Una nueva manera de considerar a los espacios de Lipschitz de funciones periódicas integrables de diversas variables

Resumen

Este trabajo provee extensiones de los resultados para el caso unidimensional, ya considerados en [5, Jiménez 1999a]. Se consideran espacios de Lipschitz de funciones periódicas integrables de diversas variables. Se demuestra que con definiciones adecuadas, estos espacios son homogéneos y satisfacen muy buenas propiedades de aproximación polinomial. El caso de funciones de cuadrado integrable se considera de manera especial, pues deviene en un espacio de Hilbert. Se estudian las series de Fourier múltiple para este caso.

Abstract

This study extends the results for the unidimensional case already considered in [5, Jimenez 1999a]. It looks at Lipschitz spaces of integrable periodic functions of a number of variables. It demonstrates that, with adequate definitions, these spaces are homogeneous and fullfil very good properties of polinomial approximation. The case of integrable square functions is given special attention because it comes from a Hilbert space. The multiple Fourier series for this case are studied.

Abstrait

Ce travail fournit des extensions aux résultats pour le cas unidimensionnel déjà traîté dans [5, Jiménez 1999 a]. On prend des espaces de Lipschitz de fonctions périodiques intégrables de plusieurs variables. On démontre qu'avec des définitions adéquates, ces espaces sont homogènes et qu'ils remplissent de très bonnes propriétés d'approximation polynomiale. Le cas de fonctions de cadre intégrable se considère de manière particulière, car il devient un espace de Hilbert. On étudie les séries de Fourier multiple pour ce cas.

* Tirso M. A. Ramírez

1. Preliminares

El contenido esencial de esta sección es la presentación de los resultados de [5, Jiménez 1999a]: la definición usual de los subespacios de Lipschitz de $L^p_{2\pi}$, $1 \le p < \infty$, se modifica para obtener espacios de Banach homogéneos y un espacio de Hilbert para $p = 2$; luego se muestra que el sistema trigonométrico es una base ortogonal. Sin embargo, la presentación dada aquí, considera funciones complejas en lugar de reales y se dan algunos ejemplos.

1.1 Definición de Lip^p_α.

Comencemos con las notaciones siguientes:

• $F_{2\pi}$ denota al espacio lineal de todas las funciones complejas 2π periódicas y Lebesgue medibles definidas sobre el espacio real R, con la identificación usual de puntos módulo 2π.

• $C_{2\pi}$ denota al espacio de las funciones de $F_{2\pi}$ que son continuas. Este espacio es de Banach con la norma del supremo, esto es,

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in[0,2\pi]} \left| f(x) \right|.$$

* *Profesor Investigador de la Universidad Tecnológica de la Mixteca*

TEMAS DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA vol. 7 número 21 septiembre - diciembre 2003 pp 3 - 12

Igualmente, este espacio se identifica con el de todas las funciones complejas, continuas sobre el intervalo $[0,2\pi[$, equipado con la métrica $d:[0,2\pi[^2 \to [0,\pi]$, definida para toda $x,y \in [0,2\pi[$ por

$$(1.1)\quad d(x,y) := \min\left\{ |x-y|,\ 2\pi - |x-y| \right\}.$$

- $L^p_{2\pi}, 1 \le p < \infty$, es el espacio tradicional de Banach de todas las funciones $f \in F_{2\pi}$ para las cuales

$$\|f\|_p := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty .$$

Aquí como es usual, dos funciones se identifican entre sí cuando son iguales Lebesgue casi dondequiera, lo que se denota c.d., abreviadamente.

Definición 1. *Para una función periódica $f \in F_{2\pi}$, denotamos*

$$\Delta_h(f,x) := f(x+h) - f(x); \qquad h > 0$$

*y para $\alpha > 0$, $1 \le p \le \infty$, el **espacio de Lipschitz** Lip^p_α es la clase de todas las funciones $f \in L^p_{2\pi}$, si $1 \le p < \infty$, o $f \in C_{2\pi}$, si $p = \infty$, tales que*

$$(1.2)\quad \varphi^p_\alpha(f) := \sup\left\{ \frac{\|\Delta_h(f,x)\|_p}{h^\alpha} : h > 0 \right\} < \infty .$$

Según [9, Mirkil 1960], Lip^p_α se llama de Lipschitz en el caso $\alpha = 1$ y de Hölder para $0 < \alpha < 1$; pero nosotros usaremos Lip en la notación e indistintamente los nombres de Hölder o Lipschitz, para todos los casos.

Para $\alpha > 1$ y cada $p \ge 1$, las únicas funciones que satisfacen (1.2) son las constantes.

Puesto que Lip^p_α es un espacio lineal y φ^p_α es una seminorma, una norma natural sobre Lip^p_α es usualmente dada por

$$(1.3)\quad \|f\|^*_{p,\alpha} := \|f\|_p + \varphi^p_\alpha(f) .$$

La norma $\|\cdot\|^*_{p,\alpha}$ es llamada la **norma de Hölder** en el espacio Lip^p_α. Es conocido que el espacio Lip^p_α junto con esta norma es un espacio de Banach.

1.2. La mejor aproximación y espacios de Banach homogéneos.

Denotemos por τ_n al espacio lineal de dimensión finita de todos los polinomios trigonométricos de grado $m \le n$,

$$T_m(x) := \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx}.$$

En el caso real estos polinomios toman la forma particular

$$T_m(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

Para cualquier espacio de Banach B, tal que $\bigcup_n \tau_n \subset B \subset F_{2\pi}$, denotamos la **mejor aproximación** de $f \in B$ a τ_n en la norma de B, por

$$E_n(f) := E_n(f, \|\cdot\|_B) := \inf_{T_n \in \tau_n} \|f - T_n\|_B .$$

Una serie de problemas típicos de Teoría de Aproximación han sido bien estudiados para funciones en Lip^p_α, $1 \le p \le \infty$, con la norma $\|\cdot\|_p$. Pero cuando este espacio se considera con su norma $\|\cdot\|^*_{p,\alpha}$, el principal problema es que las traslaciones no son operadores continuos con respecto al parámetro. Para explicar esta situación y para uso más adelante recordemos las definiciones siguientes.

Si $f \in L^1_{2\pi}$, y $h \in R$, se define el **operador traslación** mediante

$$T_h f(x) := f_h(x) := f(x+h).$$

Definición 2.

*Un subespacio lineal B de $L^1_{2\pi}$, en el cual está definida una norma $\|\cdot\|_B$, que lo convierte en un espacio de Banach, se dice **homogéneo** si, para todo $f \in B$ y para toda $h \in R$ se tiene,*

H1. $\|f\|_1 \le \|f\|_B$

H2. $f_h \in B$

H3. $\|f_h\|_B = \|f\|_B$

H4. $\|f_h - f\|_B \to 0$.

De H1 se deduce que la convergencia en la norma $\|\cdot\|_B$ implica la convergencia en la norma $\|\cdot\|_1$, H2 y H3 son propiedades de invarianza bajo traslación y H4 nos dice que las traslaciones son operadores continuos con respecto al parámetro, es decir, la aplicación $h \to f_h$, es continua.

Algunos ejemplos de espacios homogéneos son:

(1) Los espacios $L^p_{2\pi}$, $1 \le p < \infty$.

(2) $C_{2\pi}$ con la norma del supremo $\|\cdot\|_\infty$.

(3) $C_{2\pi}^{(n)}$, el espacio de las funciones periódicas sobre $[0,2\pi[$, n-veces continuamente diferenciables, con $\|f\| := \sum_{0\le k\le n} \|f^{(k)}\|_{\infty}$.

Para algunas referencias sobre los espacios de Banach homogéneos ver [6, Jiménez 2000b], [7, Jiménez 1989c] y [Katznelson 1968].

Muchas propiedades buenas de aproximación mediante series de Fourier han sido probadas para espacios de Banach homogéneos. Sin embargo, los espacios Lip_{α}^{p} no son homogéneos porque no satisfacen H4. En particular, la sucesión $E_n(f, Lip_{\alpha}^{p}) := E_n(f, \|\,\|_{p,\alpha})$ no siempre converge a cero, lo cual sí se cumple para la sucesión $E_n(f) := E_n(f, \|\,\|_B)$, cuando B es igual a $C_{2\pi}$ o bien igual a $L_{2\pi}^{p}$, debido a que $\cup_n \tau_n$ es un subespacio denso en $C_{2\pi}$ y en $L_{2\pi}^{p}$.

Con esta mala propiedad en las manos, las investigaciones han seguido varias direcciones. En particular se trabaja sobre los espacios lip_{α}^{p}, (por ejemplo ver [2, Bustamante y Jiménez 2000a]) definidos a partir de la función $f \in Lip_{\alpha}^{p}$ para las cuales

$$\sup_{0<h\le\delta}\left\{\frac{\|\Delta_h(f,x)\|_p}{h^{\alpha}} : h>0\right\} \to 0 \text{ cuando } \delta \to 0.$$

Sin embargo, nosotros veremos en esta sección que una modificación apropiada de la definición de los espacios de Lipschitz para $1 \le p < \infty$, nos provee de espacios de Banach homogéneos. Además, para $p = 2$, la versión correspondiente conduce a un espacio de Hilbert donde el **sistema trigonométrico**

$$\left\{ e^{inx} : n \in Z \right\} \tag{1.4}$$

o bien, en el caso real,

$$\frac{1}{2}, \cos(x), \mathrm{sen}(x), \cdots, \cos(kx), \mathrm{sen}(kx), \cdots \text{ es ortogonal.}$$

Luego varias cuestiones sobre series de Fourier y sobre mejor aproximación mediante polinomios trigonométricos en estos espacios se pueden ver en un marco similar al de los espacios $L_{2\pi}^{p}$.

1.3. Los espacios B_{α}^{p}, $1 \le p < \infty$.

Los espacios $B_{\alpha}^{p}[0,2\pi[$, que serán considerados en esta subsección, fueron introducidos por primera vez por Jiménez en [5, 1999a]. En lo que sigue, escribiremos B_{α}^{p} en lugar de $B_{\alpha}^{p}[0,2\pi[$.

La función $d : [0,2\pi[^2 \to [0,\pi]$, dada por (1.1), se extiende a una pseudométrica sobre todo el plano: para toda $x, y \in [0,2\pi[$ y toda $j,k \in Z$,

$$d(x + 2j\pi, y + 2k\pi) = d(x,y).$$

Aquí como es habitual, pseudométrica significa la posibilidad de que la distancia entre dos puntos diferentes de R, sea cero. En realidad lo único que se desea, es extender de manera periódica en cada variable, con periodo 2π, la función distancia que teníamos en $[0,2\pi[^2$. Con ello se logra la invarianza por traslaciones siguiente.

Proposición 1. *Para todo $0 \le x, y < 2\pi$ y $h \in R$, se tiene $d(x,y) = d(x+h, y+h)$.*

En lo que sigue asumimos que $\alpha > 0$ es fijo y denotamos por $F_{(2\pi)^2}$ el espacio de todas las funciones complejas medibles según Lebesgue sobre R^2 que son 2π - periódicas en cada variable. Definimos el **operador traslación** siguiente para toda $x, h \in R^n, n = 1,2$,

$T_h : F_{(2\pi)^n} \to F_{(2\pi)^n}$ por

$$(T_h f)(x) := f_h(x) := f(x+h). \tag{1.5}$$

Para f en $F_{(2\pi)^2}$, tenemos que

$$T_{(h_1,h_2)} f(x_1,x_2) := f(x_1+h_1, x_2+h_2), \quad h_1,h_2 \in R.$$

Luego, si $h = h_1 = h_2 \in R$, denotaremos

$$T_h f(x_1,x_2) := f(x_1+h, x_2+h).$$

Introducimos el operador $F_{\alpha} : F_{2\pi} \to F_{(2\pi)^2}$ mediante

$$(F_{\alpha} f)(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{d(x,y)^{\alpha}}, \; x \ne y \bmod(2\pi), \; x,y \in R. \tag{1.6}$$

Señalamos que más adelante necesitaremos de una extensión natural de estos operadores lineales.

Una observación simple pero importante es que F_{α} es antisimétrico. Esta propiedad significa que para toda $x, y \in R$ y para toda $f \in F_{2\pi}$, $(F_{\alpha} f)(x,y) = -(F_{\alpha} f)(y,x)$

Proposición 2. *Los operadores T_h y F_{α} conmutan en el sentido siguiente: para toda $f \in F_{2\pi}$, y para toda $x, y, h \in R$, $F_{\alpha}(T_h f)(x,y) = T_h(F_{\alpha} f)(x,y)$.*

Para detalles sobre los espacios estrictamente convexos, ver [3, Cheney 1996] y [10, Rivlin 1969].

1.4. El espacio de Hilbert B_α.

En esta subsección se estudia B_α^p para el caso en que $p=2$. Esto también fue presentado por primera vez en [5, Jiménez 1999a]. Escribiremos abreviadamente, $\|\cdot\|_\alpha := \|\cdot\|_{2,\alpha}$ y $B_\alpha := B_\alpha^2$. Veremos que el sistema trigonométrico (1.4), $\{e^{inx} : n \in Z\}$, es una base ortogonal de este espacio. Para el caso real ver [5, Jiménez 1999a].

Proposición 4. *El funcional, sesquilineal* $(f|g) := (f|g)_{L^2_{2\pi}} + (F_\alpha f | F_\alpha g)_{L^2_{(2\pi)^2}}$, $f,g \in B_\alpha$, *es un producto interior cuya norma asociada* $\|f\|_\alpha = (f|f)^{\frac{1}{2}}$ *es igual a* $\|f\|_{2,\alpha}$.

Aquí $(f|g)_{L^2_{2\pi}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx$

$$(F_\alpha f|F_\alpha g)_{L^2_{(2\pi)^2}} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F_\alpha f(x,y)\overline{F_\beta g(x,y)}\, dxdy$$

Luego, B_α *es un espacio de Hilbert.*

Teorema 3. *El sistema trigonométrico (1.4) es una base ortogonal de* B_α *cuyos elementos tienen las normas:*

$$K_\alpha(n)^2 = \|e^{inx}\|_\alpha^2 = 1 + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{|1-e^{inh}|^2}{h^{2\alpha}}dh$$

para n=0,1,2,3,. . .

De la proposición 4, la gran variedad de resultados generales de los espacios de Hilbert se cumplen en B_α^p (por ejemplo ver [4, Deutsch 2001]). En particular, usando el teorema 3, tendremos:

Teorema 4. *Sea H un espacio de Hilbert, con producto interior* $(\cdot|\cdot)_H$ *y norma* $\|\cdot\|_H$. *Sea F un subespacio lineal de H que se convierte en un espacio de Hilbert bajo un producto interior* $(\cdot|\cdot)_F$ *y tal que* $\|\cdot\|_H \le \|\cdot\|_F$ *sobre F. Si* $\{u_j : j=1,2,\cdots\}$ *es una base ortonormal de H que simultáneamente es una base ortogonal de F, entonces para cada* $f \in F$, *la serie de Fourier de f es formalmente igual para ambos espacios.*

Corolario 4. *Para cada* $f \in B_\alpha$, *la serie de Fourier de f en este espacio es la misma que la de f en* $L^2_{2\pi}$.

Además, $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{inx} \in L^2_{2\pi}$

está en B_α *si y sólo si* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^2 [K_\alpha(n)]^2 < \infty$.

2. Los Espacios $B_\alpha^p([0,2\pi]^2)$

En esta sección consideraremos al espacio $B_\alpha^p([0,2\pi]^2)$, $1 \le p < \infty$, $\alpha > 0$, para el caso en que $n=2$.

Comenzamos con las notaciones siguientes:

- $F_{(2\pi)^4}$ denota al espacio lineal de todas las funciones complejas medibles según Lebesgue sobre R^4, que son 2π - periódicas en cada variable.
- $L^p_{(2\pi)^4}$, $1 \le p < \infty$, es el espacio de Banach de todas las funciones $f \in F_{(2\pi)^4}$ para los cuales

$$\|f\|_p := \left(\frac{1}{(2\pi)^4}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x,y,u,v)|^p\, dxdydudv\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Definición 4. *Para una función periódica* $f \in F_{(2\pi)^2}$, *denotamos*

$$\Delta_h(f,x) := f(x+h) - f(x);\ h = (h_1,h_2),\ x = (x_1,x_2)$$

y para $\alpha > 0$, $1 \le p \le \infty$, *el* ***espacio de Lipschitz*** $Lip_\alpha^p([0,2]^2)$ *es la clase de todas las funciones* $f \in L^p_{(2\pi)^2}$, *si* $1 \le p < \infty$, *o* $f \in C_{(2\pi)^2}$, *si* $p = \infty$, *tales que*

$$\varphi_\alpha^p(f) := \sup\left\{\frac{\|\Delta_h(f,x)\|_{L^p_{(2\pi)^4}}}{|h|^\alpha} : h = (h_1,h_2)\right\} < \infty,$$

donde $C_{(2\pi)^2}$ *es una extensión natural de* $C_{2\pi}$.

Generalicemos la métrica $d : [0,2\pi[^2 \to [0,\pi]$ definida en (1.1). Definimos para toda $x,y,u,v \in [0,2\pi[$, $d_2 : [0,2\pi]^4 \to R$ por $d_2[(u,v),(x,y)] := \sqrt{d(u,x)^2 + d(v,y)^2}$.

donde $d\ (=d_1)$ es como en la sección 1.

En lo que sigue, suponemos que se ha fijado $\alpha > 0$.

Definición 5. *Definimos los dos operadores lineales siguientes. Para toda* $x,y,h \in R^n$, $n=1,2$,

$$T_h := F_{(2\pi)^n} \to F_{(2\pi)^n}$$

$$(T_h f)(x) := f_h(x) := f(x+h).$$

El otro operador será $F_\alpha : F_{(2\pi)^n} \to F_{(2\pi)^{2n}}$

$$(F_\alpha f)(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{d_n(x,y)^\alpha},\ si\ x \ne y.$$

Para f en $F_{(2\pi)^{2n}}$, tenemos que

$T_{(h_1,h_2)}f(x_1,x_2):=f(x_1+h_2,x_2+h_2)$, $h_1,h_2\in R^n$.

Obsérvese que los dos operadores de la definición anterior son extensiones naturales de (1.5) y (1.6), respectivamente. El primer operador, obviamente, es el operador de traslación.

Proposición 5. *Los operadores T_h y F_α, conmutan en el sentido siguiente: para toda $f\in F_{(2\pi)^n}$ y para toda $x,y,h\in R^n$, $n=1,2$, $F_\alpha(T_hf)(x,y)=T_h(F_\alpha f)(x,y)$*

Demostración.

$$\begin{aligned}T_h(F_\alpha f)(x,y)&=F_\alpha f(x+h,y+h)\\&=\frac{f(x_1+h_1,\ldots,+x_n+h_n)-f(y_1+h_1,\ldots,+y_n+h_n)}{\left(\sum_{i=1}^n d(x_i+h_i,\ldots,y_i+h_i)^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}}\\&=\frac{f(x_1+h_1,\ldots,+x_n+h_n)-f(y_1+h_1,\ldots,+y_n+h_n)}{\left(\sum_{i=1}^n d(x_i,y_i)^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}}\\&=\frac{T_hf(x)-T_hf(y)}{d_n(x,y)^\alpha}\\&=F_\alpha(T_hf)(x,y).\ \blacksquare\end{aligned}$$

Definición 6. *Fijemos $1\le p<\infty$ y $\alpha>0$. El espacio $B_\alpha^p([0,2\pi[^2)$ es la clase de todas las funciones $f\in L^p_{(2\pi)^2}$ para las cuales $F_\alpha f\in L^p_{(2\pi)^4}$.*

Obsérvese que $\|F_\alpha(\cdot)\|_p$ es una seminorma sobre $B_\alpha^p([0,2\pi[^2)$. Entonces como en la sección 1, $B_\alpha^p([0,2\pi[^2)$ es un espacio normado con $\|f\|_{p,\alpha}:=\left(\|f\|_p^p+\|F_\alpha(f)\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Considerando de manera natural los espacios homogéneos en diversas variables, se tiene el resultado siguiente.

Teorema 5. *Para cada $1\le p<\infty$ y $\alpha>0$, el espacio $B_\alpha^p([0,2\pi[^2)$ es un espacio de Banach homogéneo.*

Demostración. Probaremos primero que el espacio es completo. Sea (f_n) una sucesión de Cauchy en $f\in B_\alpha^p([0,2\pi[^2)$. En particular, (f_n) es una sucesión de Cauchy en $L^p_{(2\pi)^2}$. Entonces existe f en $L^p_{(2\pi)^2}$ tal que

(2.1) $\|f_n-f\|_p\to0$, si $n\to\infty$.

Necesitamos probar que $f\in B_\alpha^p([0,2\pi[^2)$ y que

(2.2) $\|F_\alpha(f_n-f)\|_p\to0$ si $n\to\infty$.

Puesto que $f\in L^p_{(2\pi)^2}$ y $\|F_\alpha f\|_p\le\|F_\alpha(f_n-f)\|_p+\|F_\alpha f_n\|_p$, la afirmación que $f\in B_\alpha^p([0,2\pi[^2)$ automáticamente se sigue de (2.2).

Para probar esta última propiedad, observe que $(F_\alpha f_n)$ también es una sucesión de Cauchy en $L^p_{(2\pi)^4}$. Entonces existe un $g\in L^p_{(2\pi)^4}$, tal que

(2.3) $\|F_\alpha f_n-g\|_p\to0$ si $n\to\infty$.

Por otro lado $\|F_\alpha(f_n-f)\|_p=\|F_\alpha f_n-F_\alpha f\|_p$. Así sólo tenemos que probar que

(2.4) $F_\alpha f=g$ c.d.

Por (2.1), existe una subsucesión (f_{nj}) que converge a f c.d. sobre $[0,2\pi[^2$ y por (2.3), otra subsucesión $(F_\alpha f_{n_{j_k}})$ que converge a g c.d. sobre $[0,2\pi[^4$. Entonces (2.4) se cumple.

Las propiedades (H_1: para todo $f\in B_\alpha^p([0,2\pi[^2)$, $\|f\|_1\le\|f\|_{p,\alpha}$) y ($H_2$: para todo $h\in R^2, f_h\in B_\alpha^p([0,2\pi[^2)$) son claras. Para probar las propiedades H_3 y H_4 en $B_\alpha^p([0,2\pi[^2)$, usaremos el hecho de que ambas se satisfacen en $L^p_{(2\pi)^n}$, $n=2,4$, así como también la proposición 5. Sea $f\in B_\alpha^2([0,2\pi[^2)$ dado y $h\in R^2$. Entonces:

$$\begin{aligned}\|T_hf\|_{p,\alpha}^p&=\|T_hf\|_p^p+\|F_\alpha(T_hf)\|_p^p\\&=\|T_hf\|_p^p+\|T_h(F_\alpha f)\|_p^p\\&=\|f\|_p^p+\|F_\alpha f\|_p^p\\&=\|f\|_{p,\alpha}^p\end{aligned}$$

Así H_3 se cumple en $B_\alpha^2([0,2\pi]^2)$. La prueba de H_4 es:

$$\begin{aligned}\|T_hf-f\|_{p,\alpha}^p&=\|T_hf-f\|_p^p+\|F_\alpha(T_hf-f)\|_p^p\\&=\|T_hf-f\|_p^p+\|T_h(F_\alpha f)-F_\alpha f\|_p^p\end{aligned}$$

que converge a 0 si h tiende a 0. $\blacksquare$

Para uso posterior, supondremos que el sistema trigonométrico sobre $[0,2\pi]^2$ se define de manera natural, mediante el conjunto

(2.5) $\{e^{inx}e^{imy}:m,n\in Z\}$.

Corolario 5. *Para cada $f\in B_\alpha^p([0,2\pi[^2)$ y cada unidad aproximativa (K_n) de funciones continuas 2π-periódicas en $L^1_{(2\pi)^2}$, se tiene $\|K_{n,m}*f-f\|_{p,\alpha}\to0$, si $n,m\to\infty$, donde * denota la convolución de K_n y f.*

En particular, tomando el núcleo de Féjer bidimensional $F_{n,m}(x,y) := F_n(x)F_m(y)$, se tiene que el sistema trigonométrico (2.5), es denso en $B_\alpha^p([0,2\pi[^2)$.

Usando la hipótesis de que $F_\alpha f \in L^p_{(2\pi)^4}$, $1 \le p < \infty$ y $\alpha > 0$, en particular la 2π - periódicidad en cada variable y el Teorema de Fubini, se tiene:

$$\int_{[0,2\pi]^4} \left| F_\alpha f(x,y,u,v) \right|^p dv \; du \; dy \; dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f(u,v) - f(x,y)}{d_2[(u,v),(x,y)]^\alpha} \right|^p dv \; du \; dy \; dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} \int_{y-\pi}^{y+\pi} \left| \frac{f(u,v) - f(x,y)}{\left[d(u,v)^2,(x,y)^2\right]^{\frac{\alpha}{2}}} \right|^p dv \; du \; dy \; dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(x+s,y+t) - f(x,y)}{\left[s^2+t^2\right]^{\frac{\alpha}{2}}} \right|^p dt \; ds \; dy \; dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f(x+s,y+t) - f(x,y)}{\left[s^2+t^2\right]^{\frac{\alpha}{2}}} \right|^p dy \; dx \; ds \; dt$$

$$= \int_{[-\pi,\pi]^2} \int_{[0,2\pi]^2} \left| \frac{f(x+s,y+t) - f(x,y)}{\left[s^2+t^2\right]^{\frac{\alpha}{2}}} \right|^p d(x,y) \; d(s,t)$$

Así,

$$(3.1) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f(u,v) - f(x,y)}{d_2[(u,v),(x,y)]^\alpha} \right|^p dv \; du \; dy \; dx =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f(x+s,y+t) - f(x,y)}{\left[s^2+t^2\right]^{\frac{\alpha}{2}}} \right|^p dy \; dx \; ds \; dt$$

donde $x,y,u,v,s,t \in R$. Obsérvese que si $y = v = 0$, la fórmula anterior se reduce a la fórmula (1.7) de la sección 1.

Igualmente la fórmula siguiente se utilizará en la definición del producto escalar:

$$\int_{[0,2\pi]^4} F_\alpha f(x,y,u,v) \overline{F_\beta g(x,y,u,v)} \; dv \; du \; dy \; dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[f(x+s,y+t) - f(x,y)] \; \overline{[g(x+s,y+t) - g(x,y)]}}{\left[s^2+t^2\right]^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \; dy \; dx \; ds \; dt$$

donde $f \in B_\alpha^p([0,2\pi]^2)$, $g \in B_\beta^q([0,2\pi]^2)$, $\alpha, \beta > 0$; $1 \le p,q < \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

El lado derecho de la fórmula (3.1), realmente simplifica el lado izquierdo. Para ilustrar este hecho, se invita al lector a evaluar directamente la integral múltiple que se calcula en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4. *Sea* $f(x,y) = sen(x+y)$, *entonces* $F_\alpha f(x,y,u,v) = \dfrac{sen(x+y) - sen(u+v)}{d_2[(u,v),(X,Y)]^\alpha}$. *Con* $p = 2$, $\alpha = 1$ *y usando el lado derecho de (3.1), tenemos*

$$\int_{[0,2\pi]^4} \left| F_\alpha f(x,y,u,v) \right|^p \; dv \; du \; dy \; dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[sen(u+v) - sen(x+y)]^2}{d_2[(u,v),(x,y)]} dv \; du \; dy \; dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[sen(x+h+y+k) - sen(x+y)]^2}{\sqrt{h^2+k^2}} \; dx \; dy \; dh \; dk$$

$$= 4\pi^2 \int_{\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos(h+k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \; dh \; dk$$

$$\approx 692.553 . \; \square$$

Proposición 6. *Para cada* $\alpha > 0$ *y* $1 \le p < \infty$, *los espacios de Lipschitz clásicos* $Lip_\alpha^p([0,2]^2)$ *definidos en la sección 1 de este capítulo están continuamente inmersos en* $B_\alpha^p([0,2\pi]^2)$.

Demostración. Claramente $Lip_\alpha^p([0,2[^2) \subset B_\alpha^p([0,2\pi[^2)$. Resta ver que para cada $f \in Lip_\alpha^p([0,2[^2)$, $\|f\|_{p,\alpha} \le C \|f\|^*_{p,\alpha}$; pero esto se sigue del hecho que $\|F_\alpha f\|_p \le \varphi_\alpha^p(f)$. ■

Proposición 7. *Para cada* $\alpha > 0$ *y* $1 < p < \infty$, *los espacios* $B_\alpha^p([0,2\pi[^2)$ *son estrictamente convexos.*

Demostración. Sean $f, g \in B_\alpha^p([0,2\pi]^2)$ tales que $\|f\|_{p,\alpha} = \|g\|_{p,\alpha} = 1$. Se sigue que

$$\|f+g\|_{p,\alpha} \le \left(\|f\|_p^p + \|F_\alpha(f)\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\|f\|_{p,\alpha} + \|f\|_{p,\alpha}\right)^{\frac{1}{p}} = 2.$$

Entonces $\|f+g\|_{p,\alpha} = 2$ es posible sólo si $f = g$ c.d. ■

Denotemos por $T_{n,m}$ al espacio lineal de dimensión finita de todos los polinomios trigonométricos en dos variables $T_{n,m}(x,y) := \sum_{|j| \le n} \sum_{|k| \le m} c_{j,k} e^{ijx} e^{iky}$.

Usando esta notación y la proposición anterior, tenemos el resultado siguiente no trivial:

Corolario 6. *Para cada* $f \in B_\alpha^p([0,2\pi[^2)$, $1 < p < \infty$ *y* $\alpha > 0$ *tal que* $\{e^{ijx} e^{iky} : j,k \in Z\} \subset B_\alpha^p([0,2\pi[^2)$ *existe un polinomio único de la mejor aproximación de* f *a* $T_{n,m}([0,2\pi[^2)$*en* $B_\alpha^p([0,2\pi[^2)$.

3. El Espacio De Hilbert $B_\alpha([0,2\pi[^2)$

En esta sección se define un producto interior $(f \mid g)$ bajo el cual el espacio $B_\alpha([0,2\pi[^2)$ se convierte en un espacio de Hilbert. También se demuestra que el sistema trigonométrico (2.5) es una base ortogonal de este espacio. Escribiremos $B_\alpha([0,2\pi[^2)$ en lugar de $B_\alpha^2([0,2\pi[^2)$.

Se prueba sin dificultad lo siguiente:

Proposición 8. *El funcional sesquilineal*

$$(f \mid g) := (f \mid g)_{L^2_{(2\pi)^2}} + (F_\alpha f \mid F_\alpha g)_{L^2_{(2\pi)^4}}, \quad f, g \in B_\alpha([0,2\pi[^2)$$

es un producto interior cuya norma asociada $\|f\|_\alpha = (f \mid f)^{\frac{1}{2}}$ *es igual a* $\|f\|_{2,\alpha}$. *Aquí*

$$(f \mid g)_{L^2_{(2\pi)^2}} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y)\overline{g(x,y)}\ dy\ dx$$

$$(F_\alpha f \mid F_\alpha g)_{L^2_{(2\pi)^4}} =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F_\alpha f(x,y,u,v)\overline{F_\alpha g(x,y,u,v)}\ dv\ du\ dy\ dx$$

Luego, $B_\alpha([0,2\pi[^2)$ es un espacio de Hilbert y por lo tanto los resultados generales de los espacios de Hilbert se cumplen en este espacio (por ejemplo ver [4, Deutsch 2001].

Ahora probaremos que el sistema trigonométrico (2.5) es una base ortogonal de este espacio.

Proposición 9. *Sea* $\alpha > 0$ *tal que* $\{e^{inx}e^{imy} : m,n \in \mathbb{Z}\} \subset B_\alpha([0,2\pi[^2)$. *El sistema trigonométrico* $\{e^{inx}e^{imy} : m,n \in \mathbb{Z}\}$ *es una base ortogonal de* $B_\alpha([0,2\pi[^2)$ *cuyos elementos tienen las normas:*

$$(4.1) \quad K_\alpha(n,m)^2 = \left\|e^{inx}e^{imy}\right\|_\alpha^2$$

$$= 1 + \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left|1-e^{inh}e^{imk}\right|^2}{(h^2+k^2)^\alpha}\ dh\ dk$$

Demostración. Se tiene

$$(f \mid g) := (f \mid g)_{L^2_{(2\pi)^2}} + (F_\alpha f \mid F_\alpha g)_{L^2_{(2\pi)^4}}, \quad f, g \in B_\alpha([0,2\pi[^2)$$

Se sabe que

$$(f \mid g)_{L^2_{(2\pi)^2}} = (e^{inx}e^{imy} \mid e^{isx}e^{ity})_{L^2_{(2\pi)^2}} = 1 \text{ si } n = s \text{ y } m = t$$

$$= 0 \text{ en otro caso.}$$

Con $f(x,y) = e^{inx}e^{imy}, g(x,y) = e^{isx}e^{ity}$ y

$$F_\alpha f(x,y,u,v) = \frac{e^{inx}e^{imy} - e^{inu}e^{imv}}{d_2[(u,v),(x,y)]^\alpha}, \text{ se tiene}$$

$$(F_\alpha f \mid F_\alpha g)_{L^2_{(2\pi)^4}}$$

$$= \left(F_\alpha(e^{inx}e^{imy}) \mid (e^{isx}e^{ity})\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{inx}e^{imy}-e^{inu}e^{imv}}{d_2[(u,v),(x,y)]^\alpha}\cdot\overline{\frac{e^{isx}e^{ity}-e^{isu}e^{itv}}{d_2[(u,v),(x,y)]^\alpha}}\ dv\ du\ dy\ dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{inx}e^{imy}-e^{in(x+h)}e^{im(y+k)}}{[h^2+k^2]^{\frac{\alpha}{2}}}\cdot\frac{e^{isx}e^{ity}-e^{-is(x+h)}e^{-it(y+k)}}{[h^2+k^2]^{\frac{\alpha}{2}}}\ dx\ dy\ dh\ dk$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{inx}e^{imy}\left(1-e^{inh}e^{imk}\right)}{[h^2+k^2]^{\frac{\alpha}{2}}}\cdot\frac{e^{-isx}e^{-ity}\left(1-e^{-ish}e^{-itk}\right)}{[h^2+k^2]^{\frac{\alpha}{2}}}\ dx\ dy\ dh\ dk$$

que se anula si $n \neq s$ o bien $m \neq t$, de donde sigue la ortogonalidad. Si $n = s$ y $m = t$, se tiene

$$(F_\alpha f \mid F_\alpha f)_{L^2_{(2\pi)^4}} = \left(F_\alpha(e^{inx}e^{imy}) \mid F_\alpha(e^{inx}e^{imy})\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left(1-e^{inh}e^{imk}\right)\left(1-e^{-inh}e^{-imk}\right)}{(h^2+k^2)^\alpha}\ dh\ dk$$

de donde se sigue (4.1).

Cuando el sistema trigonométrico (2.5) es un subconjunto de $B_\alpha([0,2\pi[^2)$, sus combinaciones lineales finitas, es decir los polinomios trigonométricos, son densos en $B_\alpha([0,2\pi[^2)$ (ver el comentario que sigue al corolario 5). Por lo tanto $\{e^{inx}e^{imy} : m,n \in \mathbb{Z}\}$, es una base ortogonal. ■

Ahora se sigue sin dificultad el planteamiento de la teoría de desarrollos ortonormales en espacios de Hilbert (por ejemplo ver [7, Jiménez 1989c]. Como caso particular, teniendo presente el teorema (4), una función $f \in L^2_{(2\pi)^2}$, expresada en ese espacio mediante su desarrollo $f(x,y) := \sum_{n,m} A_{n,m}e^{inx}e^{imy}$

pertenece a $B_\alpha([0,2\pi[^2)$ si y sólo si $\sum_{n,m\in Z} A^2_{n,m}[K_\alpha(n,m)]^2 < \infty$

Conclusiones

Los espacios de Hölder de funciones periódicas integrables $B_\alpha^p([0,2\pi[)$, introducidos por Jiménez, pueden ser igualmente definidos en el caso de funciones de dos variables. Aquí se denotan por $B_\alpha^p([0,2\pi[^2)$.

Para todo $\alpha > 0$, los espacios $B_\alpha^p([0,2\pi[^2)$ son homogéneos si $1 \le p < \infty$ y estrictamente convexos si $1 < p < \infty$. El espacio $B_\alpha^2([0,2\pi[^2)$ es de Hilbert y si α es "pequeño", entonces el sistema trigonométrico $\{e^{inx}e^{imy} : m,n \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortogonal del espacio. Los resultados pueden generalizarse a más de dos variables.

Si bien el esquema de introducción y demostraciones de los resultados aquí presentados es muy similar al esquema de Jiménez en su artículo original, la fórmula de reducción de integrales debe tomarse en $[-\pi,\pi]^2$ respecto del parámetro, lo cual resalta una diferencia significativa con el caso unidimensional y con los espacios de Besov

Bibliografía

(1) J. Bustamante y M. A. Jiménez
2001 Series de Fourier y funciones de Lipschitz, Margarita Matemática en Memoria de José Javier (Chicho) Guadalupe, Universidad la Rioja, España.

(2) J. Bustamante y M. A. Jiménez
2000 Trends in Hölder approximation, Aportaciones Matemáticas, Serie de Comunicaciones, 27, 23-31.

(3) E. W. Cheney
1996 Introduction to Approximation Theory, McGraw-Hill, New York.

(4) F. Deutsch
2001 Best Approximation in Inner Product Spaces, Canadian Mathematical Society, Springer-Verlag.

(5) M. A. Jiménez
1999 A new approach to Lipschitz spaces of periodic integrable functions, Aportaciones Matemáticas, Serie Comunicaciones, 25, 153-157 (demostraciones de los enunciados en el preprint del mismo título editado en la FCFM-BUAP).

(6) M. A. Jiménez
2000 Espacios de Banach homogéneos y funciones de Hölder, Preprint presentado en el Seminario Internacional de Teoría de Aproximación; Puebla.

(7) M. A. Jiménez
1989 Medida, Integración y Funcionales, Pueblo y Educación, La Habana.

(8) Y. Katznelson
1968 An Introduction to Harmonic Analysis, John Wiley & Sons, New York.

(9) H. Mirkil
1960 Continuous translation of Hölder and Lipschitz functions, Can. J. Math, 12; pp 674-685.

(10) T. J. Rivlin
1969 An Introduction to the Approximation of Functions, Dover Pub., New York.

Ensayos

Efecto de los programas y flujos de aire en el Secado de Madera de Encino (Quercus Candicans Neé)

Resumen

En un túnel de secado, se realizaron 8 experimentos de secado con madera de encino Quercus Candicans Neé con un contenido de humedad inicial promedio de 62.93% base seca, para estudiar el efectos de dos diferentes programas de secado y dos velocidades de flujos de aire en la calidad de la madera y en el tiempo de secado. Se aplicaron 2 programas de secado identificados como programa de secado fuerte (T3C4), el cual operó en el rango de temperaturas de 47-71oC y un programa de secado suave (T1C3) que operó en un rango de 37-48oC. Cada programa se aplicó a 2 diferentes velocidades de flujo de aire (1.073m/s y 1.64m/s). La calidad de la madera fue ponderada cuantificando el nivel de defectos (acanaladura, rajaduras, grietas, arqueadura, encorvadura y torcedura) generados por cada programa. De acuerdo al análisis de varianza(p£0.05), el programa T1C3 aplicado con un flujo de aire menor genera en promedio 37.73% menos defectos que el programa T3C4, pero incrementa en un 21.17% el tiempo de secado.

Abstract

Using a drying tunnel, eight experiments were carried out on oak wood (Quercus *Candicans Neé*) with an initial average humidity content of 62.93% dry base; this was done in order to study the effects of two different drying programs and two airflow speeds on the quality of wood and on the drying time. Two drying programs were applied – one identified as a strong drying program (T3C4), which operated within a range of temperatures from 47-71°C.; the other was identified as a soft drying program (T1C3), which operated within a range of 37-48°C. Each program was applied at two different airflow speeds (1.073 m/s and 1.64 m/s). The quality of the wood was checked by quantifying the level of defects (striation, cracks, crevices, warping, curving and twisting) produced by each program. Based on the variance analysis ($p \leq 0.05$), the T1C3 program applied with a lower airflow produces an average of 37.73% fewer defects than the T3C4 program, but it increases the drying time by 21.17%.

Abstrait

Dans un tunnel de séchage, on a réalisé 8 expériences de séchage avec un bois de chêne vert, Quercus Caidicaus Neé, avec un taux moyen initial d'humidité de 62,93% base sèche, pour étudier les effets sur la qualité et le temps de séchage de 2 programmes différents de séchage combinés à 2 vitesses de flux d'air. On a appliqué 2 programmes de séchage dénommés : programme de séchage fort (T3C4), lequel s'inscrit dans un écart de températures de 47 – 71°, et un programme de séchage doux (T1C3) qui utilisait des températures de 37 – 48°. Chaque programme a été appliqué avec 2 vitesses différentes de flux d'air (1,073 m/s et 1,64 m/s). La qualité du bois a été évaluée en quantifiant le niveau de défauts (cannelures, fentes, fissures, courbure, creusement, torsion) générés par chaque programme. En accord avec l'analyse de variance ($p= 0,05$), le programme T1C3 utilisé avec un flux d'air plus lent génère en moyenne 37,73 % de défauts en moins que le programme T3C4, mais il augmente le temps de séchage de 21,17 %.

* Sadoth Sandoval Torres,
* Juan Rodríguez Ramírez,
* Lilia Méndez Lagunas.

Palabras Clave

Programas de secado, túnel de secado, Encino Quercus Candicans Neé, calidad de la madera, tiempo de secado, análisis de varianza.

Key Words

Drying schedules, drying tunel, Quercus Candicans Neé Oak, wood quality, variance analysis, drying time.

Introducción

El secado de la madera es una de las condiciones fundamentales para su transformación industrial, especialmente en la manufactura de diversos artículos de gran valor comercial. Sin embargo, dada la heterogeneidad en las características y propiedades de la gran diversidad de maderas, es importante conocer la interrelación de éstas con los parámetros del proceso de secado para obtener madera de buena calidad (Fuentes, 1996).

* *Centro Interdisciplinario de Investigación para el Desarrollo Integral Regional, Unidad Oaxaca, IPN.*

Este trabajo analiza el efecto que los programas de secado tienen sobre la calidad de la madera y el tiempo de secado, midiendo los cambios de condiciones (temperatura, humedad relativa, velocidad de flujo de aire), hechos en cada etapa del proceso, para finalmente evaluar la calidad de la madera de encino, ponderando el nivel de defectos generados durante el secado. Los encinos no han sido aprovechados para la elaboración de productos de gran valor comercial debido al complejo y costoso proceso de secado, ya que si no se establecen de manera correcta las variables y condiciones del proceso se presentan gran cantidad de defectos, además de tiempos de secado muy prolongados.

Por otra parte son escasos los programas de secado que se han ensayado tanto para madera suave como para madera dura, motivo por el que adquiere una gran importancia este estudio en el que se prueban dos programas de secado para madera de encino Quercus Candicans Neé .

De acuerdo al INEGI (1997), el volumen extraído en las unidades de producción rurales con explotación forestal de productos maderables en el país es de 13,449,136 m^3, ubicándose en tercer lugar Oaxaca con un 14.8%. El volumen extraído en la entidad es de 1,987,719 m^3 de los cuales el 77.9% corresponde a encino, 2.5% a pino y 0.3% a oyamel. Del volumen estatal extraído de encino; el 85.5% procede de la sierra norte, INEGI (1996).

Rietz y Page (1971), Boone et al. (1988), Wengert (1990) y Simpson (1991), han definido programas de secado por grupos de especies y por regiones de U.S.A., para encinos blancos y rojos de las partes bajas del sureste de U.S.A. de 1/4 y 5/4 de pulgada, el programa T2-C1; para encinos rojos de las partes altas del noreste, de 4/4" y 5/4 ", el programa T4-D2 para los de 6/4" y 8/4".

Bejar (1982), compara el secado de la madera de Quercus crassifolia, Q. Candicans, Q. Obtusata, Q. Laurina y Q. Castanea utilizando tres métodos de secado: al aire libre, en estufa convencional y en estufa eléctrica y evalúa los tiempos de secado y los defectos de acanalado, torceduras y arqueamiento. El tiempo de secado al aire libre fue de 3 meses 8 días para lograr un 16.75%; 1 mes 16 días para alcanzar un 10.21% en la estufa eléctrica y en estufa convencional en 12 días el C.H. fue de 9.48% el sistema de secado en estufa convencional presentó menos defectos de acanalado y torceduras en comparación con el secado por deshumidificación y el arqueamiento no presentó diferencias entre sistemas de secado.

Razo (1990); en algunas especies de encinos nacionales aplicó el programa T2-C2, secándolas en 23 días a 6% de C.H. y evaluó los defectos de acanalamiento, torceduras y encorvado; sin reportar la eficiencia de la secuela en la calidad de la madera, recomienda secar por separado a los encinos blancos y a los rojos, para mejorar el proceso de secado, pero además sugiere un tratamiento de vaporización o inmersión en agua en los encinos blancos, para eliminarles los extractivos y acelerar el secado.

Otra alternativa que se ha utilizado para reducir el tiempo de secado ha sido la vaporización previa de la madera al inicio del proceso. Simpson (1975), Harris et al. (1989), y McMillen(1969), indican que la vaporización previa es factible por no requerir equipo adicional; que con la vaporización previa se aumenta la permeabilidad de la madera al abrir su estructura siendo mayor en el sentido longitudinal pero favoreciendo también la transversal, que es más importante para el secado, al mismo tiempo se aumenta la difusión del vapor de agua, factor importante en la velocidad de secado. La velocidad de secado de la madera aserrada de encino con vaporización previa es alta en las primeras etapas.

Avila (1991), realiza un estudio sobre secado en estufa de la madera aserrada de 2.54 cm de espesor de Quercus acutifolia. En este estudio analizó la influencia del prevaporizado en las características y el tiempo de secado. El contenido inicial promedio de humedad de la madera fue de 70%. El contenido de humedad final fue de 8%, con tratamientos de igualamiento y acondicionamiento en 15 y 13.5 días.

Zavala y Hernández (1995), en el secado al aire libre, definen que el encino (Quercus Laurina) requiere el doble de tiempo que el pino y el aile, y determinan un modelo de regresión para predecir el contenido de humedad de la madera en diferentes intervalos de tiempo. Los principales defectos observados en encino fueron las torceduras, el arqueamiento y las rajaduras, en ese orden.

Zavala (1998), hace un análisis del efecto del precalentamiento en agua en el proceso de secado convencional y al aire libre de madera de encinos Quercus