Una caracterización del primer módulo de Ditzian-Totik

Resumen

En el trabajo, se presenta un nuevo método para obtener una caracterización del módulo de suavidad de primer orden de Ditzian – Totik, en términos de una K – funcional. La importancia de este nuevo método, radica en el hecho de que permite obtener estimados aceptables de las constantes relacionadas con la caracterización.

Abstract

This study offers a new method for obtaining a characterization of the first order modulus of smoothness of Ditzian-Totik in terms of a K-function. The importance of this new method lies in the fact that it enables us to obtain acceptable estimates of the constants involved in such a characterization.

Abstrait

Le travail actuel présente une nouvelle méthode pour obtenir une caractérisation du module de la qualité de douceur de premier ordre de Ditzian - Totik, dans les termes d'un K- fonctionnel. L'importance de cette nouvelle méthode, est qu'elle permet d'obtenir des estimations acceptables des constantes liées à la caractérisation.

Palabras clave: módulo de primer orden de Ditzian-Totik. Estimados de constantes.

* *Bustamante González J.*

** *Álvarez Marín L. del C.*

Introducción

Desde principios de los años 80 del siglo pasado, se hizo evidente la necesidad de utilizar módulos de continuidad (suavidad) pesados para el estudio de problemas de la mejor aproximación de funciones continuas mediante polinomios algebraicos. La misma necesidad aparece cuando tales funciones continuas, se intentan aproximar mediante operadores lineales. Una opción de solución a este problema, apareció en un libro debido a Z. Ditzian y V. Totik [1]. Allí se presentaron los que hoy, se denominan módulos de suavidad de Ditzian – Totik. Para una mejor comprensión del lector, presentamos la definición del módulo de suavidad de primer orden.

Sea $C[0,1]$ el espacio de todas las funciones continuas en el intervalo $[0,1]$, con la norma del supremo. Durante todo el trabajo $\varphi(x)=\sqrt{x(1-x)}$,para $x\in[0,1]$. Además, para $h\in(0,1/2]$ consideraremos el conjunto

$$I(\varphi,h)=\{\,x\in[0,1]:\ x\pm h\varphi(x)\in[0,1]\,\}.$$

Definición 1. Para $f\in C[0,1]$ y $t\geq 0$, se define el módulo de suavidad de primer orden (de Ditzian – Totik) de f en t como

* *Benemérita Universidad Autónoma de Puebla*

** *Universidad Tecnológica de la Mixteca*

$$w^{\varphi}(f,t)=\sup_{0<h\le t}\sup\left\{\ \left\|\Delta_{h\varphi}f(x)\right\|_{\infty}:x\in I(\varphi,h)\right\} \tag{1}$$

donde

$$\Delta_{h\varphi}f(x)=f(x+\frac{h}{2}\varphi(x))-f(x-\frac{h}{2}\varphi(x)).$$

Para obtener estimados de la velocidad de convergencia de diferentes procesos de aproximación, hace falta caracterizar al módulo anterior mediante ciertas funciones llamadas K - funcionales. Para ver detalles de cómo realizar estos estimados remitimos al lector a [1]. También puede consultarse la monografía de R. A. DeVore y G. G. Lorentz [2]. Para explicar qué se entiende por una caracterización de un módulo necesitamos otra definición.

Denotemos por $W(\varphi)$ al espacio de todas las funciones $g\in C[0,1]$ absolutamente continuas tales que (aquí se trata del supremo esencial)

$$\|g\|_{W(\varphi)}=\sup_{x\in(0,1)}\ |\varphi(x)g'(x)|<\infty.$$

Para $f\in C[0,1]$ y $h\in(0,1/2]$, se define

$$K_{\varphi}(f,h)=\inf_{g\in W(\varphi)}\{\|f-g\|+h\|g\|_{W(\varphi)}\}. \tag{2}$$

Se dice que el módulo (1), está caracterizado mediante la funcional (2) o que estas funcionales son equivalentes, si cada una de ellas puede ser acotada superiormente por la otra multiplicada por alguna constante positiva. La primera caracterización del módulo (1) mediante (2), se dio en [1]. Para ser más específicos, allí se demostró que existen constantes positivas C_1, C_2 y t_0, tales que, cualquiera sea que la función $f\in C[0,1]$ y $t\in(0,t_0]$, se cumple que

$$C_1\,w^{\varphi}(f,t)\le K_{\varphi}(f,t)\le C_2\ w^{\varphi}(f,t). \tag{3}$$

Otra demostración de este resultado, se puede ver en [2]. Una de las limitaciones del resultado (3), es que no se da ninguna información sobre las constantes.

El problema de estimar estas constantes ha sido considerado por otros autores, ver por ejemplo [3].

En este trabajo estamos interesados en estimados relacionados con los módulos de primer orden (en estudios futuros extenderemos nuestras ideas a módulos de suavidad de un orden mayor). En particular, se demuestra el resultado siguiente:

Teorema 1. Si $f\in C[0,1]$ y $h\in(0,1/4]$, se cumple que

$$\frac{1}{2}w^{\varphi}(f,h)\le K_{\varphi}(f,h)\le$$
$$\le\left(6+\frac{1}{3}\right)w^{\varphi}\left(f,\frac{3}{2}\left(1+\frac{8}{\sqrt{31}}\right)h\right).$$

La demostración del Teorema 1, se sigue de los Teoremas 2 y 4 que se presentarán más abajo. Este tipo de resultado, es importante en Teoría de Aproximación ya que, el conocer buenos estimados de las constantes que aparecen en ciertas desigualdades es necesario para implementar su uso en algoritmos computacionales.

Desarrollo

En esta sección, se demuestra el resultado principal de este trabajo. Como las demostraciones de varios de los lemas que necesitamos son similares, algunas de ellas se omitirán.

Teorema 2. Si $f\in C[0,1]$ y $h\in(0,1/2]$, se cumple que

$$w^{\varphi}(f,h)\le 2K_{\varphi}(f,h).$$

Demostración. Fijemos $g\in W(\varphi)$ y $h\in(0,1/2]$. Si $x\in I(\varphi,h)$, entonces

$$|\Delta_{h\varphi}g(x)|=\left|\int_{x-h\varphi(x)}^{x+h\varphi(x)}g'(u)du\right|$$

$$\le\|g\|_{W(\varphi)}\int_{x-h\varphi(x)/2}^{x+h\varphi(x)/2}\frac{1}{\varphi(u)}du.$$

Para $x\in I(\varphi,h)$, definamos

$$G_h(x)=\int_{x-h\varphi(x)/2}^{x+h\varphi(x)/2}\frac{1}{\varphi(u)}du.$$

Veamos que $G_h(x)\le 2h$ Como $G_h(x)=G_h(1-x)$, podemos suponer que $x\le 1/2$. Como φ es cóncava y, además,creciente en $[0,1/2]$, para $u\in[x-h\varphi(x)/2,x+h\varphi(x)/2]$, se cumple que

$$\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2}\varphi(x-h\varphi(x))$$
$$\le\varphi(x-\frac{h}{2}\varphi(x))\le\varphi(u)$$

si $u \le 1/2$. Por otro lado, si $u > 1/2$, se tiene que

$$x - \frac{h}{2}\varphi(x) \le 1 - x - \frac{h}{2}\varphi(x) < \frac{1}{2}$$

De aquí que

$$\varphi\left(x - \frac{h}{2}\varphi(x)\right) \le \varphi\left(1 - x - \frac{h}{2}\varphi(x)\right)$$

$$= \varphi\left(x + \frac{h}{2}\varphi(x)\right) \le \varphi(u)$$

Luego,

$$G_h(x) \le \frac{2}{\varphi(x)} \int_{x-h\varphi(x)/2}^{x+h\varphi(x)/2} du = 2h.$$

Pasando al estimado para f, se tiene que

$$\left|\Delta_{h\varphi} f(x)\right| \le 2\| f - g \|_\infty + 2h \| g \|_{W(\varphi)}.$$

Como g es arbitraria, tomando ínfimo con respecto a g se obtiene el resultado anunciado.■

Para simplificar la exposición resumimos en la proposición siguiente algunas propiedades de la función φ.

Proposición 1. Para $h \in (0,1/4]$ se cumple que

$$h \le \varphi(h), \tag{4}$$

y

$$h \le \left\{ \frac{4}{\sqrt{15}}\varphi(h^2), \frac{16}{\sqrt{183}}\varphi\left(\frac{3h^2}{4}\right), \frac{8}{\sqrt{31}}\varphi\left(\frac{h^2}{2}\right), \frac{16}{\sqrt{63}}\varphi\left(\frac{h^2}{4}\right) \right\}. \tag{5}$$

Para $u \in [-h,h]$ y $x \in [0,1]$ definiremos

$$\psi_h(x,u) = (1 - 2h(h+\varphi(x)))x + (h+u)(h+\varphi(x)) = x(h + u - 2hx(h+\varphi(x)) \tag{6}$$

Proposición 2. Si $h \in (0,1/4]$, entonces existe un (único) punto b_h tal que:

(i) $1/2 < b_h < 1$,

(ii) $1 - b_h = h\varphi(b_h)$ y $1 - h \le b_h - a_h$ donde, por definición, $a_h = 1 - b_h$.

(iii) Para $x \in [a_h, b_h]$ se cumple que

$$h\varphi(x) \le \min\{x, 1-x\} \le 2\varphi^2(x),$$

(iv) Si $x \in [0, a_h)$, entonces $h\varphi(x) > x$.

(v) Para $x \in [0,1]$ se cumple que

$$0 \le \psi_h(x,u) \le 1.$$

Demostración. Definamos el punto b_h. Para $x \in [0,1]$ denotemos

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{1-x}.$$

Como

$$f'(x) = \frac{1}{2(1-x)\varphi(x)} > 0,$$

la función f es estrictamente creciente en $[0,1)$. Como $f(0) = 0$ y f tiende a infinito cuando x tiende a 1, se concluye que existe un único punto b_h tal que $f(b_h) = h^{-1}$. Esto es $h\varphi(b_h) = 1 - b_h$. De aquí se sigue que

$$1 - h \le 1 - h(\varphi(a_h) + \varphi(b_h)) \le b_h - a_h.$$

Por otro lado, si denotamos

$$g(x) = \frac{\varphi(x)}{x},$$

entonces, para $x \in (0,1)$,

$$g'(x) = -\frac{1}{2x\varphi(x)} < 0.$$

Argumentando como antes, se obtiene que existe un único punto c_h tal que $h\varphi(c_h) = c_h$. Luego, $c_h = a_h$.

Como $f(g)$ es creciente (decreciente) se tiene que, para $x \in (0,1)$, $f(x) \leq f(b_h)$ $(g(x) \leq g(a_h))$ y sólo si $x \leq b_h$ $(a_h \leq x)$. Luego $x \leq b_h$ $(a_h \leq x)$ si y sólo si $h\varphi(x) \leq (1-x)$ $(h\varphi(x) \leq x)$.

De las consideraciones anteriores, se sigue que, para $x \in [a_h, b_h]$,

$h\varphi(x) \leq \min\{x, 1-x\} \leq 2x(1-x) = 2\varphi^2(x)$.

Finalmente, para $x \in [0,1]$, se tiene que

$$0 \leq (1-2h(h+\varphi(x))x \leq \psi_h(x,u)$$
$$\leq (1-2h(h+\varphi(x)))x + 2h(h+\varphi(x)) \leq 1. \blacksquare$$

Lema 1. Si $f \in C[0,1]$, $h \in (0,1/4]$ y $x \in [0,1]$ entonces para $u \in [0, h/2]$, se tiene que

$$\left|f(x) - f(\psi_h(x,-u))\right| \leq w^{\varphi}\left(f, \frac{3}{2}\left(1+\frac{8}{\sqrt{31}}\right)h\right).$$

Demostración. Consideremos varios casos. Si denotamos $y = x + (h-u-2hx)(h+\varphi(x))/2$, entonces

$$x = y - \frac{1}{2}(h-u-2hx)(h+\varphi(x))$$

y

$$\psi_h(x,-u) = y + \frac{1}{2}(h-u-2hx)(h+\varphi(x)).$$

Según estas representaciones basta probar que

$$|h-u-2hx|(h+\varphi(x)) \leq \frac{3}{2}\left(1+\frac{8}{\sqrt{31}}\right)h\varphi(y)$$

Nótese que

$$x + h\left(\frac{1}{2}-2x\right)\frac{(h+\varphi(x))}{2} \leq y$$

$$\leq x + \frac{h}{2}(1-2x)(h+\varphi(x)). \quad (7)$$

Caso 1. Si $x \in [0,1/4]$, entonces $h-u-2hx \geq 0$ y $x \leq y$. Como

$$\frac{h^2}{2} + \frac{h}{2}\varphi(x) \leq x(1-h(h+\varphi(x)) + \frac{h}{2}(h+\varphi(x))$$
$$= x + h\left(\frac{1}{2}-2x\right)(h+\varphi(x)) \leq y$$
$$\leq x(1-h(h+\varphi(x)) + \frac{h}{2}(h+\varphi(x))$$
$$\leq \frac{1}{2} - \frac{h}{2}(h+\varphi(x)) + \frac{h}{2}(h+\varphi(x)) = \frac{1}{2},$$

se sigue de (5) que

$$(h-u-2hx)(h+\varphi(x)) \leq h\left(1+\frac{16}{\sqrt{63}}\right)\varphi(y).$$

Caso 2. Supóngase que $x \in (1/4, 1/2]$, si $0 \leq h-u-2hx$, entonces como en el Caso 1

$$x \leq y \leq \frac{1}{2}.$$

Como

$$h \leq \varphi(h) \leq \varphi(x)) \leq \varphi(y),$$

se concluye que

$$(h-u-2hx)(h+\varphi(x)) \leq h(1-2x)2\varphi(y) \leq h\varphi(y).$$

Si $h-u-2hx < 0$, entonces

$$x \geq y \geq x + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}-2hx\right)(h+\varphi(x)) \geq \frac{1}{4}.$$

De aquí que

$$(2hx+u-h)(h+\varphi(x)) \leq h\left(2x-\frac{1}{2}\right)(h+\varphi(x))$$
$$\leq \frac{h}{2}(h+\varphi(x)) \leq \frac{3}{2}h\varphi(y),$$

pues $1/4 \leq y \leq 1/2$ y $1-x \leq 2(1-y)$.

Caso 3. Supóngase que $x \in [1/2, 3/4]$, como $h-2hx = h((1-2x) \leq 0 \leq u$, entonces

$$0 \leq (2hx+u-h)(h+\varphi(x))$$
$$\leq h\left(2x-\frac{1}{2}\right)(h+\varphi(x)) \leq 2h\varphi(y),$$

pues

$$x \ge y \ge x + \frac{h}{2}(1-2x)(h+\varphi(x))$$

$$= x(1 - h(h+\varphi(x))) + \frac{h}{2}(h+\varphi(x))$$

$$\ge \frac{1}{2}(1-h(h+\varphi(x))) + \frac{h}{2}(h+\varphi(x)) \ge \frac{1}{2}.$$

Caso 4. Supóngase que $x \in [3/4,1]$. Como en el Caso 3 se tiene que $1/2 \le y \le x$. Luego

$$0 \le (2hx + u - h)(h+\varphi(x))$$

$$\le h\left(2x - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{8}{\sqrt{31}}\varphi\left(\frac{h^2}{2}\right) + \varphi(x)\right)$$

$$\le \frac{3}{2}\left(1 + \frac{8}{\sqrt{31}}\right)\varphi(y)$$

pues

$$y \le x(1-h(h+\varphi(x)) + \frac{h(h+\varphi(x))}{2} \le 1 - \frac{h^2}{2} \blacksquare$$

Lema 2. Si $f \in C[0,1]$, $h \in (0,1/4]$ y $x \in [0,1]$, entonces para $u \in [0,h/2]$ se tiene que

$$|f(x) - f(\psi_h(x,u))| \le w^{\varphi}\left(f, \frac{3}{2}\left(1 + \frac{8}{\sqrt{31}}\right)h\right).$$

Lema 3. Si $f \in C[0,1]$, $h \in (0,1/4]$ y $x \in [0,1]$, entonces para $u \in [0,h/2]$ se tiene que

$$\left| f\left(\psi_h\left(x, \frac{h}{2}\right)\right) - f(\psi_h(x,-u)) \right| \le w^{\varphi}(f,3h).$$

Lema 4. Si $f \in C[0,1]$, $h \in (0,1/4]$, $u \in [0,h/2]$ y $x \in [0,1]$, entonces

$$| f(\psi_h(x,-h/2)) - f(\psi_h(x,u)) | \le w^{\varphi}(f,3h).$$

Lema 5. Si $f \in C[0,1]$, $h \in (0,1/4]$ y $x \in [0,1]$ entonces

$$|f(\psi_h(x,h/2)) - f(\psi_h(x,-h/2))|$$

$$\le w^{\varphi}\left(f, \left(1 + \frac{4}{\sqrt{15}}\right)h\right).$$

Para $f \in C[0,1]$ y $h \in (0,1/2]$, se define una función del tipo de las medias de Steklov mediante la fórmula,

$$f_h(x) = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} f(\psi_h(x,u))du \quad x \in [0,1]. \tag{8}$$

Nótese que la función está bien definida. En efecto, según (v) en la Proposición 2, $0 \le \psi_h(x,u) \le 1$.

Proposición 3. Si $f \in C[0,1]$, $h \in (0,1/4]$ y f_h está definida por (8), entonces

$$\| f - f_h \| \le w^{\varphi}\left(f, \frac{3}{2}\left(1 + \frac{8}{\sqrt{31}}\right)h\right)$$

y

$$h \sup\{|\varphi(x) f_h'(x)| \ : x \in (a_h, b_h)\}$$

$$\le 4w^{\varphi}(f,3h).$$

Demostración. Se sigue del Lema 1 y el Lema que

$$|f(x) - f_h(x)| \le \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} |f(x) - f(\psi_h(x,u))|\, du$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^{h/2} |f(x) - f(\psi_h(x,u))|\, du$$

$$+ \frac{1}{h}\int_0^{h/2} |f(x) - f(\psi_h(x,-u))| du$$

$$\le w^{\varphi}\left(f, \frac{3}{2}\left(1 + \frac{8}{\sqrt{31}}\right)h\right).$$

Por otro lado

$$\frac{d}{dx}\psi_h(x,u)$$

$$= 1 - 2h(h+\varphi(x)) + (h + u - 2xh)\varphi'(x)$$

$$= L(x,h) + u\varphi'(x),$$

y

$$\varphi'(x) = \frac{(1-2x)\varphi(x)}{x(1-x)},$$

donde

$$L(x,h) = 1 - 2h(h+\varphi(x)) + h(1-2x)\varphi'(x)$$

Se tiene que

$hf_h'(x)$

$$=\frac{L(x,h)}{h+\varphi(x)}\left(f(\psi_h(x,h/2))-f(\psi_h(x,-h/2))\right)$$

$$+\frac{h}{2}\frac{\varphi'(x)}{h+\varphi(x)}\left(f(\psi_h(x,h/2))+f(\psi_h(x,-h/2))\right)$$

$$-\frac{\varphi'(x)}{h+\varphi(x)}\int_{-h/2}^{h/2}f(\psi_h(x,u))du.$$

De aquí se sigue que

$|h\varphi(x)f_h'(x)|$

$$\leq\frac{|L(x,h)|}{h+\varphi(x)}\left|f(\psi_h(x,\frac{h}{2}))-f(\psi_h(x,-\frac{h}{2}))\right|$$

$$+\frac{\varphi^2(x)|1-2x|}{x(1-x)(h+\varphi(x))}\left|\frac{h}{2}f(\psi_h(x,\frac{h}{2}))\right.$$

$$\left.+\frac{h}{2}f(\psi_h(x,-\frac{h}{2}))-\int_{-h/2}^{h/2}f(\psi_h(x,u))du\right|.$$

El primer término de la ecuación anterior se estima utilizando el Lema 5. Como $|L(x,h)|\leq 3$ (ver (iii) en la Proposición 2), tenemos que

$$\frac{\varphi(x)|L(x,h)|}{h+\varphi(x)}\left|f(\psi_h(x,h/2))-f(\psi_h(x,-h/2))\right|$$

$$\leq 3w^{\varphi}(f,3h).$$

Para estimar el segundo término, nótese que

$$\frac{|1-2x|}{h+\varphi(x)}\left|\frac{h}{2}f(\psi_h(x,h/2))\right.$$

$$\left.+\frac{h}{2}f(\psi_h(x,-h/2))-\int_{-h/2}^{h/2}f(\psi_h(x,u))du\right|$$

$$=\frac{|1-2x|}{h+\varphi(x)}\left|\int_0^{h/2}f\left(\psi_h(x,\frac{h}{2})\right)+f\left(\psi_h(x,-\frac{h}{2})\right)\right.$$

$$\left.-f(\psi_h(x,u))-f(\psi_h(x,-u))\}du\right|$$

$$\leq\frac{1}{h}\int_0^{h/2}\left\{\left|f(\psi_h(x,h/2)-f(\psi_h(x,-u)\right|\right.$$

$$\left.+\left|f(\psi_h(x,-h/2))-f(\psi_h(x,u))\right|\right\}du.$$

Luego, con la ayuda de los Lemas 3 y 4 obtenemos

$$|h\varphi(x)f_h'(x)|\leq 4w^{\varphi}(f,3h).\ \blacksquare$$

Para $h\in(0,1/2]$ fijo, le asociamos a cada $f\in C[0,1]$ la función $F_h(f)\in W(\varphi)$ definida como sigue: si $x\in[a,a_h]$, entonces $F_h(f,x)=f(a_h)$, si $x\in(a_h,b_h)$, entonces

$$F_h(f,x)=f_h(x)+\frac{b_h-x}{b_h-a_h}(f(a_h)-f_h(a_h))$$

$$+\frac{x-a_h}{b_h-a_h}(f(b_h)-f_h(b_h)),$$

y, si $x\in[b_h,1]$, entonces $F_h(f,x)=f(b_h)$.

Teorema 3. Si $h\in(0,1/4]$, $f\in C[0,1]$ y $F_h(f)$, y está definida como más arriba, entonces

$$\|f-F_h(f)\|_{\infty}\leq 2\,w^{\varphi}\left(f,\frac{3}{2}\left(1+\frac{8}{\sqrt{31}}\right)h\right)$$

y $h\|F_h(f)\|_{W(\varphi)}$

$$\leq\left(4+\frac{1}{3}\right)w^{\varphi}\left(f,\frac{3}{2}\left(1+\frac{8}{\sqrt{31}}\right)h\right).$$

Demostración. Para $x\in[0,a_h]$ se tiene que

$$|f(x)-F_h(x)|=|f(x)-f_h(a_h)|$$

$$=\left|f\left(\frac{a_h+x}{2}-\frac{a_k-x}{2}\right)-f\left(\frac{a_h+x}{2}-\frac{a_h-x}{2}\right)\right|.$$

Luego, sólo necesitamos demostrar que $a_h-x\leq\ \leq h\varphi((a_h+x)/2)$. Pero se sigue de (iv) en la Proposición 2 que, para $x\in[0,a_h]$,

$$a_h-x\leq h\varphi(a_h-h)=2\frac{h}{2}\varphi(a_h)$$

$$\leq 2h\left(\frac{1}{2}\varphi(a_h)+\frac{1}{2}\varphi(x)\right)\leq 2h\varphi\left(\frac{a_h+x}{2}\right).$$

Un resultado similar se tiene para $x\in[b_h,1]$.

Si $x\in[a_h,b_h]$ se sigue de la Proposición 3 que

$$|f(x) - F_h(f,x)|$$

$$= \left| f(x) - f_h(x) - \frac{b_h - x}{b_h - a_h}(f(a_h) - f_h(a_h)) \right.$$

$$\left. - \frac{x - a_h}{b_h - a_h}(f(b_h) - f_h(b_h)) \right|$$

$$\leq \left(1 + \frac{b_h - x}{b_h - a_h} + \frac{x - a_h}{b_h - a_h}\right) w^{\varphi}\left(f, \frac{3}{2}(1 + \frac{8}{\sqrt{31}})h\right)$$

$$= 2w^{\varphi}\left(f, \frac{3}{2}\left(1 + \frac{8}{\sqrt{31}}\right)h\right).$$

Los argumentos anteriores prueban la primera afirmación.

Como $F_h(f)$ es constante en los intervalos $[0, a_h]$ y $[b_h, 1]$, para verificar la segunda afirmación debemos estimar a $h\varphi(x)F_h'(x)$ sólo para $x \in (a_h, b_h)$. Pero, en tal caso se sigue de la Proposición 3 y de (ii) en la Proposición 2 que

$$|h\varphi(x)F_h'(f,x)|$$

$$\leq \left(4 + 2\frac{1}{2}\frac{h}{b_h - a_h}\right) w^{\varphi}\left(f, \frac{3}{2}\left(1 + \frac{8}{\sqrt{31}}\right)h\right)$$

$$\leq \left(4 + \frac{h}{1-h}\right) w^{\varphi}\left(f, \frac{3}{2}\left(1 + \frac{8}{\sqrt{31}}\right)h\right)$$

$$\leq \left(4 + \frac{1/4}{1-(1/4)}\right) w^{\varphi}\left(f, \frac{3}{2}\left(1 + \frac{8}{\sqrt{31}}\right)h\right)$$

$$\leq \left(4 + \frac{1}{3}\right) w^{\varphi}\left(f, \frac{3}{2}\left(1 + \frac{8}{\sqrt{31}}\right)h\right). \blacksquare$$

Teorema 4. Si $h \in (0, 1/4]$ y $f \in C[0,1]$ entonces

$$K_{\varphi}(f,h) \leq \left(6 + \frac{1}{3}\right) w^{\varphi}(f, \frac{3}{2}(1 + \frac{8}{\sqrt{31}})h).$$

Demostración. El resultado se sigue de la definición de K_{φ} y del último Teorema. ■

Conclusiones

En este trabajo, se han presentado estimados para las constantes involucradas en la caracterización del primer módulo de suavidad de Ditzian – Totik. Las constantes son aceptables desde el punto de vista de sus posibles aplicaciones en cálculos numéricos. En un futuro continuaremos buscando nuevas técnicas que permitan mejorar las constantes obtenidas. Además trataremos de utilizar las ideas aquí presentadas para encontrar estimados de las constantes relacionadas con módulos de suavidad de orden superior. Finalmente creemos que nuestras ideas se pueden utilizar para estudiar módulos definidos con otros tipos de pesos.

Referencias

[1] Z. Ditzian y V. Totik,
1987 Moduli of smoothness, Springer – Verlag, New York.

[2] DeVore R. A. y Lorentz, G. G.,
1993 «*Constructive Approximation*», Springer – Verlag, New York.

[3] Gonska H. H. y Tachev T.,
1999 «*The second Ditzian – Totik modulus revisited: refined estimates for positive linear operators*», Schriftenreihe des Fachbereichs Mathematik, Gerhar Mercatos Universitaty Duisburg, SM – DU- 460.