

Capítulo 7

Modelado y Control de un Sistema Bola-Viga

Hiram N. García Lozano¹
Rafael F. González Zárate²
Juan J. Montesinos García³

Abstract: The Ball&Beam system is a typical unstable system. This system can be stabilized by means of several control strategies. For example Proportional Integral Derivative control, phase compensator, feedback state and others. These controls need a device who measure the position and/or velocity of the ball in direct way or indirect. In this work we construct a mathematical model of a Ball&Beam system. For this system simple sensor is proposed for the measurement of the position for the ball on the Ball&Beam system. Next, the mathematical model for this sensor is constructed and control strategy is designs using this sensor.

Keywords: Ball&Beam, system, unstable, control strategy, feedback state.

Resumen: El sistema Bola-Viga es un típico ejemplo de sistema inestable. Para estabilizarlo se han utilizado distintas estrategias de control, entre las cuales están el control Proporcional Integral Derivativo, compensadores en atraso, adelanto, y controles en realimentación de estados, entre otros. Estos controladores requieren de un sensor el cual mida en forma directa o indirecta la posición y/o velocidad de la bola sobre la barra. En este trabajo se realiza

¹hnetgarcia@unpa.edu.mx. Departamento de Ingeniería Mecatrónica, Universidad del Papaloapan.

²rgonzalez@unpa.edu.mx. Departamento de Ingeniería Computación, Universidad del Papaloapan.

³Departamento de Ingeniería Mecatrónica, Universidad del Papaloapan.

la construcción del modelo matemático del sistema Bola-Viga. Para este sistema se propone la construcción de un sensor para la medición de la posición de la bola en la viga. A continuación se construye el modelo matemático de este sensor y el cual es utilizado para el diseño de una estrategia de control.

Palabras clave: Bola-Viga, sistema, inestable, estrategia de control, re-alimentación de estados.

7.1 Introducción

Un modelo de un sistema es cualquier representación que, bajo ciertas consideraciones, responde específicamente a algunas preguntas acerca del sistema. Al utilizar herramientas matemáticas para construir modelos, los niveles de descripción que se logran están directamente relacionados con la complejidad del sistema. Para algunos sistemas es posible modificar su comportamiento por medio de algún dispositivo en forma tal que se comporte de manera predefinida. Las herramientas matemáticas necesarias para construir tales dispositivos se desarrollan en el área del conocimiento llamada teoría de control y las distintas formas de modificar el comportamiento se conocen como estrategias de control. En este trabajo se construye un modelo matemático de un sistema Bola-Viga (BV), se presenta un breve análisis de su comportamiento y se construye una estrategia de control para lograr una respuesta deseada.

7.2 Modelo matemático del sistema Bola-Viga (BV)

El sistema conocido como BV es un caso típico de estudio en teoría de control debido a que su respuesta crece infinitamente ante cualquier entrada, lo que se ilustra el concepto de inestabilidad. Existen varias configuraciones para el sistema BV, la utilizada en este trabajo se representa en la Figura 7.1.

El sistema consiste en una viga simétrica que se hace girar en un plano vertical mediante la aplicación de un par de torsión en el punto de rotación (el centro). En la parte superior de la viga se hace rodar libremente una bola. Para obtener el modelo matemático del sistema BV se realiza el análisis de las fuerzas. El movimiento de la bola es consecuencia de las fuerzas F_t (fuerza de traslación) y F_r (fuerza de rotación). Estas fuerzas deben ser igual a la fuerza que produce la bola al moverse menos la fuerza de fricción. La bola se mueve a lo largo de la viga con una aceleración igual a la componente de la gravedad, para cada ángulo de inclinación θ de la barra. La ecuación de equilibrio de fuerzas es la siguiente:

$$F_t + F_r = M_b g \sin(\theta) - \mu_k \dot{x}(t),$$

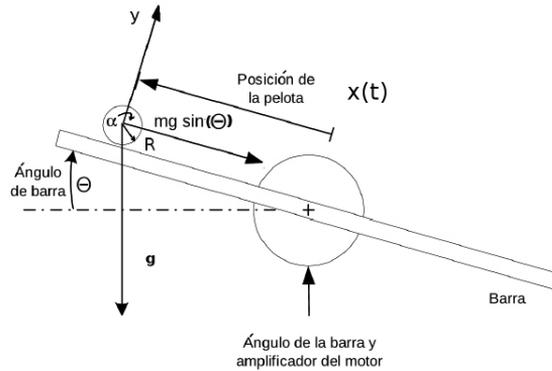


Figura 7.1: Sistema Bola-Viga.

donde M_b es la masa de la bola, g es la aceleración de la gravedad, μ_k el coeficiente de fricción dinámica, $x(t)$ la posición de la bola en la viga y $\dot{x}(t)$ la velocidad de la bola.

Para obtener una expresión sobre la fuerza de rotación de la bola se utiliza la definición del torque τ_b generado en el extremo de la bola

$$\tau_b = F_r R = \frac{J}{R} \ddot{x}(t), \quad (7.2.1)$$

aquí R es el radio de la bola, $J = \frac{2}{5} M_b R^2$ [Serway1993] el momento de inercia y $\ddot{x}(t)$ la aceleración. De la ecuación (7.2.1) la fuerza de rotación es

$$F_r = \frac{J}{R^2} \ddot{x}(t) = \frac{2}{5} M_b \ddot{x}(t).$$

La fuerza de traslación es igual a la masa de la bola por su aceleración, es decir $F_t = M_b \ddot{x}(t)$.

Por lo tanto el modelo matemático del sistema BV es el siguiente:

$$\frac{7}{5} M_b \ddot{x}(t) = M_b g \sin(\theta) - \mu_k \dot{x}(t).$$

Considerando que, al rodar la bola sobre la viga, la fricción es muy pequeña es posible despreciar el término μ_k sin afectar el desempeño del modelo. Por otro lado, a fin de linealizar el modelo y debido a que el ángulo θ varía en sólo unos pocos radianes, se considera que $\sin(\theta) \cong \theta$. Bajo estas consideraciones el modelo matemático del sistema BV es el siguiente:

$$\ddot{x}(t) = \frac{5}{7} g \theta. \quad (7.2.2)$$

El propósito de modelar este sistema es poder llevar la bola a una posición deseada sobre la viga. De la ecuación (7.2.2) se deduce que para cualquier valor de θ tenemos una aceleración $\ddot{x}(t)$, lo que no permite establecer la bola en ninguna posición. Por lo tanto se requiere un dispositivo que nos permita cambiar la dinámica de nuestro modelo. Este dispositivo se conoce como controlador.

7.3 Metodología: Diseño del controlador

En teoría de control, existen distintas formas de diseñar un controlador. La estrategia que se propone, en este trabajo, utiliza el concepto de función de transferencia.

Una forma de definir la función de transferencia es por medio de la respuesta al impulso unitario. Sea $\delta(t - t_0)$ la función impulso unitario. Esta función satisface

$$\begin{aligned} \delta(t - t_0) &= 0 && \text{para } t \neq t_0, \\ \delta(t - t_0) &= \infty && \text{para } t = t_0, \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1.$$

Dada una entrada $\theta(t) = \delta(t - t_0)$ la respuesta del sistema se conoce como la respuesta al impulso $g(t)$. La función de transferencia del sistema $G(s)$ se define como la transformada de Laplace de la respuesta al impulso, con condiciones iniciales cero $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$. Para sistemas con una sola variable, ésta función es igual al cociente cuyo numerador es la transformada de Laplace de la salida $x(t)$ y su denominador es la transformada de Laplace de la entrada $\theta(t)$. Para el modelo del sistema BV, ecuación (7.2.2), se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{5}{7}g\theta(t)\right\}, \\ s^2 X(s) &= \frac{5}{7}g\theta(s) = \frac{5}{7}(981\text{cm}/\text{seg}^2)\theta(s), \end{aligned}$$

así

$$G(s) = \frac{X(s)}{\theta(s)} = 700.741 \frac{1}{s^2}.$$

Gráficamente esta relación puede expresarse en un diagrama a bloques donde la relación directa entrada salida se conoce como función de transferencia en lazo abierto, Figura 7.2a.

Una forma de controlar el sistema es por medio de la re-alimentación de salida, es decir, la diferencia entre la entrada y la salida se utiliza como señal de control

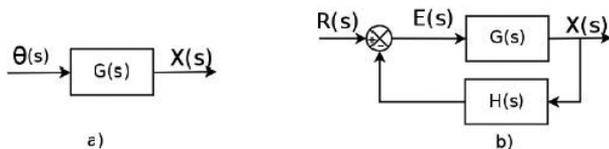


Figura 7.2: Diagramas a bloques de una función de transferencia. a) Función de transferencia en lazo abierto y b) Función de transferencia en lazo cerrado.

a fin que el sistema minimice este error Figura 7.2b. La relación que guardan la transformada de Laplace de la entrada de referencia con la transformada de Laplace de salida, en esta configuración, se conoce como función de transferencia en lazo cerrado [Ogata1998]:

$$\frac{X(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}, \quad (7.3.1)$$

aquí, el término $H(s)$ se conoce como la función de transferencia de la re-alimentación. Normalmente $H(s)$ se utiliza para convertir la salida del sistema a una señal que pueda ser restada con la entrada de referencia.

Para el sistema BV, se diseñará un controlador electrónico, por lo tanto, la opción seleccionada para la señal de error fue una señal de voltaje. Para generar una señal de este tipo, relacionada con la posición de la bola en la viga, se diseñó un sistema de re-alimentación basado en un sensor resistivo alimentado por una fuente de corriente ($i(t) = 12.81 \times 10^{-3} A$). Este sistema fue construido por medio de una cuerda de nailon 4ta de guitarra y una barra de bronce sobre las cuales corre libremente una bola metálica. La cuerda presenta una resistencia lineal que aproximadamente es de $0.59 \Omega/cm$. El modelo matemático del sistema de re-alimentación es $h(t) = 0.00755x(t)$ y su función de transferencia

$$\frac{H(s)}{X(s)} = 0.0755.$$

De esta forma la función de transferencia de lazo cerrado del sistema BV es la siguiente

$$\frac{X(s)}{R(s)} = \frac{700.741 \frac{1}{s^2}}{1 + 0.00755 (7000.741 \frac{1}{s^2})} = \frac{5.29}{s^2 + 5.29}.$$

Para cualquier posición de referencia de la bola $r(t)$, la forma de la salida depende directamente de las raíces del polinomio del denominador de la función de transferencia. Este polinomio mónico, se conoce como polinomio característico y sus raíces como los polos de la función de transferencia. Las raíces del polinomio

del numerador de esta misma función se les denominan ceros y al factor que multiplica este polinomio se le llama ganancia.

Para $r(t)$ un escalón unitario, la salida es la siguiente:

$$x(t) = \text{sen}(2.3t).$$

Lo que claramente sitúa a la bola oscilando a una frecuencia angular de 2.3rad/s . Esta respuesta es distinta de la entrada de referencia deseada.

Este sistema es un caso particular de lo que se conoce como sistema de segundo orden. En general, los sistemas de segundo orden tienen la siguiente función de transferencia

$$\frac{X(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2},$$

donde ξ se conoce como el factor de amortiguamiento y ω_n la frecuencia natural no amortiguada.

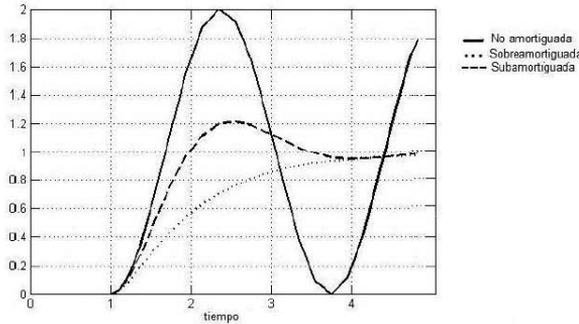


Figura 7.3: Respuesta de un sistema de segundo orden.

Dependiendo de la forma de sus polos, la respuesta a una entrada escalón unitario tiene una de las siguientes formas [Nise2002][Ogata1998], Figura 7.3:

- Si los polos tienen parte real positiva la salida crece exponencialmente, se dice que la respuesta es inestable.
- Si los polos tienen parte real no positiva la forma de respuesta depende de ξ
 - $\xi = 0$ se le conoce como sistema no amortiguado (como es el caso del sistema BV), el sistema oscila a la frecuencia ω_n .
 - Si $0 < \xi < 1$ se dice que el sistema está sub-amortiguado. La respuesta presenta oscilaciones que se extinguen, aproximándose a la respuesta deseada.

- Si $\xi \leq 1$ la respuesta se aproxima a la referencia deseada sin oscilaciones. Si $\xi = 1$ se conoce como sistema críticamente amortiguado y si $\xi > 1$ se le dice sobre-amortiguado.

Normalmente los parámetros de diseño del controlador se seleccionan en términos de la frecuencia natural no amortiguada ω_n y del factor de amortiguamiento ξ . Para poder alcanzar una posición fija en la viga es necesario adicionar un controlador en el sistema (Figura 7.4), el cual modifique los polos de la función de transferencia a fin que la respuesta sea la deseada.

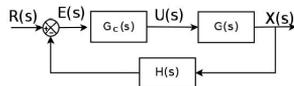


Figura 7.4: Diagrama a bloques de un sistema con controlador.

Existen varias alternativas para el diseño de controladores, en este trabajo se presenta el diseño de un controlador en adelanto de fase. Este tipo de controlador lleva su nombre debido a que al aplicarle una entrada senoidal su salida presentará un adelanto de fase.

Un compensador en adelanto de fase tiene la siguiente función de transferencia

$$G_c(s) = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \text{ con } 0 < \alpha < 1.$$

El problema de control, en este caso, se puede plantear como encontrar los valores de T , α y la ganancia K_c tal que la respuesta del sistema controlado en lazo cerrado tenga los valores deseados de ω_n y ξ . Distintos métodos permiten encontrar estos valores. El método del lugar geométrico de las raíces [Nise2002][Ogata1998] permite gráficamente analizar el comportamiento de la función de transferencia lazo cerrado del sistema a partir de la función de transferencia en lazo abierto. Este método se basa en las siguientes dos condiciones:

Sea

$$1 + G(s)H(s) = 0,$$

el polinomio característico de la función de transferencia en lazo cerrado (7.3.1), entonces:

- Propiedad de magnitud

$$\|1 + G(s)H(s)\| = 1$$

- Propiedad de ángulo

$$\angle G(s)H(s) = \pm 180^\circ(2k + 1).$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$

Utilizado la función de transferencia en lazo abierto y estas dos condiciones es posible construir el lugar geométrico, en el plano complejo, correspondiente a todas las posibles raíces de la función de transferencia (7.3.1) cuando se varía la ganancia K desde cero hasta infinito. De la misma manera, el diagrama del lugar geométrico de las raíces sirve para el diseño de diversos tipos de controladores en particular del compensador en adelanto de fase.

Para el diseño del controlador se propone un factor de amortiguamiento $\xi = 0.4341$ y una frecuencia natural no amortiguada de $\omega_n = 9.2135$, pudiendo ser otros cualesquiera. Los polos deseados que definen estos parámetros son $s_{1,2} = -4 \pm j8.3$. El lugar de las raíces del sistema BV inicia en los polos de lazo abierto y se extiende por el eje imaginario hasta el infinito. Este diagrama se ilustra en la Figura 7.5 así como la ubicación de los polos deseados.

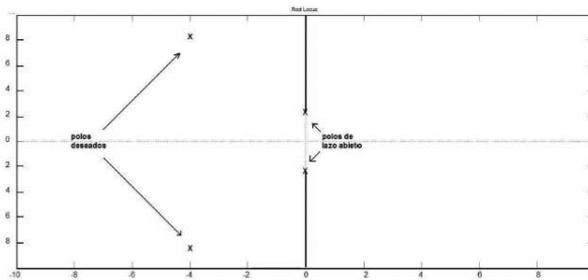


Figura 7.5: Lugar geométrico de las raíces del sistema BV.

El controlador debe hacer que el lugar geométrico de las raíces cambie, pasando por los polos deseados. Para ello primero se calcula la deficiencia angular φ , que es la cantidad angular que debe aportar el controlador para que los polos deseados sean parte del lugar geométrico de las raíces [Nise2002][Ogata1998]. Esto se logra evaluando la función de transferencia de lazo abierto en los polos deseados y calculando la componente angular del número complejo resultante

$$\varphi = \angle \frac{5.29}{s^2 + 5.29} \Big|_{s=-4+j8.3} = -175.73.$$

Este ángulo debe ser compensado, $\frac{\varphi}{2}$ por los polos y $\frac{\varphi}{2}$ por los ceros del compensador. Para una selección del cero en $s = -4.31$ el polo correspondiente se encuentra en $s = -19.71$.

La ganancia K_c del compensador se calcula utilizando la función de transferencia del sistema compensado $G_c(s)G(s)$ en conjunto con la propiedad de magnitud

$$\left| \frac{K_c(s + 4.321)}{s + 19.71} \frac{5.29}{s^2 + 5.29} \right| = 1.$$

La constante K_c del compensador en adelanto de fase es

$$K_c = 33.039,$$

con $T = 0.2320$ y $\alpha = 1.2186$.

7.4 Simulaciones

Existen diferentes herramientas computacionales que permiten calcular el comportamiento con base al modelo construido. En este trabajo se utilizó la herramienta Simulink de Matlab®. Esta herramienta calcula, por medio de un algoritmo numérico (Runge-Kutta), la solución del modelo matemático para una entrada dada.

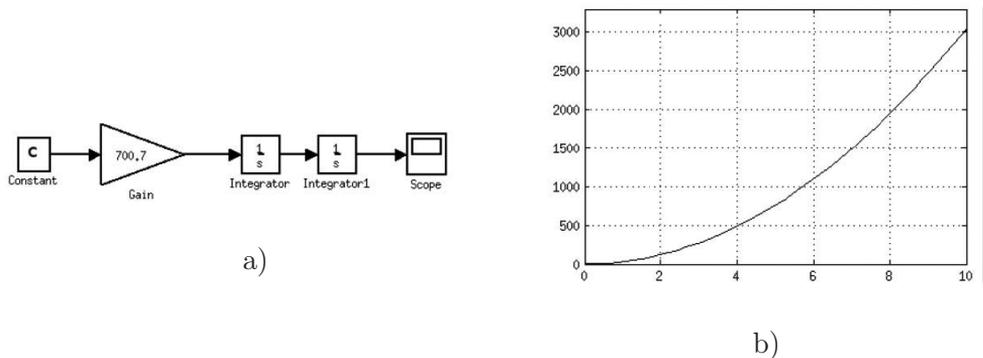


Figura 7.6: Sistema BV en lazo abierto a) Diagrama en Matlab Simulink, b) Respuesta a una entrada escalón unitario.

El diagrama, en bloques de simulink, de la ecuación (7.2.2) se muestra en la Figura 7.6 a). Si se le aplica como entrada un escalón unitario, la respuesta crece infinitamente, Figura 7.6 b).

La implementación, en simulink, del sistema en lazo cerrado con el controlador se muestra en la Figura 7.7.

La respuesta a la misma entrada para el sistema controlado, Figura 7.8, es llevada a la posición deseada en aproximadamente 1 segundo. Esto significa que la bola es estabilizada en una posición a 1 *cm* del centro de giro de la barra, lo que es el propósito del controlador.

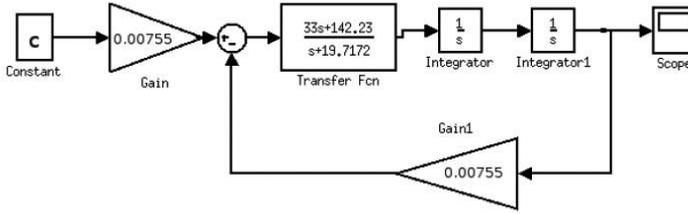


Figura 7.7: Diagrama en simulink del sistema controlado.

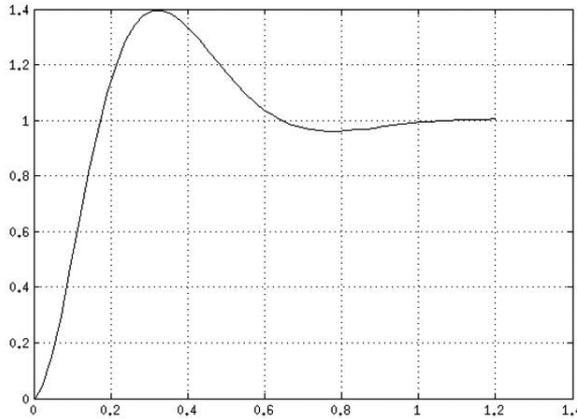


Figura 7.8: Respuesta al escalón unitario del sistema controlado.

7.5 Conclusiones

El propósito de este trabajo es presentar un modelo matemático del sistema BV y con base en este modelo estabilizar la bola en una posición deseada (definida por el usuario) a lo largo de la viga. Con esta motivación se diseñó y modeló un sensor lineal que proporciona la posición de la bola en la viga. Para alcanzar nuestro objetivo fue necesario adicionar al sistema un controlador (compensador en adelanto de fase). Dicho controlador debe satisfacer ciertos requerimientos, para lo cual se empleó una metodología de diseño basada en el lugar geométrico de las raíces. Como resultado, dada una entrada de referencia (posición deseada de la bola), el sistema controlado lleva la bola a dicha posición en un tiempo de relativamente corto. La simulación del sistema en un programa de cómputo numérico nos proporciona evidencia de que el diseño satisface los requerimientos. De acuerdo al tipo de sistema, se considera que la simulación del sistema nos representa una respuesta muy cercana a lo que se obtendría si el sistema se construye físicamente.

Bibliografía

- [Nise2002] Nise N. 2002. **Sistemas de control para ingeniería**. 1ra edición. Compañía editorial continental. D.F, México.
- [Ogata1998] Ogata K. 1998. **Ingeniería de control moderna**. 3ra edición. Pearson education. Naucalpan, México.
- [Serway1993] Serway, R. 1993. **Física tomo I**. 3ra edición. McGraw Hill, México.