Relaciones recursivas lineales homogéneas de segundo orden y formas de Jordan

A mis alumnos

Resumen

Se deducen las fórmulas de la solución de una relación recursiva lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes usando conceptos de Álgebra Lineal.

Palabras clave. Relación recursiva de segundo orden, forma canónica de Jordan.

Introducción.

En los cursos de Matemáticas Discretas que se imparten en esta universidad se habla de las relaciones de recurrencia de segundo y primer orden.

Nos enfocaremos en la de segundo orden en este trabajo, pues queremos dar una respuesta a la pregunta que casi invariablemente un alumno hace cuando se imparte el tema, ¿cómo se les ocurrió que las soluciones son precisamente esas?

Una respuesta está en mostrar la relación que hay entre este tema del curso de Matemáticas Discretas y el tema de las formas canónicas de matrices de los cursos de Álgebra Lineal.

Entremos en materia:

Por una *relación recursiva lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes* entenderemos una expresión definida para todo n número natural positivo de la forma

$$x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n ,$$

donde a y b son dos números reales no nulos y para la que están dados dos valores reales iniciales x_0 y x_1.

Esta expresión nos permite obtener una sucesión de números reales.

Tiene el inconveniente de que para conocer el valor de la función en un número natural k arbitrario hay que conocer cuando menos los dos anteriores.

Por esto es deseable encontrar una regla de correspondencia que nos indique cómo calcular el n-ésimo valor de la sucesión sin necesidad de conocer los valores previos.

A esta regla de correspondencia se le llama "forma cerrada" de la relación de recurrencia.

<u>En la literatura</u> esta forma cerrada se describe de la siguiente manera:

Dada la relación de recurrencia con coeficientes constantes a y b

$x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$,

con condiciones iniciales x_0 y x_1, su forma cerrada tiene una y sólo una de las siguientes formas dependiendo de la naturaleza de las raíces λ_1 y λ_2 de su ***ecuación característica*** $\lambda^2 - a\lambda - b = 0$.

A saber:

Caso 1. $x_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$, si λ_1 y λ_2 son distintas.

Caso 2. $x_n = c_1\lambda_1^n + c_2 n\lambda_1^n$, si λ_1 y λ_2 son iguales.

En ambos casos las constantes se determinan a partir de las condiciones iniciales x_0 y x_1. Sólo se menciona de pasada que la ecuación característica puede tener raíces complejas y que en este caso la solución se puede expresar en la forma del caso 1 o en una combinación lineal de senos y cosenos. [4]

Se demuestra que en cada caso las soluciones propuestas efectivamente lo son, pero nunca (hasta donde al autor le consta) se justifica la estrategia de considerar la ecuación característica. Por ejemplo, revise [2] y [4].

Por otra parte, en algunos libros de Álgebra Lineal se menciona una aplicación de esta materia en la solución de estas relaciones de recurrencia, se enuncia el resultado únicamente en el caso más sencillo y no se menciona nada acerca de los otros casos [5].

Lo que se pretende aquí es mostrar la relación que existe entre estos temas de las Matemáticas.

Recordemos que dada una matriz A, su forma de Jordan J es la matriz “más sencilla” que la representa[1]. Se satisface además que $PJP^{-1} = A$, donde P es una matriz invertible.[2]

Las posibles formas de Jordan para una matriz 2 x 2con entradas reales o complejas son:

a) $\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, donde c y d son números reales o complejos;

b) $\begin{bmatrix} c & 0 \\ 1 & c \end{bmatrix}$, donde c es un número real o complejo.

Observe que la matriz J es una matriz a la que es fácil calcular su n-ésima potencia.

La lectura de esta nota requiere conocimientos previos (básicos) de Álgebra Lineal como los contenidos en [3].

Las relaciones recursivas lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes y sus soluciones

El resultado que a continuación deduciremos es el siguiente:

Teorema. Consideremos la relación recursiva lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes definida para cada número entero no negativo n por $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$

,

donde a y b son dos números reales no nulos y para la que están dados dos valores reales iniciales x_0 y x_1.

Su forma cerrada es:

Caso I.[3] Si $a^2 + 4b > 0$,

$$x_n = \left(\frac{2x_1 - ax_0 + x_0\sqrt{a^2+4b}}{2\sqrt{a^2+4b}}\right)\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n + \left(\frac{x_0 a + x_0\sqrt{a^2+4b} - 2x_1}{2\sqrt{a^2+4b}}\right)\left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n$$

para cada número entero no negativo n.

Caso II.[3] Si $a^2 + 4b = 0$,

$$x_n = \left[\frac{2x}{a} + x_0(1-n)\right]\left(\frac{a}{2}\right)^n$$

, para cada número entero no negativo n.

Caso III.[4] Si $a^2 + 4b < 0$,

$$x_n = \left(\frac{i}{\sqrt{|a^2+4b|}}\right)\left[(\bar{\lambda} x_0 - x_1)\lambda^n - (\lambda x_0 - x_1)\bar{\lambda}^n\right]$$

, donde

y $\lambda = \frac{a}{2} + i\frac{\sqrt{-(a^2+4b)}}{2}$

es su conjugado.[5]

En cada caso, la solución es única.

Demostración. A la relación $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$ la convertiremos en un sistema de dos relaciones:

$$x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$$

$$x_{n+1} = x_{n+1}$$

Estas igualdades se pueden escribir matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Si denotamos por A a la matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

y por $u_n = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix}$, tenemos $u_{n+1} = Au_n$

Observemos que

---

1 A cada matriz A le corresponde una única forma canónica de Jordan, salvo similaridad.

2 De A y de J se dice que son matrices similares.

3 La condición es equivalente a afirmar que las raíces de la ecuación característica son (reales) y distintas..

4 La condición es equivalente a afirmar que hay una raíz de la ecuación característica de multiplicidad 2..

5 La condición es equivalente a afirmar que las raíces de la ecuación característica son complejas.

6 La solución en este caso se puede llevar a la forma:

$$x_n = c\cos(n\theta) + d\,sen(n\theta)$$, para $n \geq 0$.

Aquí $\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{|a^2+4b|}}{a}\right)$

y c y d son números reales. La forma que presentamos, la elegimos porque pensamos que es la “más eficiente” aunque requiere de la implementación de la multiplicación compleja y por ende de más espacio en memoria.

$$u_n = Au_{n-1} = A^2u_{n-2} = \ldots = A^nu_0 \ldots. (1)$$

Para calcular A^n construiremos primero su forma de Jordan. Para esto necesitamos calcular su *polinomio característico* y encontrar sus raíces, los valores propios de A.

Su *polinomio característico* es el determinante de la matriz , $\lambda I - A$, $\begin{bmatrix} \lambda - a & -b \\ -1 & \lambda \end{bmatrix}$

a saber, $\lambda^2 - a\lambda - b$. Observe que este polinomio es el mismo que el de la ecuación característica de la relación de recurrencia.

Sus raíces son $\lambda_+ = \dfrac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}$ y

$\lambda_- = \dfrac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}$.

Estas raíces pueden ser:

Caso I. Las dos son reales y distintas.

Caso II. Una única raíz real con multiplicidad 2.

Caso III. Una raíz compleja y su conjugado.

A continuación haremos la deducción de la solución correspondiente en cada caso, considerando a A como una transformación de $\mathbb{R}^2$en $\mathbb{R}^2$ en los dos primeros, mientras que en el tercero como una transformación de $\mathbb{C}^2$en $\mathbb{C}^2$.

Caso I. Dos raíces reales y distintas. Esto sucede si se cumple $a^2 + 4b > 0$.

Estas raíces tienen las siguientes propiedades:

$$a - \lambda_\pm = \lambda_\mp \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\lambda_-\lambda_+ = -b \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Se sabe de la Teoría del Álgebra Lineal que la matriz A es similar a la matriz D, la matriz .

$$\begin{bmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{bmatrix}$$

Es decir, se satisface

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_+ & \lambda_- \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{bmatrix}\left(\frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-}\begin{bmatrix} 1 & -\lambda_- \\ -1 & \lambda_+ \end{bmatrix}\right)$$

Observe que la matriz invertible que las relaciona es la matriz .

$$\begin{bmatrix} \lambda_+ & \lambda_- \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego la n-ésima potencia de A puede expresarse como:

$$A^n = \begin{bmatrix} \lambda_+ & \lambda_- \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_+^n & 0 \\ 0 & \lambda_-^n \end{bmatrix}\left(\frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-}\begin{bmatrix} 1 & -\lambda_- \\ -1 & \lambda_+ \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-}\begin{bmatrix} \lambda_+^{n+1} & \lambda_-^{n+1} \\ \lambda_+^n & \lambda_-^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\lambda_- \\ -1 & \lambda_+ \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-}\begin{bmatrix} \lambda_+^{n+1} - \lambda_-^{n+1} & \lambda_+\lambda_-^{n+1} - \lambda_-\lambda_+^{n+1} \\ \lambda_+^n - \lambda_-^n & \lambda_+\lambda_-^n - \lambda_-\lambda_+^n \end{bmatrix}.$$

De (1) tenemos que

$$x_n = \frac{x_1}{\lambda_+ - \lambda_-}\left(\lambda_+^{\,n} - \lambda_-^{\,n}\right) + \frac{x_0}{\lambda_+ - \lambda_-}\left(\lambda_+\lambda_-^n - \lambda_-\lambda_+^n\right)$$

, o bien

$$x_n = \left(\frac{x_1 - \lambda_- x_0}{\lambda_+ - \lambda_-}\right)\lambda_+^{\,n} + \left(\frac{\lambda_+ x_0 - x_1}{\lambda_+ - \lambda_-}\right)\lambda_-^n$$

Más detalladamente,

$$x_n = \left(\frac{2x_1 - ax_0 + x_0\sqrt{a^2+4b}}{2\sqrt{a^2+4b}}\right)\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n + \left(\frac{x_0a + x_0\sqrt{a^2+4b} - 2x_1}{2\sqrt{a^2+4b}}\right)\left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n,$$

para cada número entero no negativo n.

Caso II. Hay una raíz real de multiplicidad 2. Es decir, $a^2 + 4b = 0$.

En este caso la única raíz del polinomio característico es, $\lambda = \dfrac{a}{2}$

La matriz a considerar es, en este caso,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz A es similar a la matriz .

$$D' = \begin{bmatrix} \dfrac{a}{2} & 0 \\ 1 & \dfrac{a}{2} \end{bmatrix}$$

Para comprobar esto, observe que la matriz

$$P = \begin{bmatrix} \dfrac{a+2}{2} & \dfrac{a}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

es invertible, su inversa es

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{a}{2}\\ -1 & \frac{a+2}{2}\end{bmatrix}$$

y además satisface

$$PD'P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{a+2}{2} & \frac{a}{2}\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{a}{2} & 0\\ 1 & \frac{a}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\frac{a}{2}\\ -1 & \frac{a+2}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & -\frac{a^2}{4}\\ 1 & 0\end{bmatrix}=A \quad (4)$$

De esta relación se puede observar que la n-ésima potencia de A puede calcularse "fácilmente" a partir de la n-ésima potencia de D'.

Puede demostrarse, usando inducción matemática, que se cumple

$$(D')^n=\begin{bmatrix}\frac{a}{2} & 0\\ 1 & \frac{a}{2}\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}\left(\frac{a}{2}\right)^n & 0\\ n\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1} & \left(\frac{a}{2}\right)^n\end{bmatrix}$$

, para toda $n \geq 0$.

Haciendo los cálculos (vea (4)) obtenemos,

$$A^n=\begin{bmatrix}(n+1)\left(\frac{a}{2}\right)^n & -n\left(\frac{a}{2}\right)^{n+1}\\ n\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1} & (1-n)\left(\frac{a}{2}\right)^n\end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\begin{bmatrix}x_{n+1}\\ x_n\end{bmatrix}=A^n\begin{bmatrix}x_1\\ x_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(n+1)\left(\frac{a}{2}\right)^n & -n\left(\frac{a}{2}\right)^{n+1}\\ n\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1} & (1-n)\left(\frac{a}{2}\right)^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_0\end{bmatrix}$$

En particular, $x_n=\left[\frac{2nx_1}{a}+x_0(1-n)\right]\left(\frac{a}{2}\right)^n$

, $n \geq 0$.

Mas detalladamente,

$$x_n=\left(\frac{2x_1}{a}-x_0\right)n\left(\frac{a}{2}\right)^n+x_0\left(\frac{a}{2}\right)^n$$

, $n \geq 0$.

Caso III. No hay ninguna raíz real. Es decir, se cumple $a^2+4b<0$.

En este caso, el polinomio característico tiene a

$$\lambda=\frac{a}{2}+i\frac{\sqrt{|a^2+4b|}}{2}$$

y a su conjugado ,

$$\bar{\lambda}=\frac{a}{2}-i\frac{\sqrt{|a^2+4b|}}{2}$$

como sus raíces. Aquí, $|a^2+4b|=-(a^2+4b)$

Note que, en este caso, b es un número real negativo y el módulo λ de es $\sqrt{-b}$.

Se cumple

$$PDP^{-1}=\frac{-i}{\sqrt{|a^2+4b|}}\begin{bmatrix}\lambda & \bar{\lambda}\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \bar{\lambda}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\bar{\lambda}\\ -1 & \lambda\end{bmatrix}=A.$$

Entonces, si $n \geq 0$,

$$A^n=\left(\frac{-i}{\sqrt{|a^2+4b|}}\right)\begin{bmatrix}\lambda^{n+1}-\bar{\lambda}^{n+1} & \bar{\lambda}^{n+1}\lambda-\bar{\lambda}\lambda^{n+1}\\ \lambda^n-\bar{\lambda}^n & \bar{\lambda}^n\lambda-\bar{\lambda}\lambda^n\end{bmatrix}$$

Por (1) se tiene que

$$x_n=\left(\frac{i}{\sqrt{|a^2+4b|}}\right)\left[(\bar{\lambda}x_0-x_1)\lambda^n-(\lambda x_0-x_1)\bar{\lambda}^n\right] \quad .... \ (4)$$

Por último, no es difícil demostrar la unicidad de las soluciones usando inducción matemática.

Los casos faltantes

Hemos dejado fuera en la sección anterior los siguientes casos:

a) $a = b = 0$.

En este caso la solución tiene la forma

$$x_n=\begin{cases}x_0 & n=0;\\ x_1 & n=1;\\ 0 & n\geq 2.\end{cases}$$

b) $a \neq 0,\ b=0$.

La solución tiene la forma

$$x_n=\begin{cases}x_0 & n=0;\\ x_1a^{n-1} & n\geq 1.\end{cases}$$

c) $a = 0,\ b \neq 0.$

La solución tiene la forma

$$x_n = \begin{cases} x_0 b^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} & n \text{ es par;} \\ x_1 b^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} & n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Demostración.

Caso a).

Aquí la matriz A toma la forma $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Observe que $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y entonces

$A^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ para $n \geq 2$. Por lo tanto, la solución de la relación de recurrencia es

$$x_n = \begin{cases} x_0 & n = 0; \\ x_1 & n = 1; \\ 0 & n \geq 2. \end{cases}$$

Caso b).

Aquí la matriz A toma la forma $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Se puede demostrar por inducción matemática que

$A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ a^{n-1} & 0 \end{bmatrix}$ para $n \geq 1$.

En este caso la solución es de la forma

$$x_n = \begin{cases} x_0 & n = 0; \\ x_1 a^{n-1} & n \geq 1. \end{cases}$$

Análisis del caso c).

Aquí la matriz A toma la forma $\begin{bmatrix} 0 & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Ob serve que $A^2 = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ y entonces

$A^{2k} = \begin{bmatrix} b^k & 0 \\ 0 & b^k \end{bmatrix}$ y $A^{2k+1} = \begin{bmatrix} 0 & b^{k+1} \\ b^k & 0 \end{bmatrix}$

para $k \geq 1$. (Se puede demostrar por inducción matemática.)

Por lo tanto la solución toma la siguiente forma:

$$x_n = \begin{cases} x_0 b^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} & n \text{ es par;} \\ x_1 b^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} & n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Donde,

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ es par;} \\ \frac{n-1}{2} & n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Generalización de estos resultados

Observemos que este método es generalizable a relaciones de recurrencia de orden k, $x_{n+k} = a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + \ldots + a_k x_n$, asociándole la matriz de orden $k \times k$.

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & \ldots & a_k \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \end{bmatrix}.$$

Si hacemos los cálculos en los casos $k = 3$ y 4 veremos que el polinomio característico de esta matriz y la ecuación característica de la relación coinciden.

La deducción de la correspondiente solución de la relación de recurrencia es análoga a la del caso $k = 2$.

Ya que los polinomios de grado mayor o igual a 5 no son solubles por radicales, se deben de implementar otros métodos para encontrar las raíces de los polinomios característicos. Encontradas éstas, se puede hacer una deducción análoga a la presentada.

Nótese que las diferentes formas que puede tomar la solución de esta relación dependen nuevamente de la naturaleza de las raíces. Las posibilidades se incrementan a medida que se incrementa k.

Conclusiones

Esta nota presenta una aplicación de conceptos del Álgebra Lineal a las Matemáticas Discretas que no se encuentra con este detalle en la literatura disponible en nuestra biblioteca.

Se deduce la solución de una manera directa, no simplemente estableciéndola como sucede en la mayoría de los libros de Matemáticas Discretas.

Esta deducción tiene la ventaja de que aparece de manera natural la ecuación característica. El lector familiarizado con la técnica de las funciones generatrices puede usarlas para deducir la solución; deberá notar que no aparece la ecuación característica (de manera tan natural) en la deducción.[6]

La solución en sus diferentes formas está calculada con el suficiente detalle como para poder implementarse fácilmente en un programa de computadora, lo que será de utilidad para los participantes en los concursos de programación de la ACM.

Una implementación de estas fórmulas se puede descargar de la siguiente dirección:
www.mixteco.utm.mx/~berron/Fibonacci_setup.zip

En esta aplicación se puede calcular un término dado de una relación de recurrencia del tipo aquí estudiado usando un programa iterativo, uno recursivo y el que implementa la fórmula cerrada.

Puede ser interesante usarlo para tener una experiencia con las diferentes complejidades de los algoritmos usados en este software

Referencias Bibliográficas

Frazier Michael, Meyer Spasche R.
2004. **An Introduction to Wavelets Through Linear Algebra** (Undergraduate Texts in Mathematics), editorial Springer, USA, pp.7-100.

Grimaldi Ralph P.
1998. **Matemáticas Discreta y Combinatoria,** Tercera Edición, editorial PEARSON EDUCACIÓN, México, pp.471-482.1998.

Hoffman Kenneth, Kunzeray.
1973. **Álgebra Lineal,** editorial PRENTICE-HALL HISPANOAMERICANA, México, pp.180-268.

Ross Kenneth A., Wright Charles R.B.
1990. **Matemáticas Discretas,** Segunda Edición, editorial PRENTICE-HALL HISPANOAMERICANA, S.A., México, pp.149-153.

Torregrosa Sánchez juan Ramón, jordan Lluch Cristina
1987. **Álgebra Lineal y sus aplicaciones. Teoría y problemas,** Mc Graw-Hill, España, pp. 168-169.

Virginia Berrón Lara
División de Estudios de Postgrado
Universidad Tecnológica de la Mixteca

6 Aunque no aparezca la ecuación característica, las soluciones vuelven a depender del discriminante que aparece en el teorema aquí demostrado.