.6)$$

donde¹¹,

$$\pi_1(t) = \int x(t) - t \cdot x(t), \quad \pi_2(t) = - \int t \cdot x(t), \quad q(t) = - \int t \cdot u(t).$$

Ahora, para determinar los dos parámetros desconocidos se requiere una ecuación adicional. Integrando la ecuación (6.4.6) obtenemos un sistema lineal variante en el tiempo para los parámetros desconocidos, de la forma:

$$\begin{bmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) \\ P_{21}(t) & P_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_s \\ k_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1(t) \\ Q_2(t) \end{bmatrix}, \quad (6.4.7)$$

donde,

$$\begin{aligned} P_{11}(t) &= \pi_1(t), & P_{12}(t) &= \pi_2(t), \\ P_{21}(t) &= \int \pi_1(t), & P_{22}(t) &= \int \pi_2(t), \\ Q_1(t) &= q(t), & Q_2(t) &= \int q(t). \end{aligned}$$

¹¹($\int \phi(t)$) denota la integral $\int_0^t \phi(\tau) d\tau$.

Las fórmulas para la identificación en línea de los coeficientes de amortiguamiento y rigidez de la suspensión, se obtienen de la ecuación (6.4.7), y están dadas por:

$$c_s = \frac{\begin{vmatrix} Q_1(t) & P_{12}(t) \\ Q_2(t) & P_{22}(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) \\ P_{21}(t) & P_{22}(t) \end{vmatrix}}, \quad k_s = \frac{\begin{vmatrix} P_{11}(t) & Q_1(t) \\ P_{21}(t) & Q_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) \\ P_{21}(t) & P_{22}(t) \end{vmatrix}}. \quad (6.4.8)$$

La evaluación de los parámetros es fácilmente obtenida después de un pequeño intervalo de tiempo, se dice de duración ε , desde el tiempo inicial $t = 0$, en el cual el sistema es ciertamente singular.

6.5 Resultados de simulación

Obtuvimos los resultados de simulación numérica con MATLAB/SimulinkTM, usando el método numérico Runge-Kutta y un paso de integración de 1 [ms]. Programamos las ecuaciones (6.2.3) y (6.2.4), que corresponden al modelo matemático lineal de la suspensión pasiva de un cuarto de automóvil, el observador de perturbación dado por la ecuación (6.3.6), y las fórmulas para la identificación en línea de los coeficientes de amortiguamiento y rigidez (ecuación (6.4.8)). El sistema de suspensión fue excitado con el perfil de terreno tipo 2, dado por la ecuación (6.2.8). Utilizamos los parámetros indicados en la Tabla 6.1. En la Figura 6.5

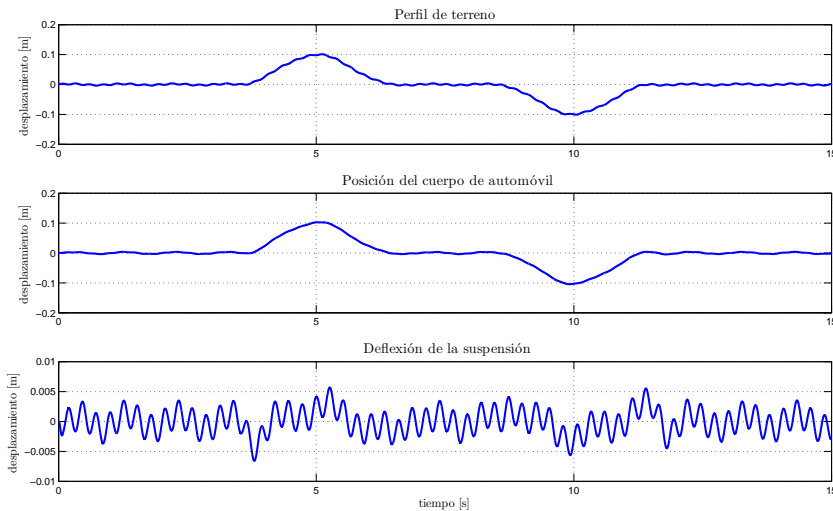


Figura 6.5: Respuesta de la dinámica de la suspensión pasiva lineal ante un perfil de terreno tipo 2.

mostramos los resultados de simulación obtenidos al excitar la dinámica de la

suspensión con un perfil de terreno tipo 2. Observamos que el desplazamiento del cuerpo del automóvil tiene un comportamiento similar al perfil del terreno, con dos formas sinusoidales en $t = 5 [s]$ y $t = 10 [s]$, y amplitudes de $0.1 [m]$. Sin embargo, los rizados de oscilación del perfil de terreno son filtrados por el amortiguamiento y rigidez de la suspensión. La deflexión de la suspensión ($z_s - z_u$), varía en el tiempo con amplitudes menores a $\pm 0.01 [m]$.

Considerando el conocimiento de la masa suspendida m_s y la medición del desplazamiento vertical del cuerpo de automóvil z_s , se estima la perturbación $\xi(t)$ considerada como el conjunto de las fuerzas de amortiguamiento y rigidez usando el observador dado por la ecuación (6.3.6). En la Figura 6.6, observamos que la estimación converge en un tiempo $t < 0.01 [s]$, y el error de la estimación ($\xi_1 - \hat{\xi}_1$) se mantiene en valores menores a $\pm 1 [N]$. Las ganancias del observador dadas por la ecuación (6.3.10), se definieron considerando los parámetros de $\zeta = 2$, $\omega_n = 300$ y $p = 300$. Es importante comentar que la dinámica de amortiguamiento y rigidez de la suspensión se encuentra en amplitudes de fuerza menores a $\pm 200 [N]$, por lo que la estimación de la perturbación se considera satisfactoria, al comparar el valor del error de estimación con las fuerzas que desarrolla la suspensión. En la

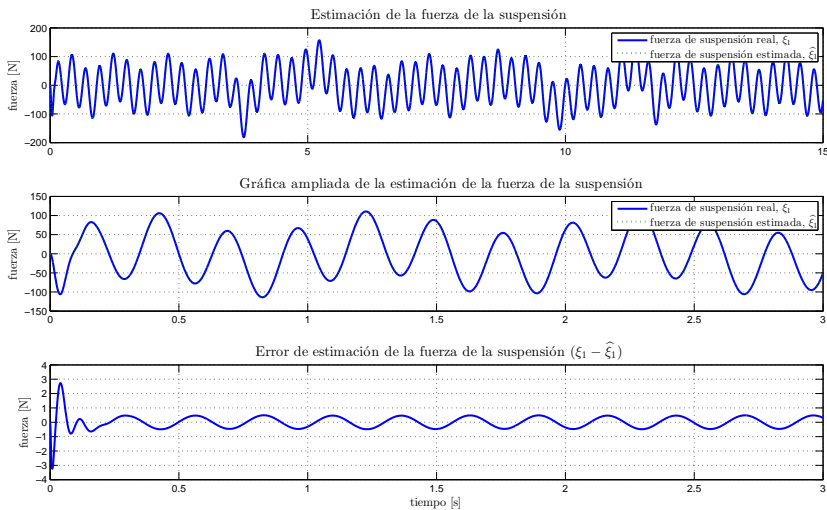


Figura 6.6: Resultados de simulación del observador de perturbación para la estimación de la fuerza de la suspensión pasiva.

Figura 6.7, mostramos los resultados de simulación de la identificación en línea de los coeficientes de amortiguamiento y rigidez de la suspensión pasiva de un cuarto de automóvil mediante el método algebraico, usando las fórmulas dadas por la ecuación (6.4.8). Las fórmulas requieren información de la perturbación estimada por el observador, y la medición de la deflexión de la suspensión. Es importante

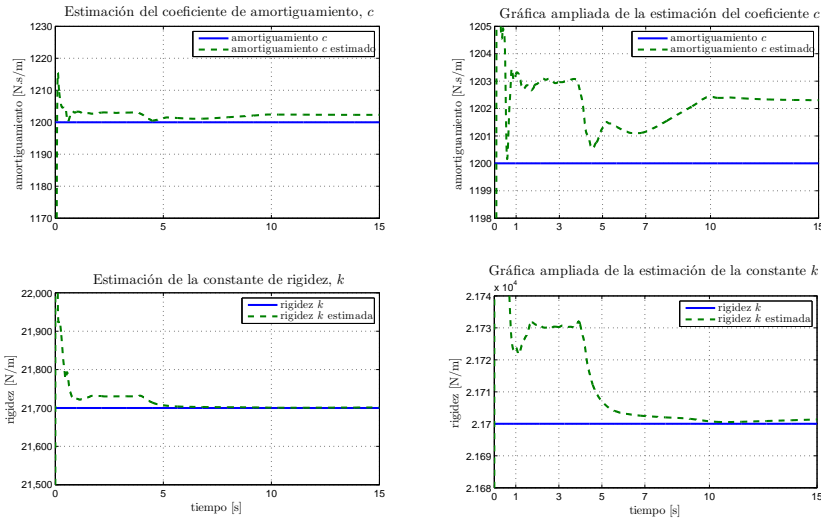


Figura 6.7: Resultados de simulación de la identificación algebraica en línea de los coeficientes de amortiguamiento y rigidez de la suspensión pasiva.

comentar que teóricamente la identificación de los coeficientes es instantánea. Sin embargo, en un tiempo de $t = 1 [s]$ se tiene conocimiento de los coeficientes de amortiguamiento y rigidez, con un error menor a 1%.

6.6 Conclusiones

Presentamos estrategias para la identificación en línea de los coeficientes de amortiguamiento y rigidez de una suspensión pasiva de un cuarto de automóvil, considerando la dinámica parcial del modelo matemático lineal de la suspensión.

Si se emplean sensores para medir el desplazamiento vertical z_s y la deflexión de la suspensión ($z_s - z_u$), se debe emplear el observador de perturbación para estimar el conjunto las fuerzas de rigidez y amortiguamiento y, a partir de esto, identificar los coeficientes mediante las fórmulas obtenidas por el método algebraico.

Sin embargo, se puede escoger otra alternativa basada en la medición de la aceleración \ddot{z}_s y la deflexión de la suspensión ($z_s - z_u$), evadiendo así el uso del observador de perturbación, y usando únicamente las fórmulas para la identificación de los coeficientes de amortiguamiento y rigidez.

Estos algoritmos pueden ser programados en un microprocesador incrustado en el sistema del automóvil, considerando la medición de variables que sean factibles en la práctica, previendo una implementación de bajo costo.

Bibliografía

- [1] Álvarez-Sánchez E., **A Quarter-Car Suspension System: Car Body Mass Estimator and Sliding Mode Control**, Iberoamerican Conference on Electronics Engineering and Computer Science, Procedia Technology 7, 208-214, 2013.
- [2] Ando Y., M. Suzuki, **Control of active suspension systems using the singular perturbation method**, Control Engineering Practice, Vol. 4, No. 3, 287-293, 1996.
- [3] Bedford A., Fowler W., **Mecánica para Ingeniería: Dinámica**, Prentice Hall, 2008.
- [4] Blundell M., Harty D., **The Multibody Systems Approach to Vehicle Dynamics**, Elsevier, 2004.
- [5] Chamseddine A., Noura H., Raharijaona T., **Control of Linear Full Vehicle Active Suspension System Using Sliding Mode Techniques**, IEEE International Conference on Control Applications, 1306-1311. Munich, Germany, 2006.
- [6] Chase-Hoffman S., **Automotive Suspension Parameter Estimation using Smart Wireless Sensor Technology**, Master Thesis, California Polytechnic State University, 2008.
- [7] Chávez-Conde E., Sira-Ramírez H., Silva-Navarro G., **Generalized PI Control and On-Line Identification of a Rotational Mass-Spring System**, 25th IASTED International Conference on Modelling, Identification and Control, 466-472. Lanzarote, Canary Islands, Spain, 2006.
- [8] Chen P., Huang A., **Adaptive sliding control of non-autonomous active suspension systems with time-varying loadings**, Journal of Sound and Vibration, Vol. 282, 1119-1135, 2005.

- [9] Fliess M., Sira-Ramírez H., **An Algebraic Framework For Linear Identification**, ESAIM Control, Optimisation and Calculus of Variations. Vol. 9, 151-168, 2003.
- [10] Goldstein H., **Mecánica Clásica**, Editorial Reverté, 1987.
- [11] Gillespie T.D., **Fundamentals of Vehicle Dynamics**, SAE, 1992.
- [12] Hernández-Alcántara D., Morales-Menéndez R., Amezcua-Brooks L., Sename O., Dugard L., **Fault estimation methods for semi-active suspension system**, IEEE International Autumn Meeting on Power, Electronics and Computing. November 4-6, 2015.
- [13] Kalman, R.E., Ho, Y.C., Narendra, K.S., **Controllability of Linear Dynamic Systems, in Contributions to Differential Equations**, Wiley Interscience Publishers, Inc., Vol. 1, 1962.
- [14] Kline Shimp III S., **Vehicle Sprung Mass Parameter Estimation Using an Adaptive Polynomial-Chaos Method**, Master Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, 2008.
- [15] Luenberger D.G., **Observing the State of a Linear System**, IEEE Trans. Military Electr., MIL-8, 74-80, 1996.
- [16] Ogata K., **Ingeniería de Control Moderna**, Prentice Hall, 2010.
- [17] Rajamani R., **Vehicle Dynamics and Control**, Springer, 2006.
- [18] Sam Y.M., Hudha K., **Modelling and Force Tracking Control of Hydraulic Actuator for an Active Suspension System**, IEEE ICIEA, 2006.
- [19] Tahboub K.A., **Active Nonlinear Vehicle-Suspension Variable-Gain Control**, 13th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation, 569-574. Limassol, Cypru, 2005.
- [20] Wells D.A., **Lagrangiane Dynamics**, Schaum's Outlines, McGraw-Hill, 1967.
- [21] Wood R.L., Lawrence K.L., **Modeling and Simulation of Dynamics Systems**, Prentice Hall, 1997.