

Simulación de temperatura por elemento finito en dos dimensiones mediante software libre y su comparación con software comercial

Leonardo Flores Cano*, Maxwell Gustavo Jiménez Escamilla**

Resumen

Fue modelada en dos dimensiones perfiles de temperatura de una placa rectangular, sometida a condiciones de convección de calor y temperaturas iniciales en sus caras, al ser proporcionados por el usuario, utilizando el software libre Octave para resolver las ecuaciones lineales mediante la técnica de elemento finito y la visualización de los perfiles de temperatura en cada punto de la superficie de la placa. Se destaca la elaboración de los algoritmos para el ensamble de matrices asociadas a los elementos finitos. Los resultados obtenidos fueron comparados con el software ANSYS®, obteniendo errores en temperatura menores al 9% con respecto a ANSYS®, para algunos nodos de forma arbitraria. El material anterior permite obtener calidad similar de los resultados que ofrece el software comercial.

1. Introducción

El modelado de fenómenos físicos en la industria en la actualidad se realiza mediante la técnica de Elemento Finito, la cual fue desarrollada en los años 40's por Hrennikoff [1] en el análisis estructural de sólidos en la construcción. Años posteriores la técnica se hizo famosa y Zienkiewicz y colaboradores aplicaron la técnica en áreas de la física como en los esfuerzos mecánicos de torsión, flujo de fluidos y conducción de calor [2]. El método de elemento finito también fue aplicado para resolver campos magnéticos en 1977 por Lyness [3]. El método se utiliza para resolver ecuaciones diferenciales que resultan de describir las leyes imperantes de la naturaleza. Al resolver dichas ecuaciones se desea conocer posición, velocidad, temperatura o cualquier otra variable dinámica del problema [4].

En la actualidad se llevan a cabo una gran variedad de simulaciones virtuales de fenómenos físicos sujetos a ciertas condiciones. Dichos fenómenos físicos son simulados mediante la técnica de elemento finito para posteriormente se pueda diseñar prototipos que innoven y solucionen dicho problema físico o de ingeniería. Por ejemplo en el área biomédica primero se simulan los diseños de prótesis y se someten virtualmente a todas las cargas mecánicas motrices del movi-

* leonardo.florescano@gmail.com. Universidad Tecnológica de la Mixteca

** maxvell2001@yahoo.com.mx. Universidad Tecnológica de la Mixteca

Colaboración de: Reyes Pérez Emilio Rafael, reyes.emilio.101@gmail.com. Universidad Tecnológica de la Mixteca
Matías Astorga Manuel Alejandro, alejandromatiasastorga@hotmail.com. Universidad Tecnológica de la Mixteca

miento humano. Una vez analizada la funcionalidad y ergonomía del diseño mediante la técnica de elemento finito, se procede a realizar el prototipo y comparar con la simulación. El ejemplo anterior se encuentra en un trabajo de Phanphet y colaboradores al diseñar una rodilla [5]. La metodología anterior también se lleva a cabo en áreas como la teoría electromagnética [6, 7], mecánica de fluidos aplicada al flujo de sangre en la aorta [8], hasta modelación de corrosión química en rocas [9].

Debido a la eficiencia del método la mayoría de las empresas desarrollan su propio software de simulación numérica de elemento finito o bien utilizan software comercial como es el ANSYS[®], el cual es recurrentemente utilizado en el área automotriz, petroquímica y construcción [10].

Es por lo anterior que conocer los fundamentos y los desarrollos matemáticos explícitos en su aplicación, serviría de gran utilidad para valorar la técnica y desarrollar software que realice dichos cálculos numéricos.

En el presente trabajo se ilustra su aplicación en un problema térmico con condiciones de frontera establecidas.

2. Marco teórico

La técnica del elemento finito consiste en tres etapas. En la primer etapa se discretiza el dominio del problema en subdominios o mejor llamados “elementos”. A dicha colección de elementos se le denomina el “mallado”, cabe mencionar que cada elemento está formado por “nodos”, y depende del tipo de elemento elegido para realizar el mallado, que tendrá cierta cantidad de nodos. La segunda parte trata sobre elegir el tipo de funciones a aproximar la solución de la ecuación o ecuaciones diferenciales gobernantes de la naturaleza propia del fenómeno. Dichas funciones se llaman “funciones de forma” y estas funciones adquieren ciertos valores en los nodos. En la tercera etapa se procede a utilizar algún método de los residuos ponderados para discretizar las ecuaciones gobernantes a través de las funciones de forma. Una vez discretizado el dominio, se procede a resolver entonces el problema a nivel algebraico de ecuaciones lineales, cuyas incógnitas son los valores de las funciones en cada nodo [11]. En el caso del presente trabajo, la temperatura en el dominio de la placa.

Debido a que se modeló la temperatura de la placa dos dimensional, se utilizaron elementos triangulares, para lo cual se requieren de 3 puntos. Así entonces, en el plano cartesiano XY las coordenadas (x_1, y_1) , (x_2, y_2) y (x_3, y_3) , fueron cambiadas a un nuevo sistema coordenado local de la forma (η, ξ) por lo tanto: $(x, y) \rightarrow (\eta, \xi)$, $(x_1, y_1) \rightarrow (0, 1)$, $(x_2, y_2) \rightarrow (1, 0)$ y $(x_3, y_3) \rightarrow (0, 0)$.

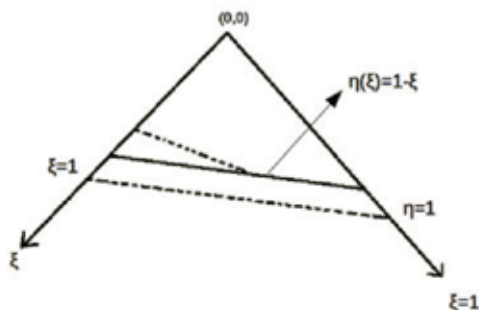


Figura 1. Espacio coordenado de (η, ξ) y la relación de vínculo entre η y ξ .

De la figura 1 se construyó la expresión de η como función de ξ proporcionando la dependencia $\eta(\xi)=1-\xi$. Así mismo fueron construidas las funciones de forma en el sistema coordenado local de un elemento arbitrario con la propuesta $N_{i=1,2,3} = a_i + b_i \eta + c_i \xi$. Dichas funciones de forma cumplirán que en cada nodo tengan el valor de la unidad, y fuera de otro nodo adquieran el valor de cero, esto es: $N_1(0,0)=0$, $N_1(1,0)=0$, $N_1(0,1)=1$, $N_2(0,0)=0$, $N_2(1,0)=1$, $N_2(0,1)=0$, $N_3(0,0)=1$, $N_3(1,0)=0$, $N_3(0,1)=0$. Se resolvió para a_i, b_i, c_i el sistema correspondiente para cada N_i obteniendo como resultado

$$N_1(\eta, \xi) = \xi \quad (1)$$

$$N_2(\eta, \xi) = \eta \quad (2)$$

$$N_3(\eta, \xi) = 1 - \eta - \xi \quad (3)$$

En la técnica de elemento finito se propone la solución o cualquier función de interés como $\Psi = \sum_{i=0}^n N_i u_i$, lo cual implica que para x e y expresados en términos de η y ξ se tiene:

$$\mathbf{x} = \vec{N} \cdot \mathbf{x}_i = [\xi, \eta, 1 - \eta - \xi] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$\mathbf{y} = \vec{N} \cdot \mathbf{y}_i = [\xi, \eta, 1 - \eta - \xi] \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

de otra forma se tiene que

$$\begin{pmatrix} x - x_3 \\ y - y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{13} & x_{23} \\ y_{13} & y_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (6)$$

Donde se definió $x_i - x_j = x_{ij}$. La ecuación 6 permite cambiar de coordenadas del sistema cartesiano XY global al sistema cartesiano local de η y ξ . Una vez escritas las funciones de forma en términos de η y ξ ; y el cambio de coordenadas global a local, entonces se procedió a aplicar la técnica de elemento finito en dos dimensiones.

3. Desarrollo

Se aplicó el método de Galerkin a la ecuación bidimensional de calor en estado estacionario al multiplicar por una función de peso $\phi(x,y)$, e integrar en el espacio bidimensional como se muestra en la ecuación 7:

$$\iint \left[\phi \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \phi \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] dx dy = 0. \quad (7)$$

La ecuación anterior se reescribió como:

$$\iint \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - k \frac{\partial \phi}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) - k \frac{\partial \phi}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] dx dy = 0. \quad (8)$$

El teorema de Stokes establece $\iint_S \vec{\nabla} \cdot (k \phi \vec{\nabla} T) dA = \int_C k \phi \vec{\nabla} T \cdot \hat{n} dl$, esto convierte a la ecuación 8 en:

$$\int k \phi \vec{\nabla} T \cdot \hat{n} dl - \iint \left[k \frac{\partial \phi}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + k \frac{\partial \phi}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] dx dy = 0, \quad (9)$$

La ecuación de la ley de Fourier describe al flujo de calor como un gradiente de temperatura. Dicho flujo de calor se lleva a cabo sobre un área con un perímetro o contorno, donde $\vec{\nabla} T$ y \hat{n} lo cual lleva a la obtención de:

$$- \int \phi h (T - T_{\infty}) dl - \iint \left[k \frac{\partial \phi}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + k \frac{\partial \phi}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] dx dy = 0. \quad (10)$$

Se recuerda que la función peso es una de las funciones de forma N_i , (N_1, N_2 y N_3), (η, ξ) por lo tanto, se obtuvieron 3 ecuaciones tipo la ecuación 10

$$- \int N_1 h (T - T_{\infty_1}) dl - \iint \left[k \frac{\partial N_1}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + k \frac{\partial N_1}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] dx dy = 0 \quad (11)$$

$$- \int N_2 h (T - T_{\infty_2}) dl - \iint \left[k \frac{\partial N_2}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + k \frac{\partial N_2}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] dx dy = 0 \quad (12)$$

$$- \int N_3 h (T - T_{\infty_3}) dl - \iint \left[k \frac{\partial N_3}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + k \frac{\partial N_3}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] dx dy = 0, \quad (13)$$

siendo temperaturas $T_{\infty_1}, T_{\infty_2}$ y T_{∞_3} y las temperaturas del medio en los caminos respectivos dentro del perímetro del elemento triangular. Lo anterior siempre y cuando exista una temperatura en dicho camino, como se muestra en la figura 2.

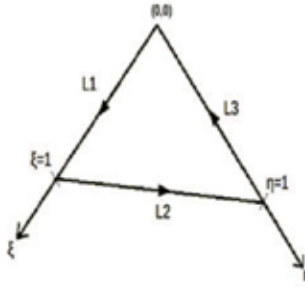


Figura 2. Dirección de los recorridos L_1, L_2 y L_3 , y sobre el sistema coordenado local (η, ξ) .

Como se observa en las ecuaciones 11 a 13 se requirieron los productos de las derivadas en η y ξ , por lo cual se calculó dicho producto como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \quad (14)$$

Se realizó el mismo cálculo para $\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y}$. Sin embargo se observó que se requieren las derivadas parciales en el sistema local de η y ξ , las cuales fueron calculadas mediante la ecuación 6. Al igual que la función de peso, la propuesta de la solución es de la forma $T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^3 N_i T_i$ lo cual implica una transformación en la dependencia de las variables η y ξ como $T(\xi, \eta) = \xi T_1 + \eta T_2 + (1 - \xi - \eta) T_3$. Realizando las sustituciones y cálculos respectivos se obtuvo la siguiente ecuación compacta del sistema de ecuaciones 11 a 13.

$$\text{donde } h \int \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} (N_1, N_2, N_3) \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} dl + \frac{G^2}{k} \iint (A) \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} dx dy = \int \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} T_\infty dl, \quad (15)$$

$$A = \begin{pmatrix} y_{23}(y_{23}, y_{31}, y_{21}) + x_{23}(x_{23}, x_{31}, x_{21}) \\ y_{13}(y_{32}, y_{13}, y_{21}) + x_{13}(x_{32}, x_{13}, x_{21}) \\ y_{12}(y_{23}, y_{31}, y_{12}) + x_{12}(x_{23}, x_{31}, x_{12}) \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$$G = \frac{k}{(x_{13}y_{23} - x_{23}y_{13})}, \quad (17)$$

Finalmente resolviendo la integral de superficie utilizando el jacobiano para integrar en función de η y ξ y reparametrizando las integrales de línea como se muestra en las figuras 2 y 3, se obtuvo el sistema matricial elemental o ecuación matricial de elemento finito para un elemento arbitrario etiquetado con los puntos x_1, x_2 y x_3 , dejando como incógnitas a las temperaturas T_1, T_2 y T_3 .

$$\left(\frac{1}{3}(M_1) + \frac{G}{2}(A)\right) \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(M_2) \begin{pmatrix} T_{\infty_1} \\ T_{\infty_2} \\ T_{\infty_3} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

donde

$$M_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{x_{13}^2 + y_{13}^2} \left(1, 0, \frac{1}{2}\right) + \sqrt{x_{21}^2 + y_{21}^2} \left(1, \frac{1}{2}, 0\right) \\ \sqrt{x_{21}^2 + y_{21}^2} \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right) + \sqrt{x_{23}^2 + y_{23}^2} \left(0, 1, \frac{1}{2}\right) \\ \sqrt{x_{13}^2 + y_{13}^2} \left(\frac{1}{2}, 0, 1\right) + \sqrt{x_{21}^2 + y_{21}^2} \left(0, \frac{1}{2}, 1\right) \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} h_1 \sqrt{x_{13}^2 + y_{13}^2} + h_1 \sqrt{x_{21}^2 + y_{21}^2} \\ h_2 \sqrt{x_{21}^2 + y_{21}^2} + h_2 \sqrt{x_{23}^2 + y_{23}^2} \\ h_3 \sqrt{x_{13}^2 + y_{13}^2} + h_3 \sqrt{x_{21}^2 + y_{21}^2} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Para el ensamble y mallado, se optó por realizar elementos de la misma forma y dimensión para obtener un mallado como el que se muestra en la figura 3.

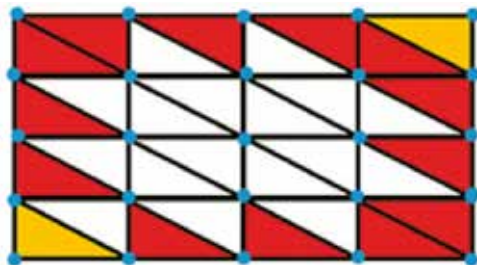


Figura 3. Mallado de la placa sometida a distintas temperaturas y convecciones térmicas. En la figura se muestra también los elementos que se encontraron a distintas temperaturas de contacto en sus contornos.

Este procedimiento facilitó el proceso de ensamblaje. Debido a que la propuesta de sometimiento de temperaturas en las caras del rectángulo es arbitraria, entonces existen ciertos elementos que se encontraron sometidos a más de una temperatura en alguno de sus contornos. Los colores muestran la cantidad de T_{∞} y h (convecciones) a las cuales están expuestos los elementos, los amarillos a dos, los rojos a uno y los blancos a ninguno eso hace que las convecciones (h) adquieran el valor de cero. La figura 4 muestra el tipo de recorrido del triángulo, esto influirá en las entradas la ecuación 18, ya que los números indican las posiciones (x_i, y_i) .

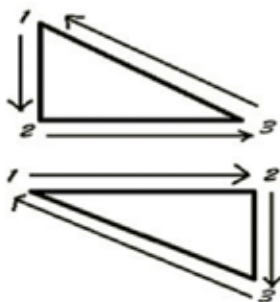


Figura 4. Descripción de la forma en la que se llevó a cabo el recorrido en las integrales de los contornos para los elementos triangulares.

Por cada elemento se obtiene un sistema matricial elemental siendo las incógnitas las temperaturas en los nodos. Sin embargo debido a que los elementos tienen nodos en común y no necesariamente están ordenados, entonces se procedió a ordenar todas las matrices en la matriz de ensamble total.

Una vez recorrido todos los elementos se resolvió el sistema matricial de ensamble con el método numérico asociado a la función `linsolve (MS, Ts)` el cual proporcionó el vector de soluciones correspondientes a cada nodo, los cuales se ordenaron para obtener una representación visual de las temperaturas en los nodos.

Resultados y Conclusiones

En la figura 5 se muestra la superficie de temperaturas de la placa en las condiciones específicas, mostrando los resultados en software libre (Octave) y comercial (ANSYS® v17.1 estudiantil) en la figura 6.

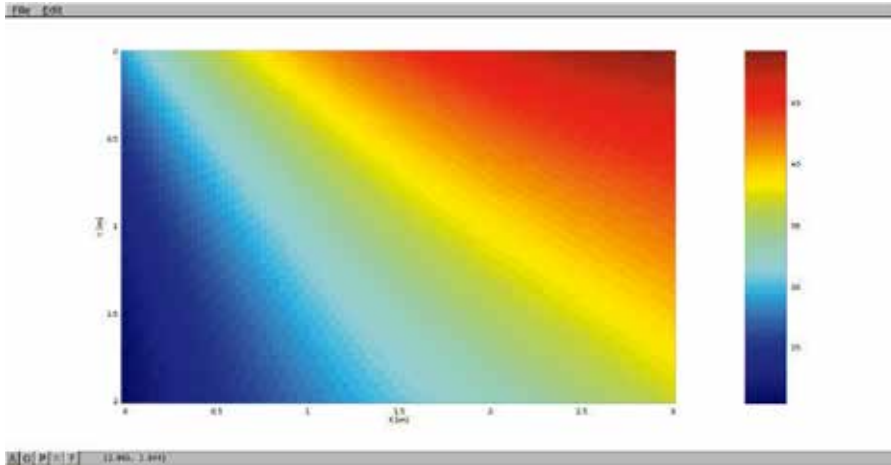


Figura 5. Simulación del perfil de temperatura en la placa rectangular mediante la solución numérica del sistema matricial mediante Octave.

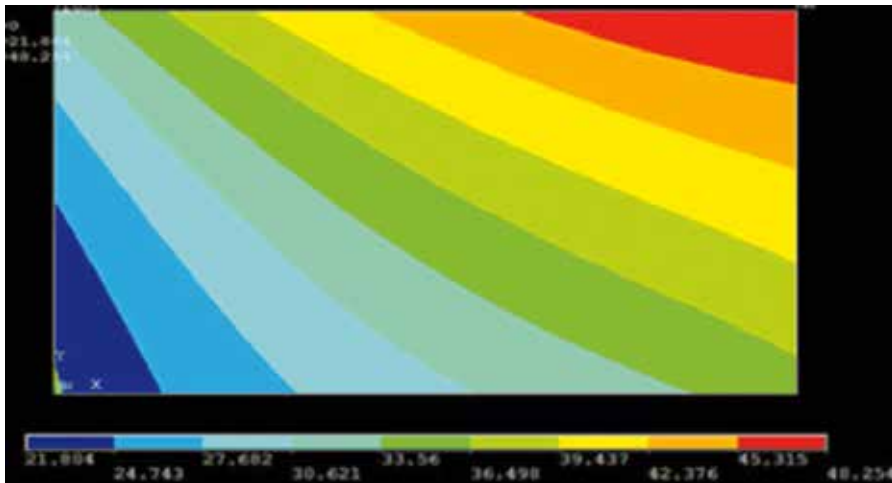


Figura 6. Simulación del perfil de temperatura en la placa rectangular mediante el software ANSYS®.

De ambas figuras se observa que el mallado realizado con el software libre es de una calidad similar al software comercial. Y al realizar una observación burda sobre el perfil de temperatura de ambas simulaciones, éstas son similares. Por otro lado al comparar nodo a nodo (86 nodos

al azar), la simulación del primer software con el segundo, se obtuvo una diferencia porcentual de 8.9% para una muestra de 7000 nodos para ambos programas, por lo cual es una diferencia aceptable y modesta considerando el costo de adquisición de un software como ANSYS®. Sin embargo lo más importante es que se muestra en este trabajo el fundamento matemático de cómo proceder a plantear y resolver problemas de ingeniería como el expuesto mediante la técnica de elemento finito. Si bien es un problema didáctico, se tienen los cimientos para simular otros fenómenos físicos o para el diseño de prototipos previos a su elaboración, por lo tanto contar con una herramienta en la actualidad como la técnica de elemento finito propone nuevas estrategias en la implementación de nuevas tecnologías.

5 Referencias

- [1] Hrennikoff, A., 1941. "Solution of problems in elasticity by the framework method." *Journal of Applied Mechanics*. Vol 8, No.4. 169 – 165.
- [2] Zienkiewicz, O. C, Cheung, Y. K., 1965. "Finite element in the Solution of Field problems." *The Engineer* . 24. 507 – 510.
- [3] Lyness, J. F., Owen, D. R. J., Zienkiewicz, O. C. 1977. "Three Dimensional Magnetic Field determination using a scalar potential. A finite element solution." *International Journal of numerical methods in engineering*. Vol 2. No. 1. 61 – 71.
- [4] Reddy, J. N., Gartling, D. K. 2010. "The finite element method in heat transfer and fluid dynamics." CRC press.
- [5] Phanphet, S., Dechjarern, S., Jomjanyong, S. 2017. "Above-knee prosthesis design based on fatigue life using finite element method and design of experiment." *Medical Engineering & Physics*. Vol 43. Pp 86 – 91.
- [6] Nandy, A., Jog, C. S. 2016. "An amplitude finite element formulation for electromagnetic radiation and scattering." *Computers & Mathematics with Applications*, 71(7), 1364-1391.
- [7] Otin, R., Verpoorte, J., Schippers, H., & Isanta, R. 2015. "A finite element tool for the electromagnetic analysis of braided cable shields." *Computer Physics Communications*, 191, 209-220.
- [8] Laadhari, A., Székely, G. 2017. "Eulerian finite element method for the numerical modeling of fluid dynamics of natural and pathological aortic valves." *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 319, 236-261.
- [9] Mohtarami, E., Baghbanan, A., Eftekhari, M., Hashemolhosseini, H. 2017. "Investigating of chemical effects on rock fracturing using extended finite element method." *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 89. 110 – 126.
- [10] <http://gruposs.com/recursos/exito.php>
- [11] Logan, D. L. 2011. *A first course in the finite element method*. Cengage Learning. Simulación de temperatura por elemento finito en dos dimensiones mediante software libre y su comparación con software comercial