

# Capítulo 10

## Teorías de Norma como Representaciones del Grupo de Lazos

Ricardo Rosas Rodríguez<sup>1</sup>

---

**Abstract:** We show how gauge theories arise as representations of the group of loops. All the usual kinematical concepts of gauge theories are reflections of properties of the group of loops.

**Keywords:** Quantum Gravity, Gauge Theories, Loops.

**Resumen:** Mostramos cómo surgen las teorías de norma como representaciones del grupo de lazos. Todos los conceptos cinemáticos usuales de las teorías de norma son reflexiones de las propiedades del grupo de lazos.

*“Sin embargo, debido al movimiento interatómico de los electrones, los átomos deberían radiar no sólo energía electromagnética, sino también gravitacional, aunque sólo en diminutas cantidades. Como esto es apenas verdadero en la Naturaleza, parece que la teoría cuántica debería modificar no sólo la electrodinámica maxwelliana sino también la nueva teoría de la gravitación.”*

Albert Einstein (1916) <sup>2</sup>

### 10.1 Introducción

En este capítulo no presentaremos algo novedoso, pero la lectura proporciona las bases de las herramientas matemáticas necesarias que usamos en el estudio (en el contexto de variables de lazos) de ciertas teorías de gravedad modificadas

---

<sup>1</sup>rosas@mixteco.utm.mx. Instituto de Física y Matemáticas, UTM.

<sup>2</sup>La cita la he tomado de [24].

introducidas recientemente por Krasnov (ver [1, 2, 3, 4]), trabajo que realizamos actualmente.

Como menciona Einstein en la cita de arriba, la idea es *cuantizar el campo gravitacional* en el contexto de la relatividad general (la nueva teoría de la gravitación de la que habla Einstein), i.e., entender el cuanto fundamental de espacio-tiempo. Uno puede pensarlo de manera análoga al *fotón*, el cuanto fundamental del campo electromagnético, al *gluón*, el cuanto de la fuerza fuerte, o los *bosones W y Z* de la fuerza débil. Comúnmente se cree, erróneamente, que el gravitón es el cuanto que buscamos, sin embargo éste corresponde solamente a la teoría de Einstein linealizada, no a la relatividad general en su forma completa, y al linealizar la teoría se pierde lo más esencial de ésta: la covarianza general.

El no tener cuantizado al campo gravitacional es como no tener a la Mujer Invisible en los Cuatro Fantásticos, o como no tener a D'Artagnan en los Tres Mosqueteros, o como no tener a Lennon en los Beatles, o no tener al Verano en las 4 estaciones. Nos hace falta una parte para completar el cuarteto y tener una teoría completa de las fuerzas fundamentales en la Naturaleza.

Es sabido que uno de los problemas actuales que enfrenta la física hoy en día es el de cuantizar el campo gravitacional (ver [5, 6]). Después de que se obtuvo la teoría para la electrodinámica cuántica se pensó que podrían usarse las mismas técnicas para la cuantización de las fuerzas nucleares débil y fuerte. Todo esto cambió con el descubrimiento de que las teorías de norma no abelianas eran renormalizables (ver [7]). Una vez que el poder del principio de norma fue completamente reconocido, las teorías cuánticas de campo regresaron a la escena. Las teorías de norma cuánticas proporcionan no sólo los candidatos más naturales sino también los únicos viables que tenemos para la descripción de las fuerzas electrodébil y fuerte (ver [8, 9]).

Las variables dinámicas básicas en estas teorías se representan por conexiones no abelianas. Ya que toda la información invariante de norma en una conexión está contenida en las variables de lazos de Wilson (i.e., las trazas de la holonomía (ver [10])), es natural tratar de usarlas como variables dinámicas. Ya que los lazos de Wilson son funciones sobre un espacio de lazos apropiado, uno puede derivar *ecuaciones diferenciales* que satisfacen éstas sobre dicho espacio. La esperanza es que una vez que se obtiene un conjunto completo de ecuaciones, las "condiciones de frontera", físicas llevarán a soluciones únicas las cuales a su vez determinarán la teoría. Así, el espacio de lazos ofrece una arena natural para las teorías cuánticas de conexiones (ver [11, 12]).

Si se hace énfasis sobre la formulación hamiltoniana resulta que hay una interacción matemática notable entre mediciones sobre los espacios de conexiones y funciones sobre el espacio de lazos, la cual da lugar a una generalización de la transformada de Fourier, llamada transformada de lazo (ver [11, 12]). Esta transformada puede definirse rigurosamente. Como resultado, los estados cuánticos pueden considerarse ya sea como funciones de conexiones invariantes de norma o

como funciones adecuadas de lazos. La imagen de lazos sugiere nuevas estrategias para definir operadores y proporcionar una serie de nuevas ideas.

Resulta que estas ideas son especialmente útiles al tratar con una fuerza que uno no asocia, normalmente, con teorías de conexiones: *la gravedad*. La relatividad general se piensa usualmente como una teoría de métricas y, por tanto, muy alejada de teorías de otras interacciones (formulación ADM, ver [13]). Uno puede, sin embargo, pensarla también como una teoría dinámica de conexiones. Esta idea no es nueva, dicha reformulación fue ya obtenida por Einstein y Schrödinger. En esta versión la conexión de Levi Civita se considera como la variable básica; la métrica es un objeto secundario derivado. Sin embargo, las ecuaciones de la teoría llegaron a ser más complicadas. Pero si uno usa conexiones quirales (variables de Ashtekar (ver [14, 15])) en lugar de las de Levi Civita, las ecuaciones se simplifican realmente. Con esta observación, la relatividad general se acerca más a las teorías que gobiernan las otras fuerzas fundamentales. Como en las otras teorías, uno puede ahora representar los estados de gravedad cuántica como funciones de conexiones (quirales) o, vía transformada de lazos, funciones de éstos. Así, la representación de lazos, ofrece una arena unificada para la descripción cuántica de todas las cuatro fuerzas fundamentales. En el caso de relatividad general, surgen estructuras adicionales porque se requiere que los estados físicos sean invariantes bajo la acción de difeomorfismos. En la representación de lazos, éstos no dependen de lazos individuales sino también de nudos (generalizados) a los cuales pertenecen los lazos (ver [16]).

Hace algunos años Krasnov (ver [1, 2, 3, 4]) introdujo una familia de teorías de gravedad modificadas. La esencia de estas teorías es reemplazar la constante cosmológica por una función cosmológica (que depende de la curvatura del espaciotiempo) en la constricción hamiltoniana de la representación de conexiones de Ashtekar (ver [14, 15, 17, 18]). Así, la relatividad general (ver [19]) es un ejemplo particular de estas nuevas teorías. Como supone Krasnov en sus artículos, se espera que las teorías modificadas conduzcan a un entendimiento de lo que es el cuanto fundamental de espaciotiempo.

El trabajo que estamos desarrollando pretende estudiar las teorías modificadas de Krasnov a nivel cuántico. En la formulación de conexiones es necesario ver si el estado de Chern-Simons (ver [10, 20, 21]) es aún una solución de dichas teorías o debe éste modificarse de alguna manera también. También es necesario tratar de llevar las nuevas teorías a la representación de lazos y ver si las soluciones conocidas (como el polinomio de Jones (ver [22]) para las ecuaciones diferenciales que resultan son aún adecuadas o deben generalizarse también de alguna manera.

En este trabajo de revisión mostraremos simplemente cómo es que surgen las teorías de norma (como las de Yang-Mills y Maxwell) a partir de una representación del grupo de lazos. Para esto he seguido muy de cerca el libro de Gambini y Pullin (ver [10]).

El desarrollo de este artículo es el siguiente. En la siguiente sección hablaré un poco sobre el mito hermoso en la física. La sección 10.3 es una introducción a la holonomía de una variedad. La sección 10.4 trata sobre el grupo de lazos. En la sección 10.5 hablaremos del generador del grupo de lazos, la derivada de lazo. La sección 10.6 trata sobre las propiedades de la derivada de lazo. En la sección 10.7 veremos cómo es que surgen las teorías de norma como representaciones del grupo de lazos. Finalizamos con algunas conclusiones.

## 10.2 El mito hermoso

El título de esta sección lo he tomado prestado del libro de Lee Smolin [5]. Éste libro, así como también el de Penrose [6], el de Hawking [23], y el de Ashtekar [17] son los que han cambiado mi manera de pensar sobre el espaciotiempo.

El mito hermoso se refiere a la unificación en la física. En palabras de Smolin:

*El objetivo más apreciado en la física, como en las malas novelas de romance es la **unificación**. Poner juntas dos cosas que previamente se entendían como diferentes y reconocerlas como aspectos de una simple entidad — cuando podemos hacerlo— es la más grande emoción en la ciencia.*

Por ejemplo, regresemos por un momento a la época de Giordano Bruno, cuando la mayoría de la gente pensaba que las estrellas eran agujeros por los que atravesaba la luz del paraíso. Imagine lo que pensarían estas personas cuando el señor Bruno dijo:

*El sol es sólo otra estrella —y las estrellas son soles ¡que están muy lejos!*

Esto tiene tremendas consecuencias, porque:

*Si las estrellas son soles, ¡el universo es más grande de lo que pensábamos!*

*Si las estrellas son soles, debe haber planetas alrededor de ellos, sobre los cuales ¡vive otra gente!*

*Si hay otros planetas con otra gente sobre ellos, entonces también Jesús vino a todos ellos, en tal caso su venida a la Humanidad no fue un evento único, o toda aquella gente ¡perdería la posibilidad de la salvación!*

Por esto último no es tan sorprendente que quemaran vivo al señor Bruno. Aunque de esta manera él unificaba al sol con las estrellas.

También hay cierta unificación en biología a partir de Darwin. Antes de él se creía que cada especie pertenecía a su propia categoría hecha individualmente por Dios. Pero la evolución natural significa que todas las especies tienen un ancestro en común. Éstas se unifican en una gran familia:

*Si todo ser viviente tiene un ancestro común, ¿deben estar hechos de forma similar!*

Y, en realidad, *estamos* hechos de la misma tela, porque toda vida resulta estar compuesta de células.

Hay, desde luego, **errores en teorías de unificación**. Dos conocidos son:

- Unificación del calor y la materia (*teoría del flogisto*).
- Unificación de la luz y el sonido (*teoría del éter*)

Las **unificaciones exitosas** más conocidas en la física son:

- Unificación del movimiento y el reposo (**Galileo**)
- Unificación de la electricidad y el magnetismo (**Maxwell**)
- Unificación de gravedad y espaciotiempo (**Einstein**)
- Unificación de la mecánica cuántica con la relatividad especial (**Dirac**)

Entre otras.

Todas las ideas importantes que los físicos han estudiado en los últimos cuarenta años —tales como la teoría de cuerdas, supersimetría, dimensiones superiores, lazos, y otras— son propuestas para unificación. ¿Cómo hacemos para decir cuál es correcta y cuál no lo es?

Las **características de las unificaciones exitosas** de acuerdo a Smolin son:

- **Sorpresa:** Si no hay sorpresa la idea es no interesante.
- **Consecuencias dramáticas:** La unificación debe conducir rápidamente a nuevas intuiciones e hipótesis.
- **Nuevas predicciones:** Sugerir nuevos tipos de experimentos que tengan sentido solamente a la luz de la nueva teoría.

Hasta ahora la teoría de gravedad cuántica de lazos tiene las dos primeras de estas tres características, como el que no existe realmente un Big Bang (Gran Explosión) que dio origen a nuestro Universo sino un Big Bounce (Gran Rebote), en el cual aparece una fuerza repulsiva que se opone a la gravedad, evitando así la singularidad (ver [24]). Desconozco si la teoría de cuerdas tenga algo así, pero una discusión sobre esto a manera de un diálogo entre un profesor y una alumna de cierta universidad norteamericana puede verse en [25].

### 10.3 Holonomía y curvatura

Una conexión nos permite comparar puntos en fibras vecinas (vectores o elementos de grupo que dependen de la descripción de la teoría particular) en una forma invariante. Si sabemos cómo transportar paralelamente un objeto a lo largo de una curva, podemos definir la derivada de este objeto en la dirección de la curva. Por otro lado, dada una noción de derivada covariante, uno puede introducir inmediatamente una noción de transporte paralelo a lo largo de cualquier curva.

Tenemos así, de manera esquemática

**Conexión**  $(A_a^i) \Leftrightarrow$  **Traslado Paralelo** (por una curva)  $\Leftrightarrow$  **Derivada Covariante**

El primer ejemplo de una conexión es, desde luego, el cuadri-potencial en la teoría de Maxwell del campo electromagnético,  $A_\mu = (\phi, \mathbf{A})$ , donde  $\phi$  es el potencial escalar ( $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ ) y  $\mathbf{A}$  es el potencial vectorial ( $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ). Notemos, sin embargo, que ahora la conexión tiene 2 tipos de índice, los latinos de inicio del alfabeto, que representan al espaciotiempo y los latinos de medio alfabeto que representan los grados de libertad internos.

El transporte paralelo asocia un elemento,  $H$ , del grupo de Lie<sup>3</sup> asociado al haz fibrado:

$$\mathbf{v}' = H(\gamma)\mathbf{v},$$

donde  $\mathbf{v}$  es algún vector sobre la variedad y  $\mathbf{v}'$  es el vector que se obtiene después de trasladarlo paralelamente a lo largo de una curva  $\gamma$  sobre la misma variedad (desde luego que se puede aplicar  $H$  a cualquier otro tensor).  $H(\gamma)$  se conoce como la **holonomía** o el factor de fase de Wu-Yang en física de partículas.

La **curvatura** (denotada por el tensor de Riemann  $\mathbf{R}$ , o el tensor de Faraday  $\mathbf{F}$ ) está relacionada con la falla de que un elemento de la fibra regrese a su valor original cuando se transporta paralelamente a lo largo de una pequeña curva

---

<sup>3</sup>Un grupo de Lie es un grupo que tiene también una estructura de variedad. Conceptos como éste y otros asociados pueden revisarse en el Libro de Baez [20], donde también se cita una amplia variedad de textos sobre topología algebraica, incluyendo algunos canónicos.

cerrada. Cuando la holonomía se evalúa sobre una curva cerrada infinitesimal con punto base  $o$ , tiene la misma información que la curvatura en  $o$ . El conocimiento de la holonomía para cualquier curva cerrada con un punto base  $o$  permite a uno, bajo hipótesis muy generales, reconstruir la conexión en cualquier punto de la variedad base hasta una transformación de norma.

Así que para curvas infinitesimales

$$H(\gamma) \Leftrightarrow \mathbf{R}$$

Un hecho importante sobre las holonomías es su invarianza bajo el conjunto de transformaciones de norma. Esto implicará que las configuraciones físicas de cualquier teoría de norma pueden representarse fielmente y de manera única por sus holonomías. Por tanto éstas pueden usarse para codificar toda la información cinemática sobre la teoría en cuestión.

Desde los años sesenta se han considerado varias descripciones de las teorías de norma en términos de las holonomías. Éstas parecen ser particularmente muy convenientes para estudiar las características no perturbativas en el nivel cuántico. En años recientes el interés en las descripciones no locales de las teorías de norma se ha incrementado mucho por la introducción de un nuevo conjunto de variables canónicas (variables de Ashtekar) que permiten a uno describir el espacio fase de la relatividad general de una manera semejante a una teoría de Yang-Mills  $SU(2)$ . Las holonomías pueden proporcionar un marco geométrico común para las 4 fuerzas fundamentales en la naturaleza.

## 10.4 El grupo de lazos

El grupo de lazos es la estructura fundamental básica de todas las formulaciones no locales de las teorías de norma en términos de las holonomías. Cuando cuantizamos la teoría, las funciones de onda en la “representación de lazos” son funciones que dependen de los elementos del grupo de lazos. Ésta es la razón física de por qué es importante entender la estructura del grupo de lazos, ya que es la “arena” donde la representación de lazos cuántica toma lugar.

A pesar de que el grupo de lazos no es un grupo de Lie, es posible definir sus generadores infinitesimales. Cuando estos generadores se representan en el espacio de funciones de lazos, dan lugar a operadores diferenciales en el espacio de lazos.

Consideremos un conjunto de curvas parametrizadas sobre una variedad  $M$  que son continuas y suaves. Una **curva**  $p$  es un mapeo

$$p : [0, s_1] \cup [s_1, s_2] \cdots [s_{n-1}, 1] \rightarrow M \quad (10.4.1)$$

suave en cada intervalo cerrado  $[s_i, s_{i+1}]$  y continuo en el dominio total. Hay una **composición** natural de curvas parametrizadas. Dadas dos curvas suaves  $p_1$  y  $p_2$  tales que el punto final de  $p_1$  es el mismo que el punto inicial de  $p_2$ , denotamos por  $p_1 \circ p_2$  a la curva:

$$p_1 \circ p_2(s) = \begin{cases} p_1(s), & \text{para } s \in [0, 1/2]; \\ p_2(2(s - 1/2)), & \text{para } s \in [1/2, 1]. \end{cases} \tag{10.4.2}$$

La curva en la dirección contraria (“**curva opuesta**”) está dada por:

$$p^{-1}(s) := p(1 - s). \tag{10.4.3}$$

Estamos interesados en curvas no parametrizadas. Por lo tanto definiremos una relación de equivalencia identificando la curva  $p$  y  $p \circ \phi$ .

Consideramos también **curvas cerradas**  $l, m, \dots$ , esto es, curvas que inician y terminan en el mismo punto  $o$ . Sea  $L_o$  al conjunto de todas estas curvas cerradas.  $L_o$  es un semi-grupo bajo la ley de composición  $(l, m) \rightarrow l \circ m$ . El elemento identidad (“**curva nula**”) está definido como la curva constante  $i(s) = o$  para cualquier  $s$  y cualquier parametrización. Sin embargo, no tenemos una estructura de grupo, ya que la curva opuesta  $l^{-1}$  no es una inversa de grupo en el sentido de que  $l \circ l^{-1} \neq i$ .

Las holonomías están asociadas con el transporte paralelo alrededor de curvas cerradas. En el caso de un haz trivial la conexión está dada por una 1-forma  $A_a$  sobre  $M$  con valores en el álgebra de Lie. El transporte paralelo alrededor de una curva cerrada  $l \in L_o$  es un mapeo de la fibra sobre  $o$  en sí misma dado por la **exponencial de trayectoria ordenada** [20],

$$H_A(l) = P \exp \int_l A_a(y) dy^a. \tag{10.4.4}$$

Para un haz fibrado principal  $P(M, G)$  con grupo  $G$  sobre  $M$  el **mapeo de holonomía** está definido como sigue. Elegimos un punto  $\hat{o}$  en la fibra sobre  $o$ , con la conexión  $A$  alzamos la curva cerrada  $l$  en  $M$  a la curva  $\hat{l}$  en  $P$  de tal forma que el punto inicial es:

$$\hat{l}(0) = \hat{o} \tag{10.4.5}$$

y el punto final es:

$$\hat{l}(1) = \hat{l}(0)H_A(l), \tag{10.4.6}$$

lo cual define a  $H_A(l)$ . La holonomía  $H_A$  es un elemento del grupo  $G$  y el producto denota la acción por la derecha de  $G$ . La propiedad principal de  $H_A$  es:

$$H_A(l \circ m) = H_A(l)H_A(m). \tag{10.4.7}$$

Un cambio en la elección del punto en la fibra sobre  $o$  reemplazando  $\hat{o}$  por  $\hat{o}' = \hat{o}g$  induce la transformación

$$H'_A(l) = g^{-1}H_A(l)g. \tag{10.4.8}$$



Ahora introducimos una relación de equivalencia para transformar al conjunto  $L_o$  en un grupo. Identificamos todas las curvas cerradas que conducen a la misma holonomía para todas las conexiones suaves, ya que las curvas con la misma holonomía tienen la misma información para construir las cantidades físicas de la teoría. Las clases de equivalencia bajo esta relación son lo que llamaremos **lazos** y los denotaremos con letras griegas.

**Definición 2** *Sea*

$$H_A : L_o \rightarrow G \quad (10.4.9)$$

*el mapeo holonomía de una conexión  $A$  definido sobre un haz  $P(M, G)$ . Dos curvas  $l, m \in L_o$  son equivalentes,  $l \sim m$ , si y sólo si*

$$H_A(l) = H_A(m) \quad (10.4.10)$$

*para todo haz  $P(M, G)$  y toda conexión suave  $A$ .*

**Definición 3** *Comenzamos por definir los lazos que son equivalentes a la identidad. Una curva cerrada  $l$  se llama un **árbol** si existe una homotopía de  $l$  a la curva nula en la cual la imagen de la homotopía está incluida en la imagen de  $l$ . Este tipo de curvas no “encierran área alguna” de  $M$ . Dos curvas cerradas  $l, m \in L_o$  son equivalentes  $l \sim m$  si y sólo si  $l \circ m^{-1}$  es un árbol.*

**Definición 4** *Dadas dos curvas cerradas  $l$  y  $m$  y tres curvas abiertas  $p_1, p_2$  y  $q$  tales que*

$$l = p_1 \circ p_2 \quad (10.4.11)$$

$$m = p_1 \circ q \circ q^{-1} \circ p_2 \quad (10.4.12)$$

*entonces  $l \sim m$ .*

Con cualquiera de estas definiciones uno puede probar que la composición entre lazos está bien definida y es otra vez un lazo, i.e., si  $\alpha \equiv [l]$  y  $\beta \equiv [m]$ , entonces  $\alpha \circ \beta = [l \circ m]$  donde  $[\ ]$  denota las clases de equivalencia.

Notemos que con la relación de equivalencia definida, tiene sentido definir un inverso de un lazo. Ya que la composición de una curva con su opuesta lleva a un árbol, es natural, dado un lazo  $\alpha$ , definir su inversa  $\alpha^{-1}$  por  $\alpha \circ \alpha^{-1} = \iota$  donde  $\iota$  es el conjunto de curvas cerradas equivalentes a la curva nula (árboles).

Denotaremos al conjunto de lazos con punto base  $o$  por  $\mathcal{L}_o$ . Bajo la ley de composición dada por  $\circ$  este conjunto es un grupo *no* abeliano, el cual se llama el **grupo de lazos**.

Cualquier homomorfismo,

$$\mathcal{L}_o \rightarrow G, \quad (10.4.13)$$

donde  $G$  es un grupo de Lie, define una *holonomía* asociada con una conexión.

Imponiendo condiciones de suavidad sobre el homomorfismo, se puede asegurar que un haz fibrado principal diferenciable y una conexión estén definidos de tal forma que  $H$  sea la holonomía de esta conexión. Bajo un homomorfismo, la composición del grupo de lazos es mapeada suprayectivamente a la composición del grupo de Lie  $G$ ,

$$H(\alpha \circ \beta) = H(\alpha)H(\beta), \quad (10.4.14)$$

y las inversas son mapeadas cada una a otra,

$$H(\alpha^{-1}) = (H(\alpha))^{-1}. \quad (10.4.15)$$

En lo que sigue usaremos funciones de lazos, tales como la holonomía. Obviamente, no cualquier función de las curvas es una función de lazos (considere, por ejemplo, la longitud de una curva).

Introducimos una noción de continuidad en el espacio de lazos. Definimos a dos lazos  $\alpha$  y  $\beta$  como **cerrados**, en el sentido de que  $\alpha$  en una vecindad  $U_\epsilon(\beta)$ , si existen al menos dos curvas parametrizadas  $a(s) \in \alpha$  y  $b(s) \in \beta$  tales que  $a(s) \in U_\epsilon(b(s))$  con la topología usual de curvas en la variedad.

Introducimos una relación de equivalencia para curvas abiertas. Llamaremos a las clases de equivalencia de curvas abiertas "**trayectorias**". Dadas dos curvas abiertas  $p_o^x$  y  $q_o^x$  del punto base al punto  $x$  en la variedad, definimos a estas curvas como **equivalentes** si y sólo si  $p_o^x q_o^{-1x}$  es un árbol

De ahora en adelante usaremos intercambiabilmente las notaciones  $q_o^{-1x}$  y  $q_x^o$  para designar al mismo objeto, la curva  $q$  que va de  $x$  a  $o$ .

Denotaremos a las trayectorias con letras griegas como lo hacemos para lazos, pero indicando los puntos de origen y final, como en  $\alpha_o^x$ . Dadas dos diferentes trayectorias que inician y terminan en los mismos puntos, es inmediato ver que la composición de una con la opuesta de la otra es un lazo. De manera análoga uno puede componer lazos con trayectorias para producir nuevas trayectorias con los mismos puntos finales. Sin embargo, las trayectorias no pueden estructurarse en un grupo, ya que no es posible componer, en general, dos trayectorias para formar una nueva trayectoria (el final de una de ellas debe coincidir con el inicio de la otra para hacer esto).

## 10.5 Generadores infinitesimales del grupo de lazos. La derivada de lazo

Consideramos una representación del grupo de lazos dada por operadores que actúan sobre funciones continuas. Introducimos un conjunto de operadores diferenciales que actúan sobre estas funciones los cuales están relacionados a los generadores infinitesimales del grupo de lazos, con los cuales pueden construirse

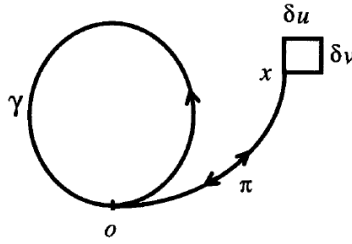


Figura 10.1: El lazo infinitesimal que define la derivada de lazo.

los elementos del grupo. Estos operadores están relacionados a cantidades físicas de teorías de norma.

Sea  $\Psi(\gamma)$  una función de valores complejos, continua, con  $\gamma \in \mathcal{L}_o$ ; considere su variación cuando el lazo  $\gamma$  cambia por la adición de un lazo infinitesimal  $\delta\gamma$  con punto base en un punto  $x$  conectado por una trayectoria  $\pi_x^o$  al punto base de  $\gamma$  (vea la Figura 1), i.e., queremos evaluar el cambio en la función cuando cambia su argumento de  $\gamma$  a  $\pi_x^o \circ \delta\gamma \circ \pi_o^x \circ \gamma$ . Para esto, consideremos una familia con dos parámetros de lazos infinitesimales  $\delta\gamma$  que contienen, en una carta coordenada particular, la curva obtenida al atravesar el vector  $u^a$  de  $x^a$  a  $x^a + \epsilon_1 u^a$ , el vector  $v^a$  de  $x^a + \epsilon_1 u^a$  a  $x^a + \epsilon_1 u^a + \epsilon_2 v^a$ , el vector  $-u^a$  de  $x^a + \epsilon_1 u^a + \epsilon_2 v^a$  a  $x^a + \epsilon_2 v^a$  y el vector  $-v^a$  de  $x^a + \epsilon_2 v^a$  regresando a  $x^a$  como se muestra en la Figura 1. Denotamos este tipo de curvas con la notación  $\delta u \delta v \delta \bar{u} \delta \bar{v}$ , donde  $\delta \bar{u} \equiv (\delta u)^{-1}$ .

Para  $\pi$  y  $\gamma$  dados una función diferenciable de lazos depende sólomente de los vectores infinitesimales  $\epsilon_1 u^a$  y  $\epsilon_2 v^a$ . Supondremos que ésta tiene la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \Psi(\pi_o^x \circ \delta\gamma \circ \pi_x^o \circ \gamma) &= \Psi(\gamma) + \epsilon_1 u^a Q_a(\pi_o^x) \Psi(\gamma) + \epsilon_2 v^a P_a(\pi_o^x) \Psi(\gamma) \\ &\quad + \frac{1}{2} \epsilon_1 \epsilon_2 (u^a v^b + v^a u^b) S_{ab}(\pi_o^x) \Psi(\gamma) \\ &\quad + \frac{1}{2} \epsilon_1 \epsilon_2 (u^a v^b - v^a u^b) \Delta_{ab}(\pi_o^x) \Psi(\gamma), \end{aligned} \tag{10.5.1}$$

donde  $Q, P, S, \Delta$  son operadores diferenciales sobre el espacio de las funciones  $\Psi(\gamma)$ . Si  $\epsilon_1$  o  $\epsilon_2$  se anulan o si  $u$  es colineal con  $v$  entonces  $\delta\gamma$  es un árbol y todos los términos del lado derecho, excepto el primero, se anulan. Esto significa que  $Q = P = S = 0$ . Ya que la combinación antisimétrica  $(u^a v^b - v^a u^b)$  se anula,  $\Delta$  no es necesariamente cero. Esto es, una función es lazo diferenciable si para toda trayectoria  $\pi_o^x$  y vectores  $u, v$ , el efecto de una deformación infinitesimal

está contenida completamente en el operador antisimétrico que depende de la trayectoria  $\Delta_{ab}(\pi_o^x)$ ,

$$\Psi(\pi_o^x \circ \delta\gamma \circ \pi_x^o \circ \gamma) = \left(1 + \frac{1}{2}\sigma^{ab}(x)\Delta_{ab}(\pi_o^x)\right)\Psi(\gamma), \quad (10.5.2)$$

donde  $\sigma^{ab}(x) = 2\epsilon_1\epsilon_2(u^{[a}v^{b]})$  es el elemento de área del lazo infinitesimal  $\delta\gamma$  (los paréntesis cuadrados junto a los superíndices denotan la parte antisimétrica). Llamaremos a este operador la **derivada de lazo**.

Si uno considera funciones de curvas en lugar de lazos, los términos  $Q, P, S$  estarán presentes en general (como en la función dada por la longitud de la curva).

Por otro lado, no toda función del espacio de lazos es diferenciable. Un ejemplo son los nudos invariantes –funcionales de lazos invariantes bajo deformaciones suaves de los lazos.

La idea de la derivada de lazo fue introducida originalmente por Mandelstam en [26]. El resultado de la aplicación de la derivada de lazo a una función de un lazo es también una función de un lazo.

Podemos extender la definición de la derivada de lazo para trayectorias abiertas como

$$\Psi(\pi_o^x \circ \delta\gamma \circ \pi_x^o \circ \gamma_o^y) = \left(1 + \frac{1}{2}\sigma^{ab}(x)\Delta_{ab}(\pi_o^x)\right)\Psi(\gamma_o^y), \quad (10.5.3)$$

siempre que se tenga un punto base, el cual proporciona un punto fijo para cualquier lazo sobre el cual pegar la trayectoria abierta.

## 10.6 Propiedades de la derivada de lazo y otros generadores

A continuación escribimos las propiedades más relevantes de la derivada de lazo, las cuales no probaremos directamente, pero que serán necesarias para la siguiente sección de este artículo. Las pruebas de éstas pueden verse en el libro de Gambini y Pullin [10]. También definiremos algunas otras derivadas para funciones de lazos.

### 10.6.1 Carácter tensorial

Por su definición, (10.5.2), la derivada de lazo debe comportarse como un tensor. Notemos que la derivada de lazo está contraída con el tensor  $\sigma^{ab}$ . Por lo tanto, por la ley del cociente, debe ser un tensor.

### 10.6.2 Relaciones de conmutación

Las derivadas de lazo son operadores no conmutativos. Esto está asociado naturalmente con el hecho de que corresponden a los generadores de un grupo no abeliano. Sus relaciones de conmutación pueden calcularse directamente a partir de las propiedades geométricas del grupo de lazos. Resulta que, para trayectorias abiertas uno tiene:

$$[\Delta_{ab}(\pi_o^x), \Delta_{cd}(\chi_o^y)] = \Delta_{cd}(\chi_o^y)[\Delta_{ab}(\pi_o^x)], \quad (10.6.1)$$

de lo cual es inmediato probar que:

$$\Delta_{ab}(\pi_o^x)[\Delta_{cd}(\chi_o^y)] = -\Delta_{cd}(\chi_o^y)[\Delta_{ab}(\pi_o^x)]. \quad (10.6.2)$$

Estas expresiones muestran la dependencia en la trayectoria de la derivada de lazo, en el sentido de que expresan la variación de la derivada cuando se varía la trayectoria. Estas expresiones pueden interpretarse como un conmutador de grupo si se ve a la derivada de lazo como un generador del grupo de lazos.

Estas relaciones de conmutación pueden verse en una forma diferente considerando su expresión integral. Para esto, introducimos un operador dependiente de lazos  $U(\alpha)$  sobre el espacio de funciones de lazos, el cual tiene el efecto de introducir una deformación finita en el argumento de la función,

$$U(\alpha)\Psi(\gamma) \equiv \Psi(\alpha \circ \gamma). \quad (10.6.3)$$

El operador tiene una inversa definida naturalmente

$$U(\alpha)^{-1} = U(\alpha^{-1}), \quad (10.6.4)$$

y tiene una ley de composición natural,

$$U(\alpha)U(\beta)\Psi(\gamma) = U(\alpha \circ \beta)\Psi(\gamma) \quad (10.6.5)$$

Ahora consideramos la acción de la derivada de lazo evaluada a lo largo de una trayectoria deformada sobre una función de lazos, y aplicando la definición de la derivada de lazo (10.5.2) obtenemos:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\sigma^{ab}\Delta_{ab}(\alpha \circ \pi_o^x)\right)\Psi(\gamma) = \Psi(\alpha \circ \pi_o^x \circ \delta\gamma \circ \pi_o^x \circ \alpha^{-1} \circ \gamma), \quad (10.6.6)$$

donde  $\delta\gamma$  es el lazo infinitesimal asociado con el elemento de área  $\sigma^{ab}$ . Entonces usamos la definición del operador  $U$  (10.6.3) y tenemos:

$$\Psi(\alpha \circ \pi_o^x \circ \delta\gamma \circ \pi_o^x \circ \alpha^{-1} \circ \gamma) = U(\alpha) \left(1 + \frac{1}{2}\sigma^{ab}\Delta_{ab}(\pi_o^x)\right) U(\alpha)^{-1}\Psi(\gamma), \quad (10.6.7)$$

de lo cual tenemos la identidad,

$$\Delta_{ab}(\alpha \circ \pi_o^x) = U(\alpha)\Delta_{ab}(\pi_o^x)U(\alpha)^{-1}, \quad (10.6.8)$$

la cual expresa la propiedad de transformación de la derivada de lazo bajo deformaciones finitas de la trayectoria. En la siguiente sección veremos que esta expresión es la reflexión en el lenguaje de lazos de la covariancia de norma del campo tensorial en una teoría de norma.

### 10.6.3 Identidades de Bianchi

Puede obtenerse un segundo conjunto de relaciones a partir de las propiedades geométricas del grupo de lazos. Estas relaciones son una reflexión de las identidades de Bianchi usuales de las teorías de Yang-Mills. Para esto necesitamos introducir un nuevo operador diferencial, al cual llamaremos la derivada covariante de Mandelstam (ver [26]), que actúa sobre funciones de trayectorias abiertas.

Dada una función de una trayectoria abierta  $\Psi(\pi_o^x)$ , una carta de coordenadas local en el punto  $x$  y un vector en esa carta  $u^a$ , definimos la **derivada de Mandelstam** considerando el cambio en la función cuando la trayectoria se extiende de  $x$  a  $x + \epsilon u$  por la trayectoria infinitesimal  $\delta u$  como

$$\Psi(\pi_o^x \circ \delta u) = (1 + \epsilon u^a D_a)\Psi(\pi_o^x). \quad (10.6.9)$$

Denotamos a la nueva trayectoria como  $\pi_o^{x+\epsilon u}$ . Si uno lleva a cabo una transformación de coordenadas, notando que  $\epsilon u^a$  es un vector y aplicando la ley del cociente, es inmediato ver que  $D_a$  transforma como una 1-forma.

Con esta última definición puede probarse que se satisfacen las identidades de Bianchi (ver [10]):

$$D_a \Delta_{bc}(\pi_o^x) + D_b \Delta_{ca}(\pi_o^x) + D_c \Delta_{ab}(\pi_o^x) = 0. \quad (10.6.10)$$

### 10.6.4 La identidad de Ricci

Considere la acción de cuatro derivadas covariantes de Mandelstam a lo largo de los vectores  $u, v$  sobre una función de una trayectoria abierta  $\Psi(\pi_o^x)$ . Manteniendo los términos de primer orden en  $\epsilon_1 \epsilon_2$  en el lado derecho de la siguiente expresión obtenemos:

$$\begin{aligned} (1 + \epsilon_1 u^a D_a)(1 + \epsilon_2 v^b D_b)(1 - \epsilon_1 u^c D_c)(1 - \epsilon_2 v^d D_d)\Psi(\pi_o^x) = \\ (1 + \epsilon_1 \epsilon_2 u^a v^b [D_a, D_b])\Psi(\pi_o^x). \end{aligned} \quad (10.6.11)$$

La acción de cuatro derivadas covariantes es equivalente a anexar un lazo infinitesimal al final de la trayectoria  $\pi_o^x$  y por lo tanto puede escribirse en términos de la derivada de lazo,

$$[D_a, D_b]\Psi(\pi_o^x) = \Delta_{ab}(\pi_o^x)\Psi(\pi_o^x). \quad (10.6.12)$$

La cual es el análogo en lazos de la expresión usual del conmutador de derivadas covariantes en términos de la curvatura.

### 10.6.5 La derivada de lazo como un generador del grupo de lazos

Podemos mostrar, por superposición de derivadas de lazo, que puede generarse cualquier lazo finito homotópico a la identidad. El resultado final es:

$$\Psi(\eta(1)) = T \exp \left( \int_0^1 dt \oint ds \eta^a(t, s) \eta^{b'}(t, s) \Delta_{ab}(\eta(t)_o^s) \Psi(\eta(0)) \right), \quad (10.6.13)$$

donde la integral exterior está ordenada en  $t$  (T-ordenada),  $\eta$  es un lazo y  $\dot{\eta}$  es su derivada respecto a  $t$ . Este resultado es la versión en lazos del teorema de Stokes no abeliano de teorías de norma y muestra que la derivada de lazo es un generador del espacio de lazos, i.e., nos permite generar cualquier lazo finito homotópico a la identidad.

Notemos que la expresión para el elemento finito del grupo implica una superposición de un número infinito de generadores asociado con diferentes trayectorias. Esta no es la situación usual que uno encuentra en grupos de Lie, donde es suficiente exponenciar un generador para obtener cualquier elemento del grupo. Esta es otra indicación de que el grupo de lazos se caracteriza por *no* ser un grupo de Lie.

Identificar a la derivada de lazo como un generador del grupo de lazos nos permite reescribir las relaciones de conmutación de las derivadas de lazo. Con la definición de la derivada de lazo, la ecuación (10.6.1) puede ponerse como:

$$[\Delta_{ab}(\pi_o^x), \Delta_{cd}(\chi_o^y)] = \lim_{\epsilon_i \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma^{ab}} (\Delta_{cd}(\delta\eta_1 \circ \chi_o^y) - \Delta_{cd}(\chi_o^y)), \quad (10.6.14)$$

la cual es la expresión usual del conmutador en términos de una combinación lineal de elementos del álgebra. Así, el grupo de lazos tiene relaciones de conmutación similares a las de un grupo de Lie.

### 10.6.6 Derivada de conexión

En la sección anterior vimos que la derivada de lazo tiene varias propiedades semejantes a las de la curvatura o campo tensorial de una teoría de norma. Ahora introducimos un operador diferencial con propiedades similares a las de la conexión o potencial vectorial de una teoría de norma.

Dado un vector  $u$  en  $x$ , la **derivada de conexión** de una función continua de un lazo  $\Psi(\gamma)$  será obtenida al considerar la deformación del lazo dada por la trayectoria  $\pi_o^{y_0^i} \circ \pi_{y_0^i}^x \circ \delta u \circ \pi_{x+\epsilon u}^{y_0^i} \circ \pi_{y_0^i}^o$ . La trayectoria  $\delta u$  va de  $x$  a  $x + \epsilon u$ . Diremos que la derivada de conexión  $\delta_a$  existe y está bien definida si la función

que depende del lazo deformado admite una expansión en términos de  $\epsilon u^a$  dada por:

$$\Psi(\pi_o^x \circ \delta u \circ \pi_{x+\epsilon u}^o \circ \gamma) = (1 + \epsilon u^a \delta_a(x)) \Psi(\gamma), \quad (10.6.15)$$

donde hemos escrito  $\pi_o^x$  para denotar la trayectoria  $\pi_o^{y_0^i} \circ \pi_{y_0^i}^x$  y similarmente para su inversa.

Podemos probar también que se cumple la siguiente relación:

$$\Delta_{ab}(\pi_o^x) = \partial_a \delta_b(x) - \partial_b \delta_a(x) + [\delta_a(x), \delta_b(x)]. \quad (10.6.16)$$

La idea de introducir la derivada de conexión fue para proporcionarnos en el lenguaje de lazos una noción de la conexión o potencial vectorial similar a la de las teorías de norma. Sin embargo, la conexión en una teoría de norma es dependiente de la norma. ¿Cómo se manifiesta esta dependencia misma en el lenguaje de lazos? Lo hace a través de la elección de la prescripción de la trayectoria usada para calcular la derivada de conexión.

El cambio en la derivada de conexión debido a un cambio en la prescripción de la trayectoria está dado por:

$$\delta_a^{(\chi)}(x) = U(x) \delta_a^{(\chi)}(x) U(x)^{-1} + U(x) \partial_a U(x)^{-1}. \quad (10.6.17)$$

y vemos que es totalmente análoga a la ley de transformación para una conexión de norma bajo cambios de norma.

La relación usual entre conexiones y holonomías en una carta local en una teoría de norma también puede escribirse en este lenguaje. Esta relación es sólo una expresión del hecho de que los generadores infinitesimales asociados con conexiones nos permiten construir lazos finitos. Podemos escribir la siguiente exponencial de trayectoria ordenada

$$U(\gamma) = \text{P exp} \left( \int_{\gamma} dy^a \delta_a(y) \right). \quad (10.6.18)$$

Esta es la expresión familiar para teorías de norma, las cuales conducen a la holonomía en términos de la exponencial de trayectoria ordenada de una conexión.

## 10.7 Representaciones del grupo de lazos

Las relaciones entre los generadores del grupo de lazos son independientes de cualquier representación particular. Ahora estudiaremos su forma en el contexto de una representación particular en términos de un grupo de norma dado.

Las teorías de norma surgen como representaciones (homomorfismos  $\mathcal{H}$ ) del grupo de lazos sobre algún grupo de norma  $G$ ,

$$\mathcal{H} : \mathcal{L}_0 \rightarrow G, \quad (10.7.1)$$



i.e.,

$$\gamma \rightarrow H(\gamma), \quad (10.7.2)$$

de tal manera que  $H(\gamma_1)H(\gamma_2) = H(\gamma_1 \circ \gamma_2)$ .

Consideremos un grupo de Lie específico, por ejemplo  $SU(N)$ <sup>4</sup>, con  $N^2 - 1$  generadores  $X^i$  tal que  $\text{Tr}X^i = 0$  y

$$[X^i, X^j] = C_k^{ij} X^k, \quad (10.7.3)$$

donde  $C_k^{ij}$  son las constantes de estructura del grupo en cuestión.

Calculemos la acción de la derivada de conexión en esta representación. Usamos las mismas prescripciones que en la sección previa

$$(1 + \epsilon u^a \delta_a(x))H(\gamma) = H(\pi_o^x \circ \delta u \circ \pi_{x+\epsilon u}^o \circ \gamma) = H(\pi_o^x \circ \delta u \circ \pi_{x+\epsilon u}^o)H(\gamma). \quad (10.7.4)$$

Ya que el lazo  $\pi_o^x \circ \delta u \circ \pi_{x+\epsilon u}^o$  es cercano al lazo identidad (con la topología del espacio de lazos) y ya que  $H$  es una representación continua diferenciable,

$$H(\pi_o^x \circ \delta u \circ \pi_{x+\epsilon u}^o) = 1 + i\epsilon u^a A_a(x), \quad (10.7.5)$$

donde  $A_a(x)$  es un elemento del álgebra del grupo, en nuestro ejemplo de  $SU(N)$ . Esto es  $A_a(x) = A_a^i X^i$ . Por tanto, vemos que mediante la acción de la derivada de conexión,

$$\delta_a(x)H(\gamma) = iA_a(x)H(\gamma). \quad (10.7.6)$$

Siguiendo pasos similares uno obtiene la acción de la derivada de lazo,

$$\Delta_{ab}(\pi_o^x)H(\gamma) = iF_{ab}(x)H(\gamma), \quad (10.7.7)$$

donde  $F_{ab}$  es un campo tensorial antisimétrico con valores en el álgebra (tensor de Faraday).

Recuerde que  $\pi_o^x$  sólo se fija por la prescripción. Cambiar ésta para  $\pi_o^x$  es la manera de cambiar la norma. Suponga que cambiamos la prescripción por  $\pi_o^x \rightarrow \pi_o'^x \circ \pi_x^o \circ \pi_o^x$ . Entonces usamos simplemente la ecuación (10.6.8) que en términos del campo se lee:

$$F'_{ab} = H(x)F_{ab}(x)H(x)^{-1}, \quad (10.7.8)$$

donde  $H(x)$  es una abreviatura para  $H(\pi_o'^x \circ \pi_x^o)$ .

A partir de la ecuación (10.6.16) obtenemos inmediatamente la relación usual que define la curvatura en términos del potencial,

$$F_{ab}(x) = \partial_a A_b(x) - \partial_b A_a(x) + i[A_a, A_b]. \quad (10.7.9)$$

---

<sup>4</sup> $SU(N)$  es el grupo de matrices unitarias  $N \times N$  con determinante igual a 1, (Special Unitary, en inglés).

Las transformaciones de norma en términos de la conexión son, a partir de la ecuación (10.6.17),

$$A'_a(x) = H(x)A_a(x)H(x)^{-1} - iH(x)\partial_a H(x)^{-1}. \quad (10.7.10)$$

Hacemos actuar el operador de deformación  $U(\eta)$  introducido en la sección anterior sobre la representación  $H(\gamma)$ ,

$$U(\eta)H(\gamma) = H(\eta \circ \gamma) = H(\eta)H(\gamma). \quad (10.7.11)$$

Ahora, aplicando la fórmula (10.6.18),

$$U(\eta)H(\gamma) = \text{P exp} \left( \oint_{\eta} dy^a \delta_a(y) \right) H(\gamma), \quad (10.7.12)$$

y sustituyendo la ecuación (10.7.6) y comparando términos obtenemos:

$$H(\eta) = \text{P exp} \left( i \oint_{\eta} dy^a A_a(y) \right), \quad (10.7.13)$$

lo cual muestra que la representación que estamos considerando está dada en términos de la expresión usual para la holonomía de la conexión  $A_a$ .

Hasta ahora, las trayectorias abiertas no han jugado rol físico relevante. Ahora mostramos que éstas están relacionadas naturalmente a la inclusión de campos materiales acoplados a teorías de norma. Consideramos campos de materia que transforman bajo la representación fundamental de los grupos de norma considerados en nuestro ejemplo,  $SU(N)$ .

Describiremos el campo de materia en el punto  $x$  a través de un objeto que depende de la trayectoria  $\Psi(\pi_o^x)$ . La extensión natural de la representación introducida al inicio de esta sección al caso de trayectorias abiertas es considerar la composición de una trayectoria abierta y un lazo, definida por:

$$\Psi(\gamma \circ \pi_o^x) \equiv H(\gamma)\Psi(\pi_o^x). \quad (10.7.14)$$

Como en otros casos, el rol de la trayectoria elegida será fijar una elección de norma. Una descripción local en una norma fija se obtiene fijando una familia de trayectorias, cada una de las cuales está asociada con cada punto en la variedad. Las funciones  $\Psi$  ahora se convertirán en funciones de puntos etiquetadas por la prescripción fijada  $\pi$  usada para determinar las trayectorias  $\Psi^{(\pi)}(x)$ . La prescripción está dada por una función continua de los puntos de la variedad en las trayectorias  $f(x) = \pi_o^x$ . Notemos que si cambiamos la prescripción para la trayectoria  $\pi_o^x \rightarrow \pi'^x \circ \pi_o^x$  obtenemos:

$$\Psi^{(\pi')}(x) = H(\pi'^x \circ \pi_o^x)\Psi^{(\pi)}(x). \quad (10.7.15)$$

La derivada de Mandelstam  $D_a$  se comporta como la derivada covariante usual de una teoría de norma. Considere su acción sobre una función de una trayectoria abierta,

$$\begin{aligned} (1 + \epsilon u^a D_a)\Psi(\pi_o^x) &= \Psi(\pi_o^x \circ \delta u) = \Psi(\pi_o^x \circ \delta u \circ \pi_{x+\epsilon u}^o \circ \pi_o^{x+\epsilon u}) \\ &= (1 + \epsilon u^a \delta_a(x))(1 + \epsilon u^b \partial_b)\Psi(\pi_o^x), \end{aligned} \quad (10.7.16)$$

expandiendo en  $\epsilon$  y manteniendo términos de primer orden, obtenemos:

$$D_a \Psi(\pi_o^x) = \partial_a \Psi^{(\pi)}(x) + \delta_a(x) \Psi(\pi_o^x). \quad (10.7.17)$$

Usando la relación entre la función de una trayectoria deformada y la holonomía (10.7.14), concluimos que:

$$D_a \Psi(\pi_o^x) = \partial_a \Psi^{(\pi)}(x) + i A_a(x) \Psi^{(\pi)}(x). \quad (10.7.18)$$

La forma usual de la identidad de Ricci,

$$[D_a, D_b] = i F_{ab}, \quad (10.7.19)$$

puede obtenerse directamente de la expresión de arriba o considerando la representación de la ecuación (10.6.12).

## 10.8 Conclusiones

A manera de conclusión, hemos mostrado cómo surgen las teorías de norma como representaciones del grupo de lazos. Todos los conceptos cinemáticos usuales de las teorías de norma son reflexiones de las propiedades del grupo de lazos.

Notemos que las identidades y propiedades que mostramos en este artículo para las derivadas de lazo y de conexión *no* dependen de alguna elección del grupo de norma para representar el grupo de lazos. Es sólo cuando uno considera una representación particular del grupo de lazos en términos de un grupo de norma que estas cantidades adoptan el significado usual de conexiones y curvaturas en teorías de norma.

Como señalamos en la introducción, todo esto está enfocado al estudio, en un futuro, de las teorías modificadas de gravedad introducidas por Krasnov en la representación de lazos. Desde luego que, antes de tratar dichas teorías, es necesario el estudio del grupo de lazos extendido, el cual sí es un grupo de Lie (ver [10]).

# Bibliografía

- [1] K. Krasnov, *Class. Quantum Grav.* **25**, 025001, 2008.
- [2] K. Krasnov, Renormalizable non-metric gravity? (**Preprint** hep-th/0611182) 2007.
- [3] K. Krasnov, **Phys. Rev. Lett.** **100** 081102, 2008.
- [4] R. Rosas-Rodríguez, **AIP Conf. Proc.** **1287**, 85, 2010.
- [5] L. Smolin, **The Trouble with Physics**, Houghton Mifflin Company, Boston, 2006.
- [6] R. Penrose, **The Road to Reality**, Jonathan Cape, London, 2004.
- [7] C. N. Yang and R. L. Mills, *Phys. Rev.* **96**, 191, 1954.
- [8] R. Jackiw, *Rev. Mod. Phys.* **52**, 661 1980.
- [9] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, UK 1985.
- [10] R. Gambini and J. Pullin, **Loops, Knots, Gauge Theories and Quantum Gravity**, Cambridge University Press, Cambridge 2000.
- [11] C. Rovelli, L. Smolin, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 1155 1988.
- [12] C. Rovelli, L. Smolin, *Nucl. Phys. B* **331**, 80 1990.
- [13] R. Arnowitt, S. Deser and C. Misner, **Gravitation: an introduction to current research** p 227, ed. L. Witten, Wiley, New York, 1962.
- [14] A. Ashtekar, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2244 1986.
- [15] A. Ashtekar, *Phys. Rev. D* **36**, 1587 1987.
- [16] L. H. Kauffman, **Knots and Physics**, World Scientific, Singapore, 1991.
- [17] A. Ashtekar, **Lectures on Non Perturbative Canonical Gravity**, World Scientific, Singapore, 1991.

- [18] R. Rosas-Rodríguez, *Int. J. Mod. Phys. A* **23**, 895, 2008.
- [19] R. M. Wald, **General Relativity**, The University of Chicago Press, Chicago, 1984.
- [20] J. Baez and J. P. Muniainn, **Gauge Fields, Knots and Gravity**, World Scientific, Singapore, 1994.
- [21] R. Rosas-Rodríguez, *J. Phys.: Conf. Series* **545**, 012013, 2014.
- [22] V. Jones, *Bull. Am. Math. Soc.* **129**, 103, 1985.
- [23] S. W. Hawking **A brief history of time. From the Big Bang to black holes**, Bantam Books, New York, 1988.
- [24] A. Ashtekar, ed., **100 Years of Relativity. Space-time Structure: Einstein and Beyond**, World Scientific, Singapore, 2005.
- [25] C. Rovelli, *Int. J. Mod. Phys. D* **12**, 1509 2003.
- [26] S. Mandelstam, *Ann. Phys. (NY)* **126**, 279, 1980.