

Ensayos

Configuraciones críticas del juego de repartición de fichas de las gráficas completas K_4, K_5, K_6 y la gráfica bipartita completa $K_{3,3}$

Resumen

Este trabajo da a conocer y ejemplifica un resultado interesante de la Teoría de Gráficas y de la Combinatoria que son áreas dentro de las Matemáticas Discretas. En 1999, Norman Biggs conjeturó que la función generadora de las configuraciones críticas del juego de repartición de fichas es una evaluación del polinomio de Tutte. Dicha conjetura fue demostrada en 2001. En este artículo se muestran las configuraciones críticas del juego de repartición de fichas de algunas gráficas completas y de la gráfica bipartita completa $K_{3,3}$ y se ejemplifica la conjetura de Norman Biggs. Las configuraciones críticas fueron obtenidas mediante una rutina implementada en Matlab.

Abstract

This work presents and illustrates an interesting result of graph theory and combinatorics, which are fields within discrete mathematics. In 1999, Norman Biggs conjectured that the generating function of critical configurations of the chip firing game is an evaluation of the Tutte polynomial. This conjecture was proved in 2001. In this paper, the critical configurations of the chip firing game of some complete graphs and of the complete bipartite graph $K_{3,3}$ are shown, and examples are given to illustrate Biggs's conjecture. The critical configurations were obtained by a routine implemented in Matlab.

Résumé

Ce travail présente et met en exemple un résultat intéressant de la Théorie des Graphes et de la Combinatoire qui sont des domaines des Mathématiques Discretées. En 1999, Norman Biggs conjecture que la fonction génératrice des configurations critiques de répartition de fichas est une évaluation du polynôme de Tutte. Cette conjecture a été démontrée en 2001. Dans cet article on montre les configurations critiques du jeu de répartition de fichas de certains graphes complets et du graphe bipartite complet $K_{3,3}$ et on illustre la conjeture de Norman Biggs. Les configurations critiques ont été obtenues avec une routine mise en place en MATLAB.

Jesús Pacheco Mendoza

Palabras clave: Función generadora de las configuraciones críticas, polinomio de Tutte, configuración crítica.

Introducción

El juego de repartición de fichas tiene sus orígenes en 1986 cuando Spencer estudiaba el siguiente problema: Dado $k \in \mathbb{N}$ y n vectores v_1, v_2, \dots, v_n en \mathbb{R}^m con $\|v_i\|_\infty \leq 1$ para $0 \leq i \leq n$, ¿existirán e_1, e_2, \dots, e_n con $e_i \in \{-1, 1\}$ para $0 < i < n$ tal que $\|\sum_{i=1}^n e_i v_i\|_\infty \leq kn^{\frac{1}{2}}$? Su respuesta usa un juego de balance. Se tiene una pila de N fichas en el centro de una trayectoria grande, en cada movimiento se toman $\lceil \frac{N}{2} \rceil$ fichas a la derecha y $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ a la izquierda, donde $\lceil \cdot \rceil$ y $\lfloor \cdot \rfloor$ denotan la función techo y función piso, respectivamente. El juego continúa con estas dos nuevas pilas y se sigue el mismo procedimiento hasta que no haya fichas.

Björner, Lovász y Shor generalizaron el juego de balance de Spencer para gráficas simples. Éste consiste en lo siguiente [Björner, Lovász, Shor, 1991]: se coloca cierta cantidad de fichas en cada vértice de una gráfica simple G ; un vértice es llamado *listo* si tiene una cantidad de fichas mayor o igual a su grado o valencia. Cuando un vértice está *listo* se puede

Universidad de la Sierra Sur, Oaxaca, México.

disparar lo cual significa que se distribuye una ficha a cada uno de sus vecinos. Si una vez disparado el vértice existe otro que está *listo* repetimos el procedimiento de manera similar. A este juego se le llama juego de repartición de fichas. Ellos se interesaron en la distribución de fichas después de una sucesión de movimientos que siguieran las reglas y en la duración del proceso. Sus resultados de investigación determinaron la distribución de fichas que hace que el juego sea finito (es decir, después de cierta cantidad de disparos no existe un vértice *listo* y esto hace que el juego termine) y la distribución de fichas que hace que el juego sea infinito (es decir, después de cada disparo siempre existe un vértice *listo* y en este caso el juego nunca termina). Se dice que un juego es legal si la sucesión de movimientos siguen las reglas del juego. La regla del juego es: si un vértice v está *listo*, entonces se dispara v . De lo contrario el juego termina.

Más tarde, Norman Biggs (1999) ideó una nueva versión del juego de repartición de fichas de Björner, Lovász y Shor. En este caso también se tiene una gráfica simple y se asignan fichas a los vértices excepto a un vértice especial al que se le llama vértice q .

El vértice q tiene una carga negativa de fichas y es igual al negativo de la cantidad total de fichas en la gráfica. La regla de este nuevo juego es como sigue: el vértice q se dispara únicamente cuando no existe un vértice que está *listo*. Si hay dos o más vértices *listos* se elige uno al azar para disparar. Esto no altera la condición de estar *listo* en los vértices que quedaron sin disparar en el siguiente disparo. A este juego, el cual es infinito, lo llamó juego del dólar porque se usaron dólares en lugar de fichas. Sin embargo, en adelante, llamaremos a esta nueva versión del juego “juego de repartición de fichas” y será nuestro objeto de estudio.

En la Figura 1 se muestra la gráfica completa K_4 con una distribución de fichas y la ejecución de tres disparos. Después de los tres disparos, los vértices v_2 y v_3 están *listos*.

A continuación formalizaremos el concepto de distribución de fichas en una gráfica. Una configuración θ es un vector cuyas entradas o componentes corresponden al número de fichas que tiene cada vértice, es decir, $\theta(v)$ es el número de fichas que tiene el vértice v . Así, una configuración representa una distribución de fichas en la gráfica durante el juego de repartición de fichas.

Por ejemplo, en la Figura 1 se tiene la configuración inicial $\theta = (0, 4, 2, -6)$, luego de disparar el vértice v_2 se obtiene la nueva configuración $\theta = (1, 2, 3, -5)$. Se acostumbra no escribir la entrada correspondiente al vértice q . De esta manera, las dos configuraciones anteriores quedarían como $\theta = (0, 4, 2)$ y $\theta = (1, 2, 3)$. En el juego de repartición de fichas (De Concini y Procesi 2009) se pueden identificar tres tipos de configuraciones: estables, recurrentes y críticas. En las configuraciones estables, el vértice q es el único vértice que se puede disparar. Las configuraciones recurrentes son aquellas que después de una sucesión de disparos legales, se obtiene la misma configuración inicial. Una configuración crítica es aquella que es estable y recurrente.

Por ejemplo, en la Figura 1 después de disparar los vértices v_2 y v_3 se obtiene la configuración $\theta = (2, 2, 0)$ la cual es una configuración estable ya que los vértices v_1, v_2 y v_3 no se pueden disparar.

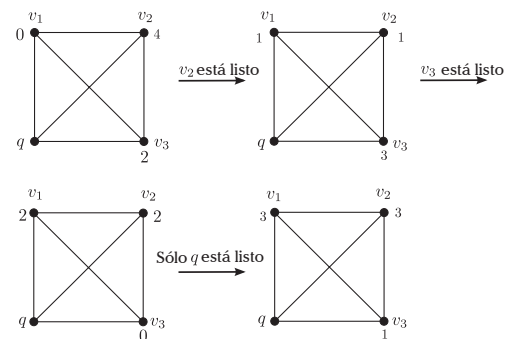


Figura 1 Ejemplo del juego en la gráfica completa K_4

1.2 El polinomio de Tutte

El polinomio de Tutte es un polinomio en dos variables x, y y que para algunos valores de x, y se obtienen importantes resultados en gráficas tales como el polinomio cromático (Brylawski y Oxley, 1992) y la función generadora de las configuraciones críticas (Merino, 1997).

La función generadora de las configuraciones críticas es un polinomio de la forma

$$P_q(G : y) = c_0 + c_1y + c_2y^2 + \dots + c_ny^n$$

donde c_i es el número de configuraciones críticas de nivel i .

Dada la gráfica $G = (V; E)$ se define su polinomio de Tutte, $T(G; x, y)$, (Brylawski y Oxley, 1992) como:

$$T(G; x, y) = \sum_{A \subseteq E} (x-1)^{r(E)-r(A)} (y-1)^{|A|-r(A)}$$

con $r(A) = |V(G)| - k(A)$ donde $k(A)$ es el número de componentes conexas de la subgráfica de G con conjunto de aristas A .

De esta fórmula se puede demostrar que $T(G, 1, 1)$ es el número de árboles generadores en una gráfica conexa. También en (Biggs, 1999), se prueba que para una gráfica G , el número de configuraciones críticas del juego de repartición de fichas es igual al número de árboles generadores de la gráfica G .

En el caso de las gráficas, se puede calcular el polinomio de Tutte de manera recursiva de la siguiente manera:

Sea G una gráfica y sea $T(G; x, y)$ su polinomio de Tutte. Entonces

- 1) Si G no tiene aristas, entonces $T(G; x, y) = 1$.
- 2) Si e es un puente, entonces $T(G; x, y) = xT(G/e; x, y)$. Un puente es una arista e tal que al eliminarla de la gráfica G , el resultado es una gráfica no conexa.
- 3) Si e es un lazo, entonces $T(G; x, y) = yT(G - e; x, y)$. Un lazo es una arista e que está formado por un solo vértice.
- 4) $T(G; x, y) = T(G - e; x, y) + T(G/e; x, y)$ si e no es ni un puente ni un lazo.

G/e es la gráfica que se obtiene al contraer la arista e de la gráfica y $G - e$ es la gráfica que se obtiene al eliminar la arista e de la gráfica (Ver Figura 2).

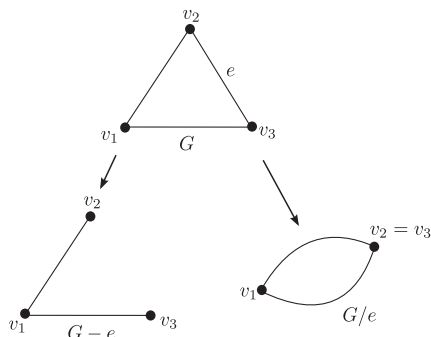


Figura 2 Ejemplo de borrado ($G - e$) y contracción (G/e) de la arista e .

1.3 La conjetura de Norman Biggs

Como se dijo anteriormente, una configuración estable es aquella en la que el vértice q es el único vértice que se puede disparar y una configuración recurrente es aquella en la que después de una sucesión de disparos legales, se obtiene la misma configuración inicial. Una configuración crítica es aquella que es estable y recurrente a la vez.

A una configuración crítica se le puede asociar un peso y un nivel de la siguiente manera. Si θ es una configuración crítica entonces se define su peso como $w(\theta) = \sum_{v \neq q} \theta(v)$ y su nivel se define como

$nivel(\theta) = w(\theta) - |E(G)| + \deg(q)$, donde $|E(G)|$ es el número de aristas de la gráfica G y $\deg(q)$ es el grado del vértice q .

La función generadora de las configuraciones críticas es el polinomio:

$$P_q(G; y) = \sum_{i=0}^{|E(G)|-|V(G)|+1} c_i y^i$$

donde c_i es el número de configuraciones críticas de nivel i .

Todas estas definiciones fueron propuestas por Norman Biggs, quien hizo la siguiente conjetura y que fue demostrada en Merino (1997).

Teorema 1 (Conjetura de Norman Biggs): Para una gráfica G y un vértice q , tenemos que la función generadora de las configuraciones críticas es el polinomio de Tutte de G a lo largo de la línea $x = 1$, es decir, $P_q(G; y) = T(G; 1, y)$.

1.4. Configuraciones críticas de las gráficas completas K_n , $K_{n,3}$ y la gráfica bipartita $K_{3,3}$

Una gráfica completa de n vértices (Bondy y Murty, 1982), simbolizada por K_n , es una gráfica simple (sin lazos ni aristas paralelas) en la que cada vértice es adyacente a todos los demás vértices.

Para ejemplificar el Teorema 1, se calcularon las configuraciones críticas de las gráficas completas K_4, K_5, K_6 y de la gráfica bipartita $K_{3,3}$ usando una rutina en Matlab.

También, se muestra la función generadora en cada caso y en una tabla se exhiben las configuraciones

críticas obtenidas por niveles de cada una de las gráficas.

1.4.1 Gráfica completa K_4

El polinomio de Tutte de la gráfica completa es:

$$T(K_4; x, y) = x^3 + 3x^2 + 2x + 4xy + 2y + 3y^2 + y^3.$$

Así, evaluando en $x = 1$ tenemos que:

$$T(K_4; 1, y) = 6 + 6y + 3y^2 + y^3 = P_q(K_4; y)$$

Recordemos que en una configuración del juego de repartición de fichas la entrada correspondiente al vector q se suele omitir. Por ejemplo, la configuración $\theta = (2, 2, 2, -6)$ se escribe como $\theta = (2, 2, 2)$. Las configuraciones críticas correspondientes a la gráfica completa K_4 se muestran en la Tabla 1.

Como se puede observar en la Tabla 1, los coeficientes del polinomio $T(K_4; 1, y)$ coinciden con el número de configuraciones críticas del nivel indicado por su exponente. Por ejemplo, hay 3 configuraciones críticas de nivel 2 y se tiene que 3 es el coeficiente de $T(K_4; 1, y)$ correspondiente a y^2 . También, se tienen 6 configuraciones críticas de nivel 1 y 6 es el coeficiente en el polinomio $T(K_4; 1, y)$.

En la Figura 3 se ejemplifica la ejecución del juego de repartición de fichas usando la configuración crítica $\theta = (2, 2, 2)$. Como se observa en la Figura 3, la configuración es estable debido a que sólo se puede disparar el vértice q . Al disparar el vértice q , los vértices v_1, v_2 y v_3 están *listos*. Se elige uno al azar y en este caso se elige al vértice v_1 . Posteriormente se disparan los vértices v_2 y v_3 usando el mismo procedimiento. Finalmente, al disparar el vértice v_3 se obtiene la configuración inicial $\theta = (2, 2, 2)$. Esto significa que la configuración es recurrente y dado que la configuración también es estable, entonces la configuración es una configuración crítica. El juego se puede continuar de forma indefinida.

Tabla 1 Configuraciones críticas de K_4

Nivel	Configuraciones críticas de K_4
Cero	(1, 0, 2) (1, 2, 0) (0, 1, 2) (2, 1, 0) (0, 2, 1) (2, 0, 1)
Uno	(0, 2, 2) (2, 0, 2) (2, 2, 0) (1, 1, 2) (1, 2, 1) (2, 1, 1)
Dos	(1, 2, 2) (2, 1, 2) (2, 2, 1)
Tres	(2, 2, 2)

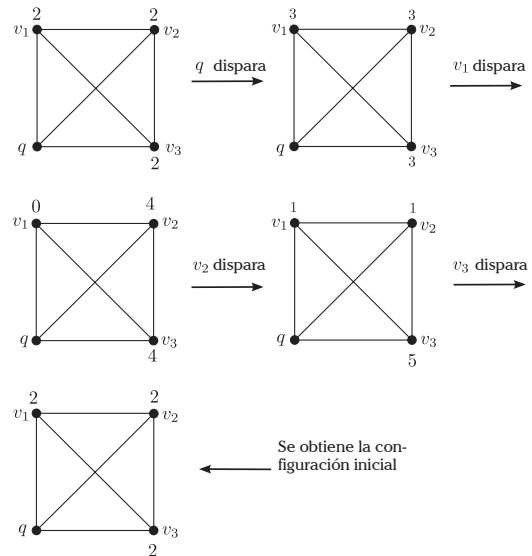


Figura 3 Ejemplo del juego con la configuración crítica $\theta = (2, 2, 2)$.

1.4.2 Gráfica completa K_5

La gráfica completa K_5 se muestra en la Figura 4. En esta figura también se muestra una distribución de fichas en la que dos vértices encerrados en un círculo están listos para disparar.

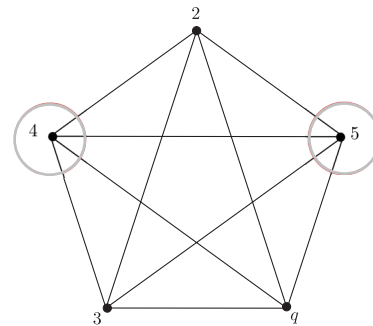


Figura 4 Gráfica completa K_5 y una distribución de fichas.

El polinomio de Tutte de la gráfica completa K_5 es:

$$T(K_5; x, y) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 10x^2y + 20xy + 15xy^2 + 5xy^3 + 6y + 15y^2 + 15y^3 + 10y^4 + 4y^5 + y^6$$

Así, evaluando en $x = 1$ obtenemos:

$$T(K_5; 1, y) = 24 + 36y + 30y^2 + 20y^3 + 10y^4 + 4y^5 + y^6 = P_q(K_5; y)$$

Se puede observar en la Tabla 2, que el número de configuraciones críticas de cada nivel corresponden a los coeficientes de $T(K_5; 1, y)$ cuyo nivel es el mismo que el exponente de y .

En la Figura 5 se ejemplifica el juego con la configuración $\theta = (0, 1, 2, 3)$. Al disparar q , los vértices v_3 y v_4 están *listos*. Se elige al azar v_4 . Luego de disparar los vértices en el orden q, v_4, v_3, v_2 y v_1 se obtiene la misma configuración inicial.

Tabla 2 Configuraciones críticas de K_5

Configuraciones críticas de la gráfica K_5		
Nivel	Configuración	Número de permutaciones
Cero	(0, 1, 2, 3)	24
Uno	(0, 1, 3, 3)	12
	(0, 2, 2, 3)	12
	(1, 1, 2, 3)	12
Dos	(0, 2, 3, 3)	12
	(1, 1, 3, 3)	6
	(1, 2, 2, 3)	12
Tres	(0, 3, 3, 3)	4
	(1, 2, 3, 3)	12
	(2, 2, 2, 3)	4
Cuatro	(1, 3, 3, 3)	4
	(2, 2, 3, 3)	6
Cinco	(2, 3, 3, 3)	4
Seis	(3, 3, 3, 3)	1

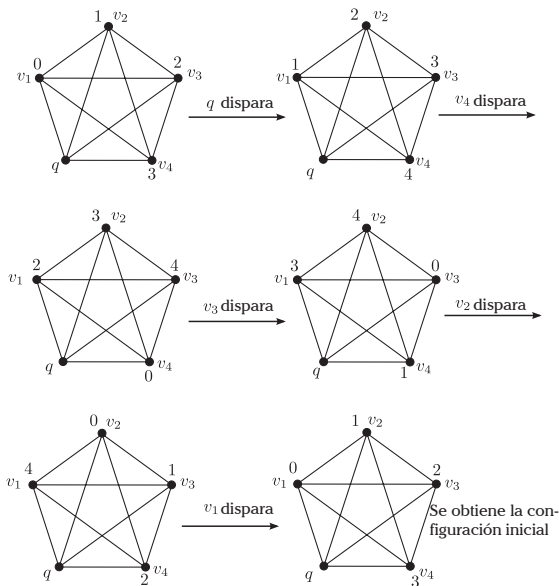


Figura 5 Ejemplo del juego con la configuración crítica $\theta = (0, 1, 2, 3)$

1.4.3 Gráfica completa K_6

El polinomio de Tutte de la gráfica K_6 es:

$$T(K_6; 1, x, y) = 24y + 80y^2 + 120y^3 + 120y^4 + 96y^5 + 64y^6 + 35y^7 + 15y^8 + 5y^9 + y^{10} + 24x + 106xy + 145xy^2 + 105xy^3 + 60xy^4 + 24xy^5 + 6xy^6 + 50x^2 + 90x^2 + 45x^2y^2 + 15x^2y^3 + 35x^3 + 20x^3y + 10x^4 + x^5$$

Al evaluar en $x = 1$, obtenemos:

$$T(K_6; 1, y) = 120 + 240y + 270y^2 + 240y^3 + 180y^4 + 120y^5 + 70y^6 + 35y^7 + 15y^8 + 5y^9 + y^{10}$$

En la Tabla 3 se muestran las configuraciones críticas por niveles correspondientes a la gráfica completa K_6 . Las mismas observaciones hechas con las gráficas anteriores se pueden verificar con la gráfica K_6 .

1.4.4 Gráfica bipartita completa $K_{3,3}$

Una gráfica bipartita completa de $m + n$ vértices, simbolizada por $K_{m,n}$ es una gráfica simple en la que el conjunto de vértices V se puede particionar en dos conjuntos V_1 y V_2 tal que todo vértice del conjunto V_1 es adyacente a todo vértice del conjunto V_2 .

La Figura 6 muestra la gráfica bipartita completa $K_{3,3}$. El polinomio de Tutte de la gráfica bipartita completa $K_{3,3}$ es:

$$T(K_{3,3}; x, y) = x^5 + 4x^4 + 10x^3 + 11x^2 + 5x + 5y + 15xy + 9x^2y + 9y^2 + 6xy^2 + 5y^3 + y^4$$

De nuevo, evaluando en $x = 1$, obtenemos:

$$T(K_{3,3}; 1, y) = 31 + 29y + 15y^2 + 5y^3 + y^4 = P_q(K_{3,3}; y)$$

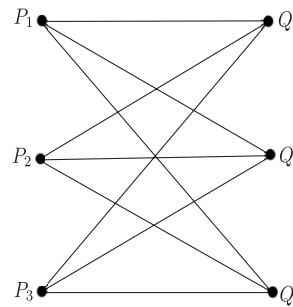


Figura 6 Gráfica bipartita completa $K_{3,3}$

Del mismo modo se puede comprobar la conjetura de Norman Biggs, observando en la Tabla 4 el número de configuraciones críticas de cada nivel.

En la Figura 7 se muestra la ejecución del juego con la configuración crítica $\theta = (0, 0, 2, 2, 2)$. De igual forma la configuración es estable ya que sólo puede disparar el vértice q y dado que después de realizar los disparos q, v_3, v_5, v_4, v_2 y v_1 se obtiene la misma configuración inicial, entonces la configuración también es recurrente. Por lo tanto, la configuración $\theta = (0, 0, 2, 2, 2)$ es una configuración crítica.

Tabla 3 Configuraciones críticas de K_6

Configuraciones críticas de la gráfica K_6					
Nivel	Configuración	Número de permutaciones	Nivel	Configuración	Número de permutaciones
Cero	(0, 1, 2, 3, 4)	120	Cinco	(4, 2, 2, 3, 4)	30
Uno	(1, 1, 2, 3, 4)	60		(4, 1, 3, 3, 4)	30
	(0, 2, 2, 3, 4)	60		(4, 1, 2, 4, 4)	20
	(0, 1, 3, 3, 4)	60		(3, 3, 2, 3, 4)	20
	(0, 1, 2, 4, 4)	60		(0, 4, 4, 3, 4)	20
Dos	(2, 1, 2, 3, 4)	60	Seis	(4, 3, 2, 3, 4)	30
	(1, 1, 3, 3, 4)	30		(4, 2, 2, 4, 4)	10
	(1, 1, 2, 4, 4)	30		(4, 1, 4, 3, 4)	20
	(0, 3, 2, 3, 4)	60		(3, 3, 3, 3, 4)	5
	(0, 2, 2, 4, 4)	30		(0, 4, 4, 4, 4)	5
	(0, 1, 4, 3, 4)	60		(4, 4, 2, 3, 4)	20
Tres	(3, 1, 2, 3, 4)	60	Siete	(4, 3, 3, 3, 4)	10
	(2, 2, 2, 3, 4)	20		(4, 1, 4, 4, 4)	5
	(2, 1, 2, 4, 4)	30	Ocho	(4, 4, 3, 3, 4)	10
	(1, 1, 4, 3, 4)	30		(4, 4, 2, 4, 4)	5
	(0, 4, 2, 3, 4)	60	Nueve	(4, 4, 4, 3, 4)	5
	(0, 3, 3, 3, 4)	20	Diez	(4, 4, 4, 4, 4)	1
	(0, 1, 4, 4, 4)	20			
Cuatro	(4, 1, 2, 3, 4)	60			
	(3, 2, 2, 3, 4)	30			
	(3, 1, 3, 3, 4)	20			
	(2, 2, 2, 4, 4)	10			
	(1, 1, 4, 4, 4)	10			
	(0, 4, 3, 3, 4)	30			
	(0, 4, 2, 4, 4)	20			

Conclusiones

En una gráfica completa K_n , se puede ver que la configuración $(n - 2, n - 2, \dots, n - 2)$ es crítica y es la de mayor nivel. Además, la configuración $(0, 1, \dots, n - 2)$ junto con todas sus permutaciones son también configuraciones críticas. Se puede probar (Merino, 2001) que cualquier configuración que esté entre estas dos configuraciones críticas también es una configuración crítica.

También se han hechos estudios de este juego en gráficas dirigidas (Björner y Lovász 1992). Recientemente se ha intentado generalizar el juego de repartición de fichas a una estructura más compleja llamada matroide regular y se espera generalizar así la conjetura de Norman Biggs (Merino, 1999) **T**

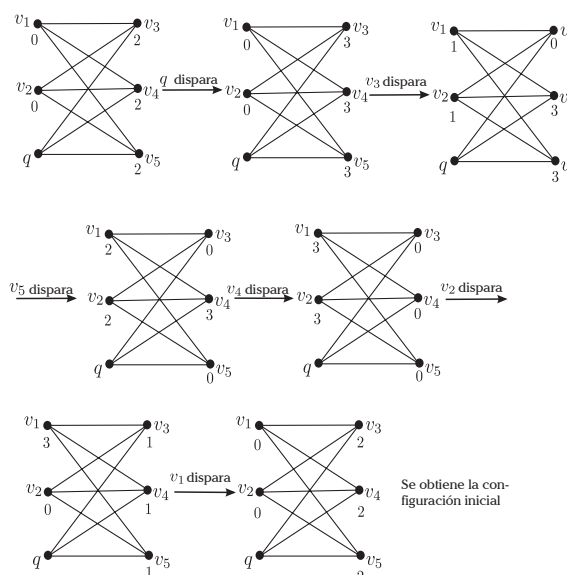


Figura 7 Ejemplo del juego con la configuración crítica $\theta = (0, 0, 2, 2, 2)$.

Tabla 4 Configuraciones críticas de $K_{3,3}$

Configuraciones críticas de la gráfica $K_{3,3}$		
Nivel	Configuración	Número de permutaciones
Cero	(0, 0, 2, 2, 2) (0, 2, 0, 2, 2) (2, 0, 0, 2, 2) (2,2,2,0,0)	4
	(0, 1, 1, 2, 2) Son 30 permutaciones pero las siguientes 3 no son críticas: (0, 1, 1, 2, 2), (1, 0, 1, 2, 2) y (1, 1, 0, 2, 2)	27
Uno	(0, 1, 2, 2, 2)	20
	(1, 1, 1, 2, 2) Todas sus permutaciones excepto (1,1,1,2,2) son configuraciones críticas	9
Dos	(0, 2, 2, 2, 2)	5
	(1, 1, 2, 2, 2)	10
Tres	(1, 2, 2, 2, 2)	5
Cuatro	(2, 2, 2, 2, 2)	1

Bibliografía

- Biggs, N.(1999), Chip firing and the critical group of a graph, Journal of Algebraic Combinatorics, Vol. 9. 25-45.
- Björner, A. Lovász, L. y Shor, P. W.(1991), Chip firing games on graphs, European Journal of Combinatorics, Vol.12. 283-291.
- Björner, A. y Lovász, L.(1992), Chip firing games on directed graphs, Journal of Algebraic Combinatorics, Vol. 1. 305-328.
- Bondy, J. A. y Murty U.S.R.(1982), Graph Theory with Applications, U.S.A.:Elsevier Science Publishing Co.
- Brylawski, T. H. y Oxley, J. G.(1992), The Tutte Polynomial and its applications. En N. White editor, Matroid Applications, Encyclopedia of Mathematica and its Applications, 123-125, U. S.A.: Cambridge University Press.
- De Concini, C. y Procesi, C.(2009), Topics in hyperplane arrangements, polytopes and box-splines, London: Springer.
- Godsil, C. and Royle, G.(2001), Algebraic Graph Theory, New York: Springer-Verlag.
- Merino, C.(1997), The chip firing game and the Tutte Polynomial, Annals of Combinatorics , Vol. 1. 253-259.
- Merino, C.(1999), Matroids, the Tutte Polynomial and the chip firing game, doctoral thesis , University of Oxford.
- Merino, C.(2001), The firing game and matroid complexes. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science Proceedings , 245-256.
- Merino, C.(2005), The chip firing game, Discrete Mathematics, Vol. 302. 188-210.