Ensayos

Espacios con distancias no simétricas

Resumen

En los espacios asimétricos la distancia entre dos puntos tiene orientación, es decir, la distancia de A a B, puede diferir de la distancia de B a A. En forma similar, en un espacio normado asimétrico, la norma o magnitud de un vector υ puede no coincidir con la norma del vector $-\upsilon$

En este trabajo exploramos algunas de las consecuencias de este cambio y establecemos resultados topológicos básicos para estos espacios, damos algunas de las definiciones y resultados principales sobre espacios cuasi-semimétricos y seminormados asimétricamente, ilustrando con ejemplos el comportamiento topológico de éstos. Entre los resultados importantes que se presentan están: la caracterización de las bolas con respecto a la semimétrica ρ^s, generada por la cuasisemimétrica ρ, así como la caracterización de la topología generada por ρ^s, en función de las topologías generadas por ρ y $\bar{\rho}$. Los ejemplos de espacios normados asimétricamente que se dan aquí ilustran de manera gráfica las bolas con respecto a ρ, ρ^s y $\bar{\rho}$ mostrando la relación entre ellas. Esta es un área de estudio en vigoroso desarrollo, pues el análisis funcional asimétrico no ha sido llevado aún hasta los límites que ha llegado en el caso simétrico, tarea pendiente y necesaria dadas las aplicaciones que ya han encontrado en algunas áreas como el análisis de complejidad de algoritmos y en teoría de aproximación, por citar sólo dos de ellas.

Abstract

In asymmetric spaces the distance between two points has orientation, i.e., the distance from point A to point B may differ from the distance from point B to point A. Similarly, in an asymmetric normed space, the norm or magnitude of a vector v may not coincide with the norm of the vector $-\upsilon$.

In this paper we explore some consequences of this change, establish basic topological outcomes for these spaces, and give some definitions and main outcomes on asymmetric quasi-semimetric spaces and semi-normed spaces, providing examples of their topological behavior. Among the important results shown here are the following: the characterization of the balls with respect to the semimetric ρ^s generated by the quasi-semimetric ρ, as well as the characterization of the topology generated by ρ^s as a function of the topologies generated by ρ and $\bar{\rho}$. The examples of asymmetric normed spaces given here graphically illustrate the balls with respect to ρ, ρ^s y $\bar{\rho}$ showing the relationship between them. This area of study is developing vigorously, since asymmetric functional analysis still has yet to reach the limits attained by the symmetric case. This is a necessary task, given the applications that have been found in areas such as the analysis of the complexity of algorithms and in approximation theory, to cite two examples.

Résumé

Dans les espaces asymétriques la distance entre 2 points a une orientation, c'est-à-dire, que la distance de A à B peut être différente de celle de B à A. De la même manière, dans un espace normé asymétrique, la norme ou magnitude d'un vecteur peut ne pas coïncider avec la norme du vecteur $-\upsilon$.

Dans ce travail, nous explorons certaines des conséquences de ce changement et nous établissons des résultats topologiques de base pour ces espaces. Nous donnons également quelques définitions ainsi que les principaux résultats sur les espaces quasi-semi-métriques et semi-normés asymétriquement, en illustrant avec des exemples le comportement topologique de ces derniers. Parmi les résultats importants présentés, on a: la caractérisation des boules en rapport à la semi-métrique ρ^s générée par la quasi-semi-métrique ρ ainsi que la caractérisation de la topologie générée par ρ^s en fonction des topologies générées par ρ y $\bar{\rho}$. Les exemples d'espaces normés asymétriquement donnés ici illustrent de manière graphique les boules en relation à ρ, ρ^s y $\bar{\rho}$ et la relation entre celles-ci. C'est un domaine d'études en plein essor, vu que l'analyse fonctionnelle asymétrique n'a pas encore atteint les limites atteintes par l'analyse symétrique. Le travail reste à faire et il est nécessaire étant données les applications dans certains domaines comme l'analyse de la complexité des algorithmes et la théorie d'approximation, pour ne citer que 2 d'entre elles.

José Margarito Hernández Morales, Cuauhtémoc Héctor Castañeda Roldán, Luz del Carmen Álvarez Marín, Juan Luis Hernández López, Vulfrano Tochihuitl Bueno, José Luis Carrasco Pacheco, Tirso Miguel Ángel Ramírez Solano, Ricardo Vázquez Huerta.

Palabras clave: Cuasi-semimétrico, cuasi-semimétrica conjugada, seminormado asimétricamente, seminorma asimétrica conjugada, topología.

Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Tecnológica de la Mixteca

Introducción

Es ampliamente conocida la relevancia de los espacios métricos y de los espacios normados en diferentes áreas de las matemáticas. Con una métrica formalizamos y generalizamos nuestra idea de distancia entre dos puntos o dos elementos de un conjunto. El concepto de norma hace lo propio con respecto a la magnitud o tamaño de un vector. También sabemos que puede definirse una métrica partiendo de la norma de un espacio. De modo que estos objetos están íntimamente relacionados. En trabajos recientes se ha abordado el estudio de espacios más generales, donde se prescinde de la condición de simetría.

Las distancias no simétricas (o asimétricas) fueron ya consideradas por Hausdorff en su libro sobre Teoría de Conjuntos (Hausdorff, 2005). En (Künzi, 2001), se menciona que existió mucho progreso en espacios cuasi-uniformes entre los años 1966 y 1982. Este es justamente el periodo en que diferentes autores dan los primeros pasos en aproximación asimétrica. Sin embargo, motivados no sólo por las aplicaciones en la Teoría de Aproximación, sino también en Ciencias de la Computación, específicamente en Análisis de Complejidad de Algoritmos, así como por el propio interés teórico, existen hoy en día muchos trabajos sobre espacios normados asimétricamente, así como en los más generales espacios cuasi-métricos (también llamados espacios pseudométricos).

Los primeros trabajos sobre normas asimétricas fueron tempranamente esbozados por Krein y después utilizados por él y Nudelman en (Krein y Nudelman, 1973), donde se pueden encontrar algunas referencias importantes. Las ideas de Krein fueron seguidas en varios trabajos sobre aproximación con peso sensible al signo por matemáticos rusos, por ejemplo (Simonov, 2003).

El estudio sistemático de las propiedades de los espacios lineales normados asimétricamente se inició de manera más general y abstracta, con los trabajos de Romaguera, de la Universidad Politécnica de Valencia (Romaguera, 2000), así como de sus colaboradores en la misma universidad y en otras universidades de España: Alegre, Ferrer, García Raffi, Sánchez Pérez, Sánchez Álvarez, Sanchis y Valero, entre otros. Algunos de los trabajos de los investigadores mencionados se citan en (Alegre, 2009), (Alegre, Ferrando, García y Sánchez, 2008) y (Mayor y Valero, 2010), donde se puede seguir la evolución de algunos de los resultados obtenidos en los últimos años.

Un trabajo un poco más reciente y extenso sobre espacios cuasi-métricos, normados asimétricamente y uniformes es realizado por Cobzas (2010), donde la presentación sigue las ideas de la teoría de espacios normados (topología, operadores lineales continuos, funcionales lineales continuos, dualidad, geometría de espacios normados asimétricamente, operadores compactos, etc.), ahora con un enfoque asimétrico, enfatizando similitudes, pero también las diferencias que surgen por la carencia de simetría. Muchos de los resultados obtenidos para el caso asimétrico se enmarcan en la teoría de los espacios bitopológicos (Kelly, 1963).

Definición 1.1 *Sea* **X** *un conjunto no vacío, a una aplicación*
ρ **X** x **X** → **R** *que cumple que para cualesquiera x,y,z* ∈ **X**:

a) $\rho(x,y) \geq 0$ y $\rho(x,x)=0$

b) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z)+\rho(z,y)$

se le llama **cuasi-semimétrica** sobre **X**.
Si además se tiene

c) $\rho(x,y)=\rho(y,x)=0$

implica que $x=y$, entonces a ρ se le llama una **cuasi-métrica**.
Cuando se cumplen *a)*, *b)* y

d) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$

a ρ se le llama una **semimétrica**.
El par (X,ρ) recibe el nombre de espacio cuasi-semimétrico y espacio cuasi-métrico, respectivamente.
Ejemplos 1:
Sea **R** el conjunto de los números reales, definamos las aplicaciones:
ρ_i:R×R→R,i=1,2, mediante
i) $\rho_1(x, y)=$

$$y - x,\ x \leq y \ \begin{cases} k > 0, & x > y \\ y \end{cases}$$

ii) $\rho_2(x,y)=\max\{y-x,0\}$.
No es difícil probar que ρ_1 y ρ_2 cumplen con los incisos a) y b) de la definición 1.1, más aún, para i=1,2, $\rho_i(x,y)=\rho_i(y,x)=0$ sólo ocurre cuando x=y; así, tanto ρ_1 como ρ_2 son cuasi-métricas.

Dada una cuasi-semimétrica ρ sobre un conjunto X, siempre es posible construir otra cuasi-semimétrica $\bar{\rho}$ definida por

$\bar{\rho}(x,y)=\rho(y,x)$ (1.1)

a la cual se le conoce como cuasi-semimétrica conjugada de ρ. A partir de ρ y $\bar{\rho}$ se define la semimétrica ρ^s mediante

$\rho^s(x,y)=\max\{\rho(x,y), \bar{\rho}(x,y)\}$ (1.2)

Note que ρ es una cuasi-métrica si y sólo si ρ^s es una métrica. En efecto, si ρ es una cuasi-métrica y

$0=\rho^s(x,y)=\max\{\rho(x,y),\bar{\rho}(x,y)\}$,

esto implica que $\rho(x,y)=\rho(y,x)=0$, luego $x=y$. Se tiene entonces que $\rho^s(x,y)=0$ si y sólo si $x=y$, así ρ^s es una métrica. Recíprocamente, supongamos que $\rho^s(x,y)$ es una métrica y que $\rho(x,y)=\rho(y,x)=0$, entonces $\rho^s(x,y)=0$, de donde $x=y$, luego, ρ es una cuasi-métrica.

Definición 1.2 Sea **X** un espacio lineal. Una aplicación $p:\mathbf{X}\to\mathbf{R}$ tal que para cualesquiera x, y, $z\in\mathbf{X}$, y $\alpha\geq 0$ cumple

a) $p(\alpha x)=\alpha\, p(x)$

b) $p(x+y)\leq p(x)+p(y)$

se le llama **seminorma asimétrica** sobre **X**. Si además de las propiedades *a)* y *b)*, se verifica

c) $p(x)=p(-x)=0$ implica que

$x=0$,

entonces a p se le conoce como **norma asimétrica**.

A un espacio lineal dotado de una seminorma asimétrica se le llama **espacio seminormado asimétricamente** y en el caso de que p sea norma asimétrica, **espacio normado asimétricamente**.

Dada una seminorma asimétrica p, siempre es posible definir una cuasi-semimétrica ρ_p mediante

$\rho_p(x,y)=p(y-x)$.

Como en el caso de cuasi-semimétricas, se puede definir $\bar{p}$, la **seminorma asimétrica conjugada** de p por $\bar{p}(x)=p(-x)$. De igual forma, se define $p^s(x)=max\{\rho(x),p(-x)\}$.

Dado un espacio cuasi-semimétrico $(\mathbf{X},\rho)$, para $x\in\mathbf{X}$, $r>0$ se define la **bola abierta** con centro en x y radio r

$B_\rho(x,r)=\{y\in\mathbf{X} : \rho(x,y)<r\}$,

y la **bola cerrada**

$B_\rho[x,r]=\{y\in\mathbf{X}: \rho(x,y)\leq r\}$.

Se dice que un subconjunto G de **X** es ***abierto respecto a*** ρ o que es ρ- **abierto**, si para cada $x\in G$, existe $r>0$ tal que $B_\rho(x,r)\subset G$.

Un subconjunto C de X es **cerrado respecto a** ρ (ρ-**cerrado**), si es complemento de algún ρ - abierto.

Proposición 1.1: En un espacio cuasi-semimétrico (X,ρ), toda bola abierta $B_\rho(x,r)$ es un conjunto ρ-abierto.

Demostración:

Basta con mostrar que para cada $y\in B_\rho(x,r)$, existe un número real r' tal que $B_\rho(y,r')\subseteq B_\rho(x,r)$.

Sean $y\in B_\rho(x,r)$ y

$r=r'-\rho(x,y)>0$.

Para $z\in B_\rho(y,r')$, se tiene que $\rho(x,z)\leq\rho(x,y)+\rho(y,z)$

$<\rho(x,y)+r'$

$=\rho(x,y)+r-\rho(x,y)=r$,

por lo que $z\in B_\rho(x,r)$ y así

$B_\rho(y,r')\subset B_\rho(x,r)$. ■

Proposición 1.2: En un espacio cuasi-semimétrico $(\mathbf{X},\rho)$, toda bola $B_\rho[x,r]$ es un conjunto $\bar{\rho}$ - cerrado.

Demostración:

Probemos que $\mathbf{X} - B_\rho[x,r]$ es $\bar{\rho}$-abierto. Para esto, sea $y\in X\text{-}B_\rho[x,r]$ y sea $r'=\rho(x,y)-r>0$,

para $z\in B_{\bar{\rho}}(y,r')$ se cumple $\rho(x,z)\geq\rho(x,y)-\rho(z,y)$

$=\rho(x,y)-\bar{\rho}(y,z)$

$>\rho(x,y)-r'$

$=\rho(x,y)-\rho(x,y)+r=r$,

luego, $B_{\bar{\rho}}(y,r')\subset\mathbf{X}\text{-}B_\rho[x,r]$. ■

En un espacio cuasi-semimétrico $(\mathbf{X},\rho)$, pueden definirse las topologías τ_ρ, $\tau_{\bar{\rho}}$ y $\tau_\rho{}^s$, correspondientes a las cuasi-semimétricas ρ, $\bar{\rho}$ y ρ^s, respectivamente. Si G es un ρ-abierto entonces para cada $x\in X$, existe $r>0$, tal que $B_\rho(x,r)\subset G$, pero como $\rho(x,y)\leq\rho^s(x,y)$, se tiene que $B_\rho{}^s(x,r)\subset B_\rho(x,r)\subset G$. Así, G es también ρ^s-abierto, esto es, $\tau_\rho{}^s$ es más fina que τ_ρ. Análogamente puede verse también que $\tau_\rho{}^s$ es más fina que $\tau_{\bar{\rho}}$.

Proposición 1.3: Sea (X,ρ) un espacio cuasi-semimétrico, para cualquier $x\in X$, se cumple que $B_\rho{}^s(x,r)=B_\rho(x,r)\cap B_{\bar{\rho}}(x,r)$.

Demostración:

En efecto, si $y\in B_\rho{}^s(x,r)$, entonces

$\rho^s(x,y)=max\{\rho(x,y),\bar{\rho}(x,y)\}<r$ y por tanto,

$B_\rho{}^s(x,r)\subseteq B_\rho(x,r)\cap B_{\bar{\rho}}(x,r)$. Ahora, si $y\in B_\rho(x,r)\cap B_{\bar{\rho}}(x,r)$ se tiene que $\rho(x,r)$, $\bar{\rho}(x,r)<r$, luego $\rho^s(x,y)<r$, y así $y\in B_\rho{}^s(x,r)$. Con lo anterior,

$B_\rho(x,r) \cap B_{\bar\rho}(x,r) = B_\rho^s(x,r)$. De ambas contenciones tenemos la igualdad.■

Más aún, tenemos la siguiente:

Proposición 1.4: Sea ρ una cuasi-semimétrica en X. Si $\tau_\rho, \tau_{\bar\rho}$ y τ_ρ^s son las topologías respectivas inducidas por ρ, $\bar\rho$ y ρ^s, entonces τ_ρ^s es la mínima topología que contiene a $\tau_\rho \cup \tau_{\bar\rho}$, esto es,

$$\tau_\rho^s = \langle \tau_\rho \cup \tau_{\bar\rho} \rangle := \cap \{\tau : \tau_\rho \cup \tau_{\bar\rho} \subseteq \tau\}$$

donde τ representa una topología de X.

Demostración: Una de las contenciones es clara, dado que $\tau_\rho, \tau_{\bar\rho} \subseteq \tau_\rho^s$ entonces $\tau_\rho \cup \tau_{\bar\rho} \subseteq \tau_\rho^s$ y por tanto $\langle \tau_\rho \cup \tau_{\bar\rho} \rangle \subseteq \tau_\rho^s$.

Ahora, si $B_\rho^s(x,r) \in \tau_\rho^s$ entonces por los argumentos que anteceden al enunciado de esta proposición,

$$B_\rho^s(x,r) = B_\rho(x,r) \cap B_{\bar\rho}(x,r) \in \langle \tau_\rho \cup \tau_{\bar\rho} \rangle$$

y por tanto $\langle B_\rho^s(x,r) \rangle \subseteq \langle \tau_\rho \cup \tau_{\bar\rho} \rangle$, de modo que $\tau_\rho^s = \langle \tau_\rho \cup \tau_{\bar\rho} \rangle$.■

Ejemplos 2:

i) Sea $X = \{a,b,c\}$ definamos $\rho : X \times X \longrightarrow [0,+\infty)$ por

$$\rho(b,a) = 0, \qquad \rho(a,b) = \rho(b,c) = \rho(c,b) = \rho(c,a) = \rho(a,c) = 1,$$

Claramente ρ es una cuasi métrica, y

$$B_\rho(a,r) = \begin{cases} X, & r>1 \\ \{a\}, & r\leq 1, \end{cases}$$

$$B_\rho(b,r) = \begin{cases} X, & r>1 \\ \{a,b\}, & r\leq 1, \end{cases}$$

$$B_\rho(c,r) = \begin{cases} X, & r>1 \\ \{c\}, & r\leq 1. \end{cases}$$

De modo que,

$\tau_\rho = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$,

$\tau_\rho = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$ y

$\tau_\rho^s = \{(\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\})\}$.

Esta última es precisamente la topología discreta de X.

ii) Si la aplicación $\rho : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ está dada por

$$\rho(x,y) = \begin{cases} y-x, & x\leq y \\ 1, & x>y, \end{cases}$$

las bolas abiertas son de la forma:

$$B_\rho(x,r) = \begin{cases} [x, x+r), & r<1 \\ (-\infty, x+r), & r\geq 1, \end{cases}$$

$$B_{\bar\rho}(x,r) = \begin{cases} (x-r, x], & r<1 \\ (x-r, +\infty), & r\geq 1. \end{cases}$$

Con esto último las bolas abiertas de ρ^s son:

$$B_\rho^s(x,r) = \begin{cases} \{x\}, & r<1 \\ (x-r, x+r), & r\geq 1 \end{cases}$$

Como se ve, τ_ρ es la topología de la línea de Sorgenfrey, mientras que τ_ρ^s es la topología discreta en el conjunto de los números reales.

iii) En ii) de los ejemplos 1, las bolas abiertas son de la forma

$B_\rho(x,r) = (-\infty, x+r)$ mientras que $B_{\bar\rho}(x,r) = (x-r, +\infty)$, luego

$B_\rho^s(x,r) = (x-r, x+r)$.

Aquí la topología τ_ρ^s es la topología inducida por la métrica del valor absoluto.

iv) En el plano, el funcional $p : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ dado por $p(x,y) = max\{y-x, y+x, 0\}$, es una norma asimétrica ya que si $\lambda \geq 0$,

$$p(\lambda(x,y)) = max\{\lambda y - \lambda x, \lambda y + \lambda x, 0\} = \lambda max\{y-x, y+x, 0\} = \lambda p(x,y)$$

Además, si $u = (x,y)$ y $v = (a,b)$, entonces

$$\begin{aligned} p(u+v) &= max\{y+b-x-a, y+b+x+a, 0\} \\ &= max\{y-x+b-a, y+x+a+b, 0\} \\ &\leq max\{y-x, y+x, 0\} + max\{b-a, b+a, 0\} \\ &= p(u)+p(v). \end{aligned}$$

Con esto, p es una seminorma asimétrica. Además, si $p(x,y) = p(-x,-y) = 0$, entonces $y+x = 0 = y-x$, luego $x = 0 = y$, por lo que p es una norma asimétrica.

En este ejemplo,

$B_\rho((0,0),r) = \{(x,y) : y-x, x+y < r\}$,

mientras que

$B_{\bar\rho}((0,0),r) = \{(x,y) : x-y, -x-y < r\}$.

Geométricamente

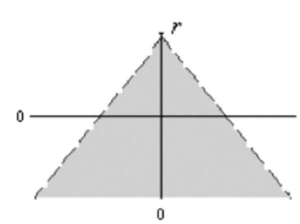

Fig. 1 $B_\rho((0,0),r)$

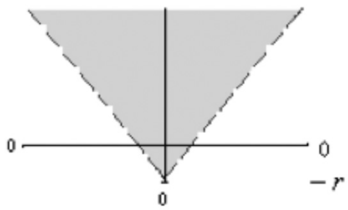

Fig. 2 $B_{\bar{p}}$ ((0,0),r)

De donde

$B_p^s((0,0),r)=\{(x,y):|y-x|,|x+y|<r\}$

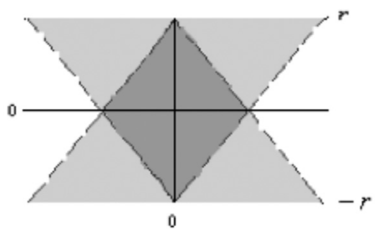

Fig. 3 $B_p^s((0,0),r)$

v) En el conjunto $M_{(m\times n)}(\mathbf{R})$ de matrices de tamaño m×n con componentes reales, definimos

$p:M_{(m\times n)}(\mathbf{R})\longrightarrow\mathbf{R}$ mediante

$$p(A)=max\{A_{ij},0\}.$$

Mostremos que p es una norma asimétrica. Para $\alpha\geq 0$, tenemos:

$$p(\alpha A)=max_{(i,j)}\{\alpha A_{ij},0\}$$
$$=\alpha\,(\max)_{i,j}\{A_{ij},0\}=\alpha p(A).$$

Ahora, si $A,B\in M_{(m\times n)}(\mathbf{R})$, entonces

$$p(A)+p(B)=max_{i,j}\{A_{ij},0\}$$
$$+(\max)_{i,j}\{B_{ij},0\}$$
$$\geq(max)_{i,j}\{(A+B)_{ij},0\}$$
$$=p(A+B)$$

Por último, si $p(A)=p(-A)=0$, obtenemos

$$0=(max)_{i,j}\{A_{ij},0\}\geq A_{ij}$$

y

$$0=(max)_{i,j}\{-A_{ij},0\}\geq -A_{ij}$$

de lo anterior, $A=0$.

Un caso particular de este ejemplo lo tenemos con $p:\mathbf{R}^2\longrightarrow\mathbf{R}$, definida por $p(x,y)=max\{x,y,0\}$. Aquí las bolas abiertas centradas en el origen son de la forma:

$B_p((0,0),r)=\{(x,y):x<r,\ y<r\}$, mientras que

$B_{\bar{p}}((0,0),r)=\{(x,y)\dashv:\vdash x,\ y>-r\}$.

Así,

$B_p^s((0,0),r)=\{(x,y): -r<x,\ y<r\}$.

Nótese que p^s es la norma del supremo en $\mathbf{R}^2$.

Geométricamente:

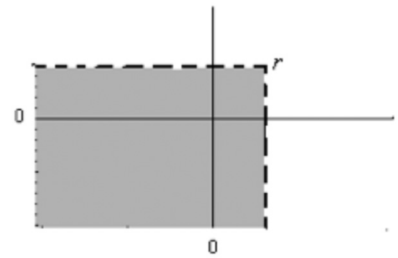

Fig. 4 B_p ((0,0),r)

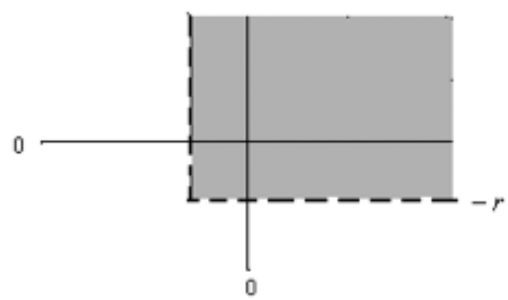

Fig. 5 $B_{\bar{p}}$ ((0,0),r)

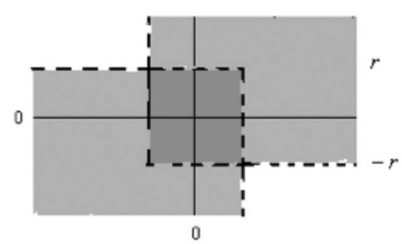

Fig. 6 $B_p^s((0,0),r)$

vi) Consideremos al conjunto de las funciones continuas definidas en el intervalo $[a,b]\subseteq\mathbf{R}$. Definimos el funcional $p:C[a,b]\longrightarrow R$ mediante

$$p(f)=\max_{a\leq x\leq b}\{f(x),0\}.$$

En este caso,

$$\bar{p}(f)=\max_{a\leq x\leq b}\{-f(x),0\}.$$

y

$B_p(f,r)=\{g:g(x)<f(x)+r\}$,

$B_{\bar{p}}(f,r)=\{g:f(x)-r<g(x)\}$.

Geométricamente, las bolas abiertas son ahora:

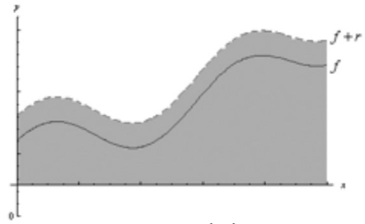

Fig. 7 B_p (f,r)

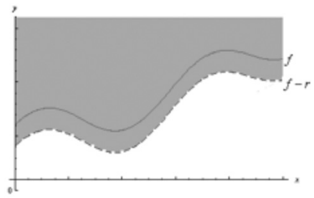

Fig. 8 $B_{\bar{p}}$ (f,r)

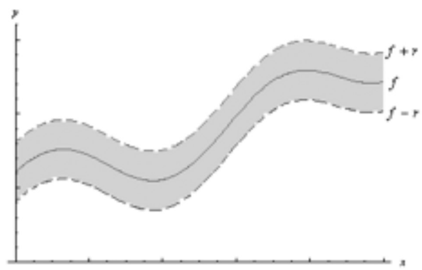

Fig. 9 B_p^s (f,r)

vii) Sea

$X=\{\{x_k\}\in l_\infty : \sum_{k=1}^{\infty} x_k/2^k=0\}$

definamos $p(x)=\sup_k\{x_k,0\}$. Es fácil ver que p es una norma asimétrica.

Si X es un espacio con una semimétrica d y a su vez con una cuasi- semimétrica ρ, entonces se puede probar fácilmente que d+ρ es también una cuasi-semimétrica, más aún, si ρ es una cuasi-métrica, d+ρ es una cuasi-métrica; esta es una forma de generar más cuasi-métricas en X. En efecto, sea $\rho_0=d+\rho$, entonces es claro que para cualesquiera $x, y, z \in X$.

$\rho_0(x,y)\geq 0$ y $\rho_0(x,x)=0$. Además,

$\rho_0(x,y)=d(x,y)+\rho(x,y)$

$\leq d(x,z)+d(z,y)+\rho(x,z)+\rho(z,y)$

$=\rho_0(x,z)+\rho_0(y,z)$

Finalmente, si

$\rho_0(x,y)=\rho_0(y,x)=0$,

entonces

$d(x,y)+\rho(x,y)$

$=d(y,x)+\rho(y,x)=0$,

de donde $\rho(x,y)=\rho(y,x)=0$, lo cual implica que $x=y$. Más aún, es fácil ver qué $\rho_0^s=d+\rho^s$.

Conclusiones:

Partiendo de los espacios semimétricos y de los espacios seminormados que se estudian en los cursos básicos de un programa de Matemáticas, se ve que al no exigir la propiedad de simetría en una distancia, los espacios resultantes tienen características diferentes en su estructura topológica, a estos espacios se les ha llamado espacios cuasi-semimétricos y seminormados asimétricamente, respectivamente; esto abre toda una gama de posibilidades para trasladar y comparar conceptos y resultados que se tienen en los espacios con simetría.

En este trabajo se han dado las definiciones y conceptos básicos de los espacios cuasi-métricos y seminormados asimétricos, los cuales son una generalización de los espacios semimétricos y los espacios seminormados, respectivamente. También se han establecido algunas de sus propiedades topológicas, además se dieron varios ejemplos de espacios interesantes e ilustrativos junto con las gráficas de las bolas correspondientes a las distintas topologías generadas. Se mostró como a partir de un espacio carente de la propiedad de simetría puede derivarse otro que si la tiene y que tiene una topología más fina. A partir de una norma conocida $\|\cdot\|$, se determinó una norma asimétrica p tal que $\rho^s=\|\cdot\|$. Este campo es muy extenso y aquí sólo se han delineado algunos resultados básicos y algunos ejemplos

Este trabajo fue parcialmente financiado por PROMEP, proyecto UTM-EXB-025.

Bibliografía

[1] Alegre C., (2009), Continuous operators on asymmetric normed spaces, Acta *Math. Hungar. Vol. 122*, 4 357-372.

[2] Alegre C., I. Ferrando, L. M. García and E. A. Sánchez-Pérez, (2008), Compactness in asymmetric normed spaces, *Topology Appl.*, *155 527-539*.

[3] Cobzas S., (2010), Functional Analysis in Asymmetric normed Spaces, *Mathematics FA arXiv*: *006.117v.*

[4] Hausdorff F. (2005), Set Theory, *AMS Chelsea Publishing*, *EUA*.

[5] Kelly J. C., (1963), Bitopological spaces, *Proc. London Math*. Soc. *13*, *71-89*.

[6] Krein M. G. and A. Nudelman, (1973), The Markov moment problem and extremal problems. *Nauka*, *Moscow*.

[7] Künzi H-P. A., (2001), *Nonsymmetric distances and their associated topologies*: *About the origins of basic ideas in the area of asymmetric topology*, C. Aull and R. Lowen, (*editors*), Handbook of the History of General Topology, Vol. 3, Dordrecht, Kluwer Acad. Pub., 853-968.

[8] Mayor G. And Ol. Valero, (2010), Aggregation of asymmetric distances in Computer Science, *Information Sciences*, *Volume 180*, I*ssue 6*, *813-812*.

[9] Romaguera, S., (2000), Semi-Lipschitz functions and best approximation in quasi-metric spaces. *Journal of Approx*. *Th*. *103, 291-301*.

[10] Simonov B. V., (2003), On the element of best nonsymmetric approximation in spaces with nonsymmetric quasi-norms. *Mathematical notes 74 (6), 902-912, (Traslated from Russian)*.